Содержание

1. Цель работы 4
2. Теоретическая часть 4
3. Экспериментальная часть 11
   3.1. Приборы и оборудование 11
   3.2. Требования по технике безопасности 12
   3.3. Порядок выполнения работы 12
   3.4. Требования к отчёту 13
4. Контрольные вопросы 14
   Список литературы 14

Лабораторная работа № 49
Изучение вынужденных колебаний в электрическом колебательном контуре

1. Цель работы

Изучение вынужденных электромагнитных колебаний в электрическом контуре. Снятие резонансных кривых для тока и напряжения, построение векторной диаграммы.

2. Теоретическая часть

2.1. Вынужденные колебания в электрическом колебательном контуре. Явление резонанса

Электрическая цепь, в которой могут происходить электрические колебания, называется колебательным контуром. Всякий реальный контур помимо индуктивности L и емкости C содержит активное сопротивление R. Энергия электрического и магнитного полей, запасенная в таком контуре, с течением времени превращается в ленц-джоулево тепло, вследствие чего происходит затухание колебаний. Для получения незатухающих колебаний необходимо в контур подводить энергию, компенсирующую потери. Это можно осуществить, включив последовательно с элементами контура источник тока с ЭДС, периодически изменяющейся по гармоническому закону (рис. 2.1).

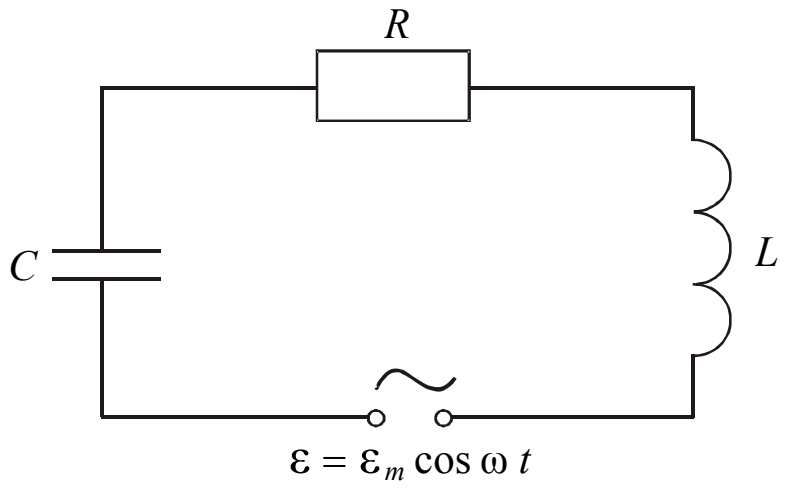

Рис. 2.1

Колебания, возникающие в этом случае, называются вынужденными. Токи в колебательном контуре являются квазистационарными, т.е. в каждый момент времени сила тока во всех сечениях цепи одинакова. Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома и вытекающим из него законам Кирхгофа.

Согласно второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений на отдельных элементах контура (рис. 2.1) равна электродвижущей силе ε. Уравнение для тока в контуре имеет вид

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{q}{C}=\varepsilon_m\cos\omega t, \qquad (2.1)$$

где $L\frac{dI}{dt}$, RI, $\frac{q}{C}$ – падения напряжения соответственно на индуктивности, активном сопротивлении, ёмкости.

Перейдя от тока I к заряду q и введя обозначения:

$$\omega_0{}^2=\frac{1}{LC},\ 2\beta=\frac{R}{L}, \qquad (2.2)$$

получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{\varepsilon_m}{L}\cos\omega t, \qquad (2.3)$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота контура.

Частное решение этого уравнения, которое описывает установившиеся вынужденные колебания, имеет вид

$$q=q_m\cos(\omega t-\psi), \qquad (2.4)$$

Амплитуда q_m и начальная фаза ψ находятся по формулам:

$$q_m=\frac{\varepsilon_m}{L\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}, \qquad (2.5)$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (2.6)$$

Подстановка значений β и ω_0 даёт:

$$q_m=\frac{\varepsilon_m}{\omega\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}, \qquad (2.7)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}, \tag{2.8}$$

где $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление, $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, R – активное электрическое сопротивление.
Величины

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \tag{2.9}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \tag{2.10}$$

называются соответственно реактивным и полным сопротивлениями цепи.

Продифференцировав формулу (2.4) по времени, найдём силу тока в контуре при установившихся вынужденных колебаниях

$$I = \frac{dq}{dt} = -\,\omega\, q_m\, \sin(\omega\, t\, -\, \psi) = I_m \cos(\omega\, t\, -\, \psi\, +\, \frac{\pi}{2}) = \\ = I_m \cos(\omega\, t\, -\, \varphi). \tag{2.11}$$

Амплитуда тока $I_m = q_m\,\omega$ и начальная фаза $\varphi = \psi\, -\, \frac{\pi}{2}$ определяются по формулам:

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{2.13}$$

Разделив выражение (2.4) на емкость C, получаем формулу для напряжения на конденсаторе

$$u_C = \frac{q_m}{C}\cos(\omega\, t\, -\, \psi) = u_{Cm} \cos(\omega\, t\, -\, \varphi - \frac{\pi}{2}), \tag{2.14}$$

где

$$u_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{\varepsilon_m}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{I_m}{\omega C} - \tag{2.15}$$

амплитуда напряжения на конденсаторе.

Умножив производную функции (2.11) на L, получим напряжение на индуктивности

$$u_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \varphi) = u_{Lm}\cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \qquad (2.16)$$

где
$$u_{Lm} = \omega L I_m - \qquad (2.17)$$
амплитуда напряжения на индуктивности.

Напряжение на активном сопротивлении определяется по формуле

$$u_R = R I_m \cos(\omega t - \varphi). \qquad (2.18)$$

Сопоставление формул (2.11), (2.14), (2.16) и (2.18) показывает, что напряжение на ёмкости отстаёт по фазе от силы тока на π/2, напряжение на индуктивности опережает ток на π/2. Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с током.

С учетом вышеизложенного уравнение (2.3) можно записать

$$u_R + u_C + u_L = \varepsilon_m \cos\omega t. \qquad (2.19)$$

Фазовые соотношения можно представить наглядно с помощью векторной диаграммы. Напомним, что гармоническое колебание можно задать с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, а направление вектора образует с некоторой осью угол. Возьмем в качестве прямой, от которой отсчитывается начальная фаза, ось токов. Тогда получается диаграмма, изображенная на рис. 2.2.

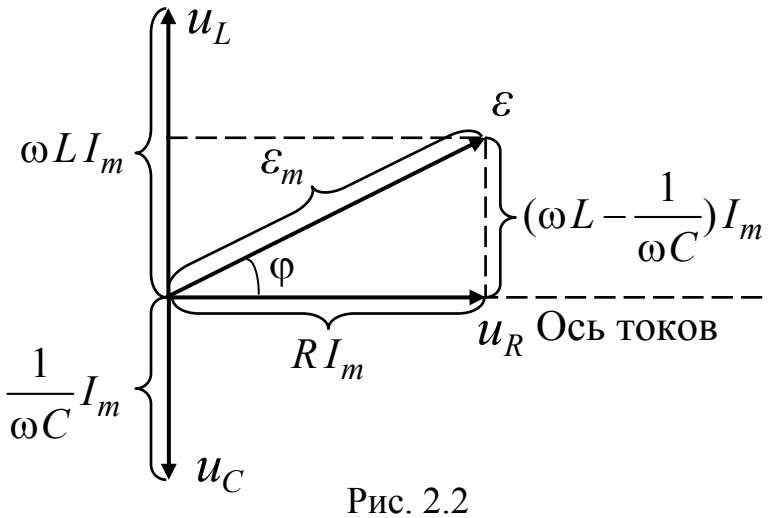

Рис. 2.2

Согласно (2.19) три функции u_R, u_C и u_L в сумме должны быть равны приложенной ЭДС ε. В соответствии с этим ЭДС ε изображается на диаграмме вектором, равным сумме векторов $\vec{u}_R, \vec{u}_C$ и $\vec{u}_L$.

Амплитуды силы тока и напряжения, как видно из формул (2.12) и (2.15), зависят не только от параметров контура (R, L и C) и амплитуды ε_m, но и от частоты вынуждающей ЭДС. При некоторых частотах $\omega_{рез}$ в контуре наступает резкое возрастание амплитуды силы тока и напряжения. Эти явления называют соответственно резонансом тока и резонансом напряжения. Из формулы (2.12) видно, что при условии

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \tag{2.20}$$

амплитуда тока достигает максимального значения. Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура ω_0

$$\omega_I = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}. \tag{2.21}$$

Резонансные кривые для силы тока при различных коэффициентах затухания β изображены на рис. 2.3. Отрезок, отсекаемый резонансными кривыми на оси I_m, равен нулю; при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может. Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше $\beta = \dfrac{R}{2L}$, т.е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Резонансная частота для заряда q_m и напряжения на конденсаторе u_{Cm} равна

$$\omega_q = \omega_u = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \le \omega_0. \tag{2.22}$$

Резонансные кривые для u_{Cm} изображены на рис. 2.4 (резонансные кривые для q_m имеют такой же вид).

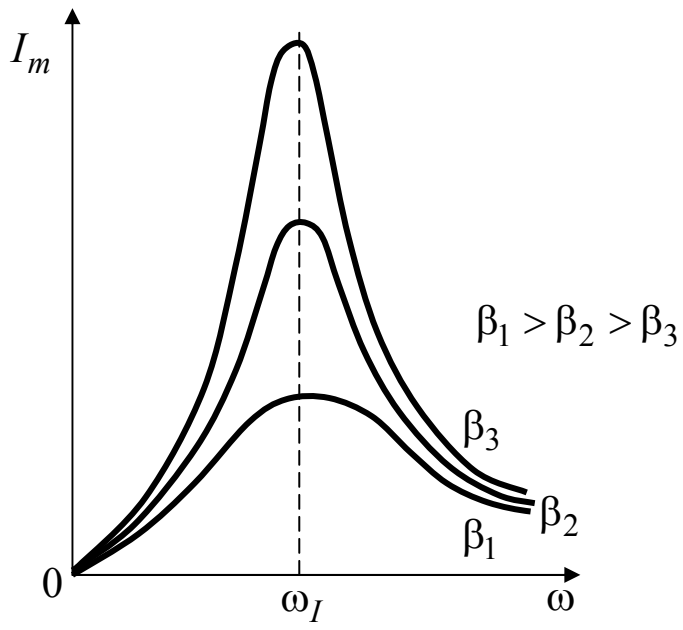

Рис. 2.3

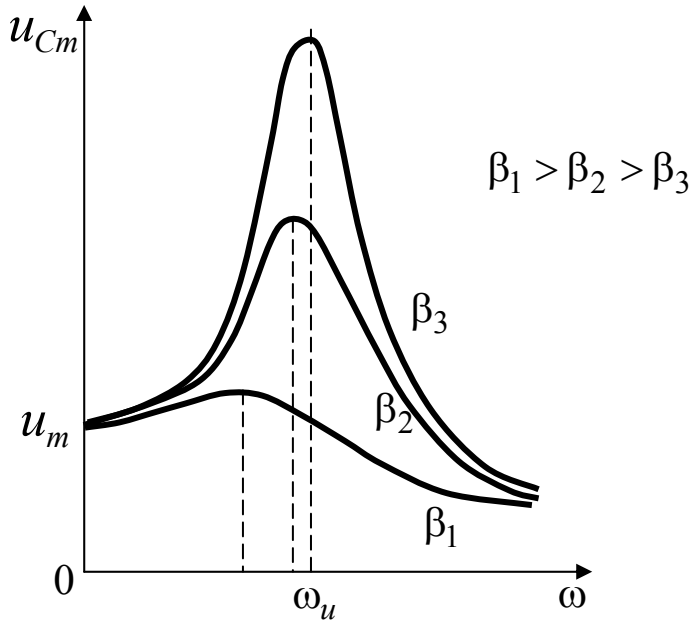

Рис. 2.4

При $\omega \to 0$ резонансные кривые стремятся к $u_{Cm} = u_m$ – напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения u_m.

При малом затухании (при $\beta^2 \ll \omega_0{}^2$) резонансную частоту ω_u для напряжения можно считать равной ω_0. В этом случае $\omega_u L - \dfrac{1}{\omega_u C} \approx 0$. Согласно формуле (2.15) при резонансе отношение амплитуды напряжения на конденсаторе $u_{Cm\,\text{рез}}$ к амплитуде внешней ЭДС ε_m равно

$$\frac{u_{Cm\,\text{рез}}}{\varepsilon_m} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q, \qquad (2.23)$$

где Q – добротность контура.

Таким образом, добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное напряжение. Добротность контура характеризует «остроту» резонансных кривых и может быть определена экспериментально по величине относительной ширины $\frac{\Delta\omega}{\omega_I}$ резонансной кривой (рис. 2.5), где $\Delta\omega$ – ширина резонансной кривой на уровне убывания максимальной амплитуды тока в $\sqrt{2}$ раза.

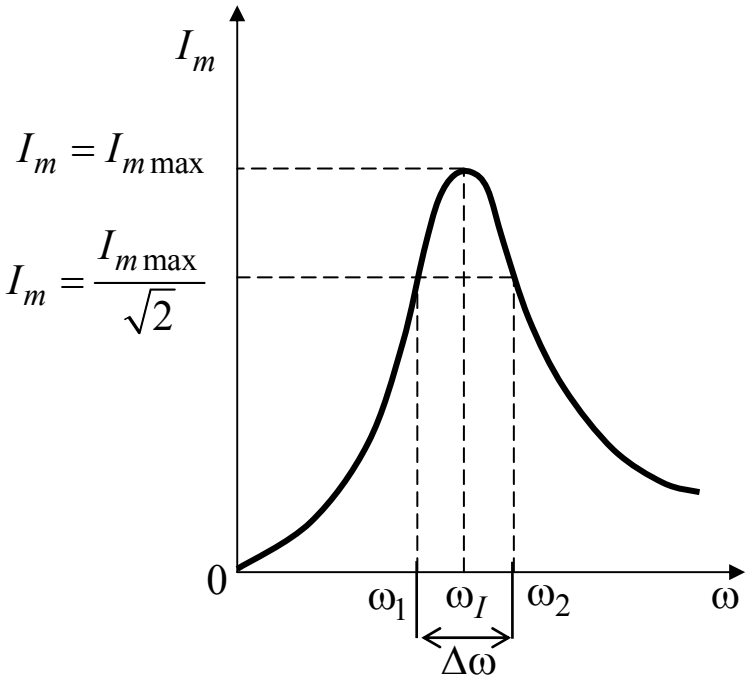

Рис. 2.5

Следует отметить, что отношение амплитуды тока $\frac{I_{m\max}}{\sqrt{2}}$ на этом уровне к максимальному значению амплитуды тока $I_{m\max}$ равно 0,7, что соответствует уменьшению мощности в контуре в 2 раза ($0,7^2 \simeq 0,5$).

Полагая в формуле (2.12) $I_m = \frac{I_{m\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon_m}{R\sqrt{2}}$, получаем

$$1+\frac{1}{R^2}\cdot(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2=2 \qquad (2.24)$$

или

$$\frac{\omega^2 L^2}{R^2}\cdot(1-\frac{1}{\omega^2 LC})^2=1. \qquad (2.25)$$

Подставив в это уравнение выражения для β^2 и $\omega_0{}^2$, получим уравнение, которому удовлетворяют значения ω_1 и ω_2

$$(\omega_0{}^2-\omega)^2=4\beta^2\omega^2. \qquad (2.26)$$

Решая это биквадратное уравнение и отбрасывая отрицательные корни, так как они не соответствуют физическому смыслу ω, находим

$$\omega_1=-\beta+\sqrt{\beta^2+\omega_0{}^2},\ \omega_2=\beta+\sqrt{\beta^2+\omega_0{}^2},$$

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=2\beta. \qquad (2.27)$$

Подставив формулу (2.27) в выражение для относительной ширины резонансной кривой, получим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{2\beta}{\omega_0}=R\sqrt{\frac{C}{L}}=\frac{1}{Q}. \qquad (2.28)$$

Таким образом, относительная ширина резонансной кривой обратно пропорциональна добротности контура.

3. Экспериментальная часть

3.1. Приборы и оборудование

1. PQ – звуковой генератор.
2. PO – электронный осциллограф.
3. ФПЭ – 11 – кассета.
4. МС – магазин сопротивлений.
5. МЕ – магазин ёмкостей.

Исследование явления резонанса в электрическом контуре производится по схеме, представленной на рис. 3.1.

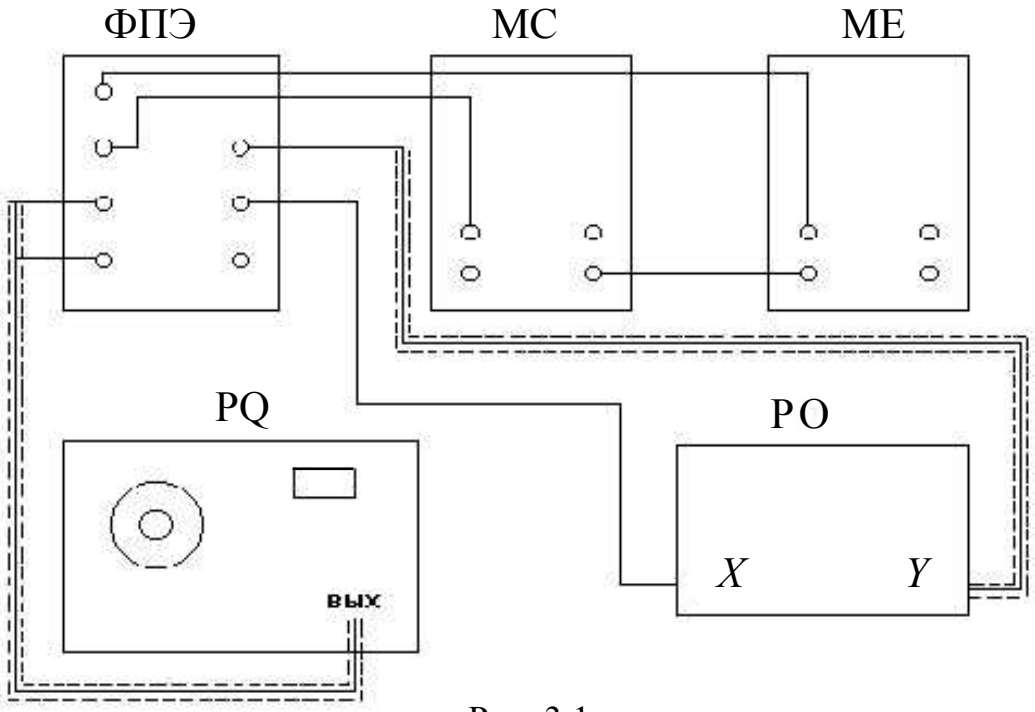

Рис. 3.1

3.2. Требования по технике безопасности

1. Проверить правильность сборки схемы. В случае сомнения обратиться к преподавателю.

2. Проверить наличие заземления.

3. Во время работы нельзя прикасаться к оголённым участкам схемы, предварительно не обесточив установку.

3.3. Порядок выполнения работы

Задание: снятие резонансных кривых тока и напряжения. Определение резонансной частоты и добротности контура.

1. Включить лабораторный стенд и приборы.

2. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение синусоиды.

3. Установить ёмкость – 10^{-2} мкФ, сопротивление – 100 Ом.

4. Переключатель «множитель частоты» на панели звукового генератора установить в положение «10^5».

5. Переключатель усилителя сигналов (V/дел.) установить в положение, удобное для наблюдения сигналов частотой $(1 \div 10) \cdot 10^5$ Гц.

6. Измерить амплитуду синусоидального напряжения на экране

осциллографа в сантиметрах при различных частотах в диапазоне от 10^5 до 10^6 Гц. Частоту изменять с интервалом $(1 \div 2) \cdot 10^5$ Гц; вблизи резонанса – с интервалом $0{,}2 \cdot 10^5$ Гц.

7. Перевести результаты измерений в вольты. Для этого результаты измерений в сантиметрах надо умножить на показание переключателя усиления сигналов (V/см).

8. Данные занести в таблицу.

9. Рассчитать амплитуду тока в колебательном контуре по формуле $I_m = \omega C u_{Cm}$, где $\omega = 2\pi\nu$. Расчёт произвести для каждого значения частоты, результаты вычислений занести в таблицу в миллиамперах.

10. Построить на одном графике зависимость $I_m = I_m(\omega)$, на другом графике зависимость $u_{Cm} = u_{Cm}(\omega)$. Определить на графиках частоты, при которых наблюдается резонанс тока и напряжения.

11. Используя резонансную кривую для тока, определить ширину резонансной кривой $\Delta\omega$. По формуле (2.28) вычислить добротность контура.

12. Построить векторную диаграмму для одного из значений амплитуды тока I_m. По этому графику определить амплитудное значение ЭДС ε.

Таблица

ν, Гц								
ω, рад/с								
u_{Cm}, см								
u_{Cm}, В								
I_m, мА								

3.4. Требования к отчёту

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

1. Название и номер лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы для выполнения измерений и расчётов.
4. Таблицу с результатами измерений и вычислений.
5. Формулы для расчёта погрешностей.
6. Расчёт погрешностей.
7. Выводы к работе.

4. Контрольные вопросы

1. Какие величины в электрическом колебательном контуре изменяются периодически?
2. Какие колебания называются вынужденными?
3. Вывести дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.
4. Какие токи называются квазистационарными?
5. Почему в случае вынужденных колебаний возможно возникновение явления резонанса?
6. Как сдвинуты по фазе относительно силы тока напряжения на емкости и индуктивности?
7. Чем отличаются резонансные кривые для тока и напряжения?
8. Как влияют активное сопротивление, электроемкость и индуктивность колебательного контура на его резонансные характеристики?
9. Как с помощью резонансной кривой определить добротность контура?

Список литературы

1. *Савельев И.В.* Курс физики. Т. 2. – СПб.: Издательство «Лань», 2007.
2. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2005.
3. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2007.
4. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. Т. 2. – М.: Издательство «Дрофа», 2004.