Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателей предлагается учебно-методическое пособие по курсу теории вероятностей и математической статистики. Данный курс опирается на курс высшей математики и служит основой для ряда дисциплин специализации экономистов – мировой экономики, микроэкономики, макроэкономики, экономической теории.

Издание предназначено для начального ознакомления с основами вероятностей и математической статистики и развития навыков решения практических задач. Структура изложения максимально приближена к структуре лекционных и практических занятий, в то же время объем теоретического материала достаточно краток. Поэтому данное пособие может одновременно играть роль опорного справочника и задачника. Оно предназначено, в первую очередь, студентам-заочникам экономических специальностей, хотя может быть использовано и студентами других специальностей.

При составлении учебно-методического пособия авторы руководствовались учебной программой по дисциплине «Высшая математика» для специальности 1-26 02 01 Бизнес-администрирование. В соответствии с ней, на изучение раздела «Теория вероятностей и элементы математической статистики» отводится 18 часов лекций и 18 часов практических занятий.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
Теория вероятностей			
1	Элементы комбинаторики. Размещения с повторениями и без повторений. Перестановки. Сочетания.	2	2
2	Вероятность. События и их вероятности. Основные аксиомы теории вероятностей. Классический и статистический подходы к определению вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей, условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса.	2	2
3	Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.	2	2
4	Случайные величины. Случайные величины и законы распределения. Дискретные и непрерывные случайные	2	2

№	**Название темы, перечень изучаемых вопросов**	ЛК	ПР
	величины. Числовые характеристики случайных величин. Функция распределения случайной величины. Основные законы распределения случайных величин. Биномиальное распределение. Геометрическое распределение. Закон Пуассона. Равномерное распределение. Показательное распределение. Нормальное распределение.		
5	Многомерные случайные величины. Двумерные дискретные случайные величины. Функция распределения двумерной случайной величины. Непрерывные двумерные случайные величины. Корреляция, коэффициент корреляции. Закон больших чисел. Неравенства Чебышева и Маркова. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.	2	2
Математическая статистика			
6	Вариационные ряды и их характеристики. Генеральная и выборочная совокупности. Выборки. Полигон, гистограмма частот и относительных частот. Числовые характеристики вариационных рядов. Эмпирический закон распределения.	2	2
7	Оценка параметров генеральной совокупности. Точечные оценки параметров. Метод моментов. Метод наименьших квадратов. Выборочный коэффициент корреляции.	2	2
8	Интервальные оценки параметров генеральной совокупности. Доверительные интервалы для параметров генеральной совокупности. Надежность.	2	2
9	Проверка статистических гипотез. Гипотезы. Критерии согласия. Критерий Пирсона. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.	2	2

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Предположим, что задано множество, содержащее конечное число элементов (студенты в группе, набор костей домино и т.д.) Такие множества будем называть *конечными* и обозначать $\{a,\ b,\ c,\ d\}$. Если каждому элементу конечного множества поставить в соответствие натуральное число, то такое упорядоченное множество будем называть *перестановкой*. Число перестановок из n-элементного множества вычисляется по формуле $P_n = n!$, где $n!$ – произведение чисел от 1 до n:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1. \tag{1.1}$$

Если имеется $n+k+s$ предметов и требуется разделить эти предметы на три группы так, чтобы в одной группе было n предметов, в другой k предметов, в третьей s предметов, то это задача на *перестановки с повторениями*. Число перестановок с повторениями находится по формуле: $P_{n+k+s(с\ повт)} = \dfrac{(n+k+s)!}{n!\cdot k!\cdot s!}$.

Размещением из n по k называется упорядоченное $\underline{k}$-элементное подмножество n-элементного множества. По смыслу определения ясно, что $0 \le k \le n$. Число размещений из n по k обозначается A_n^k и находится по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.2}$$

или $A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Размещение с повторениями из n элементов по k элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно, или не содержать его совсем. Число размещений с повторениями вычисляется по формуле: $A_{n(с\ повт)}^k = n^k$.

Сочетанием из n по k называется неупорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. По смыслу определения ясно, что $0 \le k \le n$. Число сочетаний из n по k обозначается C_n^k и находится по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \tag{1.3}$$

или $C_n^k = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}$.

Сочетание с повторениями из n элементов по k элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно, или не содержать его совсем. Число сочетаний с повторениями вычисляется по формуле: $C^k_{n(с\ повт)} = C^k_{n+k-1} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$.

1.1 Задачи.

1.1. Порядок выступления семи участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

<u>*Решение.*</u> Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, то есть является перестановкой из 7 элементов. Их число находим по формуле (1.1): $P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040$ вариантов.

1.2. Руководство фирмы выбирает из 5 кандидатов трех человек на одинаковые должности (все 5 кандидатов имеют равные шансы). Сколько всевозможных групп по три человека можно составить из 5 кандидатов?

<u>*Решение.*</u> Состав различных групп должен отличаться, по крайней мере, хотя бы одним кандидатом, следовательно, число всевозможных групп по три человека – это число сочетаний из 5 по 3. Находим по формуле (1.3): $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2!} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ групп.

1.3. В розыгрыше кубка страны по футболу берут участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?

<u>*Решение.*</u> Поскольку медали не равноценны, то, в отличие от предыдущей задачи, разные тройки победителей могут быть как различны по составу, так и одинаковы, но при этом отличаться порядком расположения команд. В связи с этим количество способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали среди команд будет равно числу размещений из 17-ти элементов по 3. Находим по формуле (1.2):

$$A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 15\cdot 16\cdot 17 = 4080\ ..$$

1.4. Сколькими способами можно выбрать трёх человек на 3 различные должности из 11 кандидатов на эти должности?

1.5. Из 20 спортсменов необходимо составить команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

1.6. В группе 22 студентов. Сколькими способами можно избрать 4 делегатов на профсоюзную конференцию?

1.7. Сколько прямых можно провести через 6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

1.8. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?

1.9. В группе детского сада 10 детей. Сколькими способами их можно поставить в колонну парами?

1.10. Сколькими способами можно переставить буквы слова «отлично»?

1.11. Сколько трехзначных чисел можно из множества цифр 3,4,5,6 а) без повторений; б) с повторениями?

1.12. Студенту необходимо сдать 3 экзамена на протяжении 6 дней. Сколькими способами это можно сделать?

1.13. Специалист ежедневно «посещает» 5 определенных сайтов в Интернете. Если порядок просмотра этих сайтов случаен, то сколько существует способов его осуществления?

1.14. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого восьмиугольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

1.15. Из скольких различных предметов можно составить 210 размещений по два элемента в каждом?

1.16. Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырех цифр от 0 до 9. Кода Вы не знаете. Найти наибольшее число безуспешных попыток для а) код не содержит одинаковых цифр; б) код содержит одинаковые цифры.

1.17. Из 9 человек формируется выборный орган, состоящий из начальника, его заместителя и трех членов. Сколькими способами возможно сформировать такой орган?

1.18. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «математика»?

1.19. Сколькими способами можно разместить 10 предметов в трех различных ящиках?

1.20. В стройотряде 20 студентов. Сколькими способами можно их можно разбить на три бригады численностью 5, 6 и 9 человек? Решите эту же задачу при условии, что в каждой бригаде назначается старший.

1.21. Группа из 28 студентов обменялась фотокарточками. Сколько было фотокарточек?

1.22. В команду должны быть отобраны 4 спортсмена из 10. Сколькими способами это можно сделать, если два определенных спортсмена должны войти в команду?

1.23. Сколькими способами можно 5 шариков разбросать по 6 лункам, если каждая лунка может уместить все 5 шариков?

1.24. В корзине 10 яблок, 12 груш и 15 слив. Сколькими способами могут разделить между собой эти фрукты двое ребят, так чтобы каждый из них получил не менее четырех фруктов каждого вида?

1.25. Аккорд – одновременное звучание двух и более нот. Сколько аккордов можно воспроизвести на семи нотах?

1.26. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, короля и ферзя) на первой линии шахматной доски?

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – это наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами – *случайностью* и *массовостью.*

Случайность означает, что результаты такого явления могут быть разными и их нельзя однозначно предсказать. *Массовость* означает, что это явление не уникальное, оно может повторяться достаточно много раз без изменения условий.

Испытанием (опытом) называется процедура, включающая определенные условия и удовлетворяющая двум требованиям: процедура может быть повторена достаточно большое число раз в неизмененных условиях; результаты этой процедуры при ее повторении могут меняться, и их нельзя однозначно предсказать.

Случайным событием (или просто *событием)* называется один из всевозможных результатов испытания. Обозначаются события большими латинскими буквами A, B, C.

2.1 Классификация событий

Наблюдаемые нами события можно разделить на достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. *Невозможным* называют событие, которое заведомо не произойдет. *Случайным* называют событие, которое может произойти, либо не произойти.

Несколько событий называются *несовместными* в данном опыте, если появление одного из них исключает появление других. В противном случае, они являются *совместными*. События называются *попарно несовместными,* если любые два их них несовместны.

Система событий образует *полную группу событий,* если они попарно несовместны и в результате опыта происходит одно и только одно из них.

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, которое состоит в том, что происходит либо событие A, либо событие B, либо оба события одновременно. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Разностью событий A и B называется событие $C = A \setminus B$, которое состоит в том, что происходит событие A, а событие B не происходит.

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, которое состоит в том, что события A и B происходят одновременно. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в их совместном появлении.

Противоположным событием к событию A называется событие, обозначаемое $\overline{A}$ и состоящее в том, что событие A не происходит.

2.2 Классическое определение вероятности

Возможные, исключающие друг друга, результаты одного испытания называются элементарными исходами испытания. Исход испытания называется благоприятствующими некоторому событию, если в результате этого исхода появляется указанное событие. Исходы называются *равновозможными*, если нет оснований считать один из них более или менее возможным, чем остальные.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных элементарных исходов испытания, образующих полную группу, то есть $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице ($P(A) = 1$);

2. Вероятность невозможного события равна нулю ($P(A) = 0$);

3. Вероятность случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей ($0 < P(A) < 1$).

Таким образом, вероятность любого события A удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

2.3 Относительная частота и статистическая вероятность

Классическое определение вероятности при переходе от простейших примеров к сложным задачам наталкивается на трудности принципиального характера. Во-первых, число элементарных исходов испытания не всегда конечно; во-вторых, очень часто невозможно представить результат в виде совокупности элементарных исходов; в-третьих, трудно указать основания, позволяющие считать элементарные исходы равновозможными. Поэтому используют статистическое определение вероятности.

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний m, в которых событие A появилось, к общему числу n фактически проведенных испытаний, то есть $w(A)=\dfrac{m}{n}$.

При однотипных массовых испытаниях во многих случаях наблюдается устойчивость относительной частоты события, которая состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число называется вероятностью события A в статистическом смысле.

2.4 Теоремы сложения и умножения вероятностей

<u>Теорема сложения вероятностей несовместных событий</u>. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2.1}$$

<u>Следствие 1.</u> Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)$.

<u>Следствие 2.</u> Если события A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

<u>Следствие 3.</u> Сумма вероятностей противоположных событий равна единице $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Вероятность события A, вычисляемая при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A|B)$.

Событие *A* называется *независимым* от события *B*, если вероятность события *A* не меняется в зависимости от того, произошло событие *B* или нет; то есть, $P(A|B) = P(A)$.

Несколько событий называются *независимыми в совокупности*, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое из них произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \qquad (2.2)$$

Следствие 1. Если событие *A* не зависит от события *B*, то и событие *B* не зависит от события *A*.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.3)$$

Для нескольких независимых в совокупности событий вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.4)$$

2.5 Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть событие *A* может произойти в результате осуществления одного из событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу ($P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$). События этой группы обычно называют *гипотезами*. Тогда вероятность этого события находится по формуле *полной вероятности*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A|H_n). \qquad (2.5)$$

Пусть событие *A*, которое могло наступить только вместе с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, в результате испытания произошло. Вероятность того, что при этом произошла гипотеза H_i, находится по *формуле Байеса* (формуле гипотез):

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + ... + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}. \qquad (2.6)$$

2.6 Задачи

2.1. Из 20 лотерейных билетов выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 7 билетов будет 2 выигрышных?

<u>Решение.</u> Элементарным исходом является любая выборка 7 билетов из 20. Число всех таких исходов равно числу сочетаний из 20 по 7 или C_{20}^{7}. Нас интересует событие *A*, состоящее в том, что 2 из 7 билетов – выигрышные. Благоприятным исходом для события *A* являются любые 7 билетов, из которых 2 выигрышных и 5 – проигрышных. Такого рода групп по 7 билетов имеется $C_4^2 \cdot C_{16}^5$ (так как C_4^2 – число всевозможных пар выигрышных билетов, а C_{16}^5 – число всевозможных пятёрок невыигрышных билетов, и каждая пара выигрышных билетов может оказаться в одной группе с каждой пятёркой проигрышных билетов).

Таким образом,

$$P(A)=\frac{C_4^2\cdot C_{16}^5}{C_{20}^7}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot\frac{16!}{5!\cdot(16-5)!}}{\frac{20!}{7!\cdot(20-7)!}}=\frac{\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{546}{1615}.$$

2.2. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,9, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества.

<u>Решение.</u> Обозначим буквами все события, которые могут произойти. Пусть событие A состоит в том, что все взятые детали высшего качества; событие B состоит в том, что только две из взятых деталей высшего качества; событие C состоит в том, что из взятых деталей хотя бы одна высшего качества. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – деталь, взятая с первого автомата, будет высшего качества, H_2 – деталь, взятая со второго автомата, будет высшего качества, H_3 – деталь, взятая с третьего автомата, будет высшего качества. Из условий задачи находим

$$P(H_1)=0{,}9,\ P(\bar{H}_1)=1-0{,}9=0{,}1,$$
$$P(H_2)=0{,}7,\ P(\bar{H}_2)=1-0{,}7=0{,}3,$$
$$P(H_3)=0{,}6,\ P(\bar{H}_3)=1-0{,}6=0{,}4.$$

а) Событие A состоит в том, что все три взятые детали высшего качества. Тогда – $A=H_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все эти три гипотезы – независимые события (независимые в совокупности, так как вероятность любого из событий H_i не меняется при наступлении любой из двух других гипотез или обеих вместе). Тогда вероятность события A найдем по формуле (2.3):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=0{,}9\cdot0{,}7\cdot0{,}6=0{,}378.$$

б) Событие B равно сумме трех событий. Первое событие: детали с первого и второго автоматов – высшего качества, а с третьего – нет ($H_1 \cdot H_2 \cdot \bar{H}_3$). Второе событие: детали с первого и третьего автоматов – высшего качества, а со второго – нет ($H_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot H_3$). Третье событие: детали со второго и третьего автоматов – высшего качества, а с первого – нет ($\bar{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3$). Таким образом, $B = H_1 \cdot H_2 \cdot \bar{H}_3 + H_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot H_3 + \bar{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3$.

Все три слагаемых – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Так как гипотезы – независимые в совокупности события, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события B найдем по формулам (2.1) и (2.3):

$$P(B) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(\bar{H}_3) + P(H_1) \cdot P(\bar{H}_2) \cdot P(H_3) + P(\bar{H}_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) =$$
$$= 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,252 + 0,162 + 0,042 = 0,456\,.$$

в) Событие C противоположно событию, которое состоит в том, что ни одна из взятых деталей не будет высшего качества. Тогда – $\bar{C} = \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot \bar{H}_3$. Все эти три гипотезы – независимые в совокупности события и вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события C равна

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{H}_1) \cdot P(\bar{H}_2) \cdot P(\bar{H}_3) =$$
$$= 1 - 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 1 - 0,012 = 0,988\,.$$

2.3. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях из первой группы выделено 5 студентов, из второй – 8, из третьей – 6 студентов. Вероятности попадания для студента каждой группы в сборную университета соответственно равны 0,6, 0,3 и 0,1. Какова вероятность того, что наудачу выбранный участник соревнований попадёт в сборную? К какой из трех групп он вероятнее всего принадлежит?

<u>*Решение.*</u> Пусть событие A – наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную. Введем гипотезы: H_1 – студент из первой группы, H_2 – студент из второй группы, H_3 – студент из третьей группы. Общее количество участников $5+8+7=20$. Очевидно, что

$$P(H_1) = \frac{5}{20},\ P(H_2) = \frac{8}{20},\ P(H_3) = \frac{6}{20}.$$

Условные вероятности при этом будут равны

$$P(A\,|\,H_1) = 0,6\,,\ P(A\,|\,H_2) = 0,3\,,\ P(A\,|\,H_3) = 0,1\,.$$

Тогда по формуле полной вероятности (2.5) имеем

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+P(H_3)\cdot P(A|H_3)=$$
$$=\frac{5}{20}\cdot 0,6+\frac{8}{20}\cdot 0,3+\frac{6}{20}\cdot 0,1=\frac{3}{20}+\frac{2,4}{20}+\frac{0,6}{20}=\frac{6}{20}=0,3$$

Итак, вероятность того, что случайно выбранный участник соревнований войдет в сборную университета, равна 0,3.

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Пусть стало известно, что случайно выбранный студент попал в сборную университета, то есть событие A произошло. При этом условии рассмотрим вероятности осуществления каждой гипотезы. Воспользовавшись формулами Байеса (2.6) для каждой из гипотез, находим

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{20}\cdot 0,6}{0,3}=0,5,$$

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{20}\cdot 0,3}{0,3}=0,4,$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{20}\cdot 0,1}{0,3}=0,1.$$

Так как наибольшая вероятность получилась для гипотезы H_1, то вероятнее всего, что попал в сборную студент из первой группы.

2.4. На пяти одинаковых карточках напечатаны буквы Б, Р, С, Е, Т. Карточки положены буквами вниз и перемешаны. После чего извлекаются по одной, переворачиваются и кладутся слева направо. Какова вероятность, что Вы прочтете название города?

2.5. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 125 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней а) одну, б) две, в) три.

2.6. При стрельбе относительная частота попаданий оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

2.7. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 30. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

2.8. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2.9. В ящике из 12 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 деталей 4 стандартных.

2.10. Восемь различных книг расставляются рядом на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

2.11. Автобус должен сделать 6 остановок. Найти вероятность того, что никакие два пассажира из четырех, едущих в автобусе, не выйдут на одной и той же остановке.

2.12. В круг вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круге, окажется внутри треугольника?

2.13. Внутри круга радиуса 15 см проведена окружность радиусом 10 см. Найти вероятность того, что точка, взятая наудачу внутри большого круга, окажется лежащей вне малого круга.

2.14. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи друзей, если моменты их прихода в указанном промежутке времени равновозможны.

2.15. В магазин поступило 20 телевизоров, из которых четыре имеют скрытые дефекты. Наудачу отбираются 2 телевизора для проверки. Какова вероятность того, что оба они не имеют дефектов?

2.16. Вероятность безотказной работы двух независимо работающих сигнализаторов равна 0,4 и 0,7. Найти вероятность того, что сработают: а) оба сигнализатора, б) хотя бы один сигнализатор.

2.17. Изделия проверяются на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно.

2.18. Партия товара, состоящая из 20 ящиков, подлежит приемке, если при проверке наугад двух выбранных ящиков окажется, что содержащиеся в них изделия удовлетворяют стандарту. Найти вероятность приемки партии, содержащей в 6 ящиках нестандартные изделия.

2.19. В группе специалистов 4 экономиста и 6 юристов. Для проведения проверки работы фирмы наудачу отбираются 4 специалиста. Какова вероятность того, что эта группа состоит из двух юристов и двух экономистов?

2.20. В партии деталей 18 стандартных изделий и 4 нестандартных. Пять деталей, выбранных наудачу, проверяют на соответствие стандарту. Найти вероятность того, что среди них не окажется нестандартных.

2.21. В экзаменационном билете три вопроса, Вероятность ответа на первый вопрос – 0,9; на второй – 0,7; на третий – 0,5. Студент получает положительную оценку, если отвечает не менее, чем на два вопроса. Найти вероятность этого события.

2.22. Студент знает 26 вопросов из 30-ти. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

2.23. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

2.24. Вероятности поражении цели первым стрелком равна 0,8, вторым 0,6. Найти вероятности следующих событий: а) цель поражена двумя попаданиями; б) одним выстрелом; в) цель не поражена.

2.25. В урне находится 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором черный и при третьем - синий.

2.26. В урне 7 белых и 9 красных шаров. Из урны наугад вынимают три шара. Найдите вероятность, что среди них: а) два белых и один красный; б) все белые; в) все красные; г) два красных и один белый.

2.27. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,06, на втором – 0,02. Производительность первого автомата втрое больше, чем второго. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна; б) деталь, взятая с конвейера, изготовлена на первом автомате, если она оказалась нестандартной.

2.28. Три хлебокомбината города производят продукцию в пропорции 2:3:5. Первый хлебокомбинат производит 30% продукции высшего качества, второй – 40%, третий – 60%. Найти вероятность того, что: а) приобретенное хлебобулочное изделие оказалось высшего качества; б) приобретенное изделие изготовлено на втором хлебокомбинате, если оно оказался высшего качества.

2.29. В группе 22 студента: 4 отличника, 12 хорошистов, остальные - троечники. Вероятность получения оценки "восемь", "девять" или "десять" на экзамене по математике для первых – 0,95, для вторых – 0,7, для третьих – 0,3. Какова вероятность того, что: а) наудачу выбранный студент получил на экзамене оценку не ниже восьми; б) студент, получивший восемь или выше, является хорошистом.

2.30. В торговое предприятие поступают однотипные изделия с трех фирм-производителей: 30% с первой, 50% со второй, 20% с третьей. Среди изделий первой фирмы 80% первосортных, второй – 90%, третья фирма изготавливает 70% первосортных изделий. Куплено одно изделие. Найти вероятность того, что: а) оно первосортное; б) купленное изделие изготовлено третьей фирмой, если оно оказалось не первосортным.

2.31. В урне 7 белых и 3 красных шара. Из урны удаляются два шара, о цвете которых неизвестно. После этого из урны извлекается один шар, найти вероятность того, что этот шар красный.

3. СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Пусть проводится серия из n испытаний, в результате каждого из которых событие A может произойти или не произойти. Предполагаем, что вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то есть не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний. Такая серия испытаний называется последовательностью независимых испытаний или схемой Бернулли. Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеется лишь два исхода:

1) событие A произойдет с вероятностью $P(A)=p$;

2) событие A не произойдет с вероятностью $P(\overline{A})=1-p=q$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в серии из n испытаний в схеме Бернулли событие A наступит ровно k раз, выражается формулой Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\text{, где } C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}. \tag{3.1}$$

При большом числе испытаний n применение формулы Бернулли сопряжено с очень громоздкими вычислениями. В этом случае, как правило, используют так называемые асимптотические формулы, дающие при больших значениях n сколь угодно малую погрешность. На практике чаще всего пользуются формулами (теоремами) Муавра-Лапласа и Пуассона.

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень малы, то вероятность $P_n(k)$ можно приближенно находить по *локальной формуле (теореме) Муавра-Лапласа*

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (3.2)$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

Конкретные значения функции Гаусса можно брать из специальной таблицы (см. приложение 1). При этом следует помнить, что функция Гаусса четная, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Кроме того, при $|x| \geq 4$ можно полагать $\varphi(x) = 0$.

В тех случаях, когда при достаточно большом *n* необходимо вычислить вероятность появления события *A* не менее m_1 раз и не более m_2 раз $P_n(m_1 \leq k \leq m_2)$, то эту вероятность можно приближенно находить по *интегральной формуле (теореме) Муавра-Лапласа*

$$P_n(m_1 \leq k \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.3)$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – нормированная функция Лапласа. Конкретные значения нормированной функции Лапласа берутся из специальной таблицы (см. приложение 2). При этом следует учитывать, что функция $\Phi(x)$ нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Кроме того, можно полагать $\Phi(x) = 0{,}5$ при $x \geq 4$ и $\Phi(x) = -0{,}5$ при $x \leq -4$.

Если число испытаний *n* «достаточно велико» ($n \geq 50$), а вероятность *p* «достаточно мала» ($p \leq 0{,}1$), причем их произведение *np* «не мало и не велико» ($0{,}1 \leq np \leq 10$), то вероятность $P_n(k)$ можно приближенно находить по *формуле (теореме) Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (3.4)$$

где $\lambda = np$.

3.1 Задачи

3.1. В магазин входят четверо покупателей. По оценкам менеджера вероятность того, что покупатель приобретет какой-либо товар, равна 0,4. Чему равна вероятность, что ни один из посетителей ничего не купит? Только один из посетителей купит что-либо? Двое посетителей купят какой-либо товар? Три посетителя купят товар? Все совершат покупки?

<u>Решение.</u> Эта задача описывает последовательность четырёх независимых испытаний, в каждом из которых покупатель либо делает покупку (успех) с вероятностью $p = 0{,}4$ или нет (неудача) с вероятностью

$q = 1 - 0,4 = 0,6$. Так как число испытаний невелико, то для нахождения искомых вероятностей можем применить формулу Бернулли (3.1). Тогда вероятность того, что ни один из посетителей ничего не купит, равна $P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,6^4 = 0,1296$. Вероятность того, что только один из посетителей купит что-либо, равна

$$P_4(1) = C_4^1 p^1 q^{4-1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} \cdot 0,4 \cdot 0,6^3 = 0,3456.$$

Вероятность того, что ровно два посетителя купят какой-либо товар

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 = 0,3456.$$

Вероятность того, что ровно три посетителя купят товар равна

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 = 0,1536.$$

Вероятность того, что все четверо совершат покупки равна

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 1 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^0 = 0,0256.$$

3.2. Согласно социологическому опросу 40 из 100 семей пользуются личными автомобилями. Какова вероятность того, что из 800 семей ровно 300 пользуются личными автомобилями?

<u>*Решение.*</u> Согласно условию задачи имеем $n = 800$, $k = 300$ и $p = 0,4$. Теоретически эту задачу можно решить по формуле Бернулли, но вычисления будут достаточно затруднительны. Поэтому применим локальную теорему Муавра-Лапласа. Так как $npq = 800 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,4) = 192$ и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 800 \cdot 0,4}{\sqrt{192}} = \frac{-20}{13,86} = -1,44$, то по таблице в приложении 1 находим $\varphi(-1,44) = \varphi(1,44) = 0,1415$. Таким образом, по формуле (3.2) получаем $P_{800}(300) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,1415}{13,86} = 0,0102$.

3.3. В партии из 600 единиц продукции каждая единица оказывается испорченной с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что количество испорченных единиц продукции находится в пределах от 20 до 50 включительно.

<u>*Решение.*</u> По условию имеем $n = 600$, $m_1 = 20$, $m_2 = 50$ и $p = 0,05$. Для нахождения искомой вероятности воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Так как $npq = 600 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 28,5$,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 600 \cdot 0,05}{\sqrt{28,5}} \approx -1,87,\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 600 \cdot 0,05}{\sqrt{28,5}} \approx 3,75,$$

то по таблице в приложении 2 находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,87) = -\Phi(1,87) = -0,4693,\ \Phi(x_2) = \Phi(3,75) = 0,4999.$$

Таким образом, по формуле (3.3) получаем

$$P_n(20 \le k \le 50) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,4999 - (-0,4693) = 0,9692.$$

3.4. В банк поступило 100000 купюр. Какова вероятность, что среди них окажется четыре фальшивых, если в среднем 0,006% купюр бывают фальшивые.

Решение. Эта задача может быть описана последовательностью 100000 независимых испытаний, в каждом из которых проверяемая купюра оказывается фальшивой с вероятностью $p = 0,00006$ или настоящей с вероятностью $q = 0,99994$. Так как $n = 100000$ достаточно велико, вероятность p достаточно мала и $\lambda = n \cdot p = 100000 \cdot 0,00006 = 6$, то можно приближенно вычислить искомое значение вероятности при $k = 4$ используя формулу Пуассона (3.4):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} \approx 0,1339.$$

3.5. Вероятность сбоя в работе компьютера в одном сеансе работы равна 0,1. Найти вероятность двух сбоев в шести сеансах работы.

3.6. Что вероятнее выиграть у равносильного соперника (ничьи исключены): три партии из четырех или пять партий из восьми?

3.7. Известно, что в данном селе 90 % семей имеют телевизоры. Найти вероятность того, что среди 8 случайно отобранных семей 2 окажутся без телевизора.

3.8. В квартире 6 электролампочек. Вероятность работы лампочки в течение года равна 0,85. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее половины лампочек?

3.9. Фирма выпускает изделия, из которых 70% высшего качества. Какова вероятность при отборе 100 изделий обнаружить ровно 20 изделий высшего качества?

3.10. Хлебокомбинат выпускает 90% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 400 изделий хлебокомбината первосортных окажется не менее 360?

3.11. Рекламное агентство гарантирует, что в некоей лотерее 2% билетов выигрышные. Вы приобрели 100 лотерейных билетов. Что вероятнее, что четыре билета окажутся выигрышными или выигрышных не будет ни одного.

3.12. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,2. Найти вероятность того, что в 400 испытаниях событие наступит от 50 до 80 раз.

3.13. Всхожесть семян новой культуры 75%. На опытном участке посеяли 500 семян. Найти вероятность того, что прорастут от 400 до 450 семян.

3.14. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0.4. произведено 400 испытаний. Найти вероятность того, что событие A наступит не менее 190 и не более 215 раз.

3.15. Типография гарантирует вероятность брака переплета книг 0,0001. Книга издана тиражом 20000 экземпляров. Какова вероятность того, что в этом тираже только одна книга имеет брак переплета?

3.16. Найти такое число k, чтобы с вероятность 0,9 можно было утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.

4. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА.

4.1 Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайной величиной (СВ) называют величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно какое именно.

Случайная величина называется *дискретной* (ДСВ), если множество её возможных значений конечно или счётно (то есть его элементы могут быть перенумерованы натуральными числами). Случайную величину называют *непрерывной* (НСВ), если она может принимать любые значения из некоторого промежутка (конечного или бесконечного). Вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное x_i, обозначают $P(X = x_i) = p_i$.

Чтобы получить полное представление о данной случайной величине, недостаточно знать, какие значения она принимает. Нужно знать и насколько часто они принимаются этой величиной в результате испытаний. Для этого используют понятие закона распределения. *Законом распределения* случайной величины называется соответствие между ее возможными значениями и вероятностями, с которыми эти значения принимаются.

Простейшей формой задания этого закона для дискретных случайных величин является таблица, первая строка которой содержит все возможные значения случайной величины, а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Отметим, что значения x_1, x_2, ..., x_n записываются, как правило, в порядке возрастания, а сумма всех вероятностей $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ для любой ДСВ. Графически ряд распределения изображается в виде многоугольника (полигона) распределения (ломаная, соединяющая точки, абсциссы которых равны значению СВ, а ординаты – соответствующей вероятности).

4.2 Функция распределения.

Одним из наиболее употребительных способов задания закона распределения является функция распределения. *Функцией распределения* СВ X называется функция $F(x)$, которая для любого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ равна вероятности события $\{X < x\}$, то есть $F(x) = P(X < x)$. Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ – неубывающая на $\mathbb{R}$ функция;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке $x \in \mathbb{R}$;
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Всякая функция $F(x)$, обладающая свойствами 1 – 4, является функцией распределения некоторой СВ X.

Используя понятие функции распределения можно дать другое, более строгое, определение НСВ X. Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

В отличие от ДСВ вероятность принять конкретное значение для НСВ равна нулю. Поэтому для НСВ X верны равенства

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Для НСВ существует еще один (помимо функции распределения $F(x)$) удобный способ задать закон распределения – с помощью *плотности распределения вероятностей*.

Пусть функция распределения $F(x)$ некоторой НСВ X дифференцируема почти всюду, то есть во всех точках $x \in \mathbb{R}$, за исключением, возможно, конечного их числа. Тогда почти всюду существует производная функции $F(x)$, которая и называется *плотностью* *распределения* НСВ X. Плотность распределения НСВ X обозначают через $f(x)$. Таким образом, $f(x) = F'(x)$. Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
3. $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$;
4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$;
5. $P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

4.3 Основные числовые характеристики случайных величин

При решении задач теории вероятностей зачастую необязательно иметь полную информацию о законе распределения случайной величины, а нужно лишь знать некоторые числовые характеристики этой величины. Важнейшими среди них являются так называемые характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана) и характеристики рассеяния (дисперсия, среднеквадратичное отклонение). Характеристики положения указывают на тот ли иной «центр» распределения СВ (среднее ожидаемое значение, наиболее ожидаемое значение). Характеристики рассеяния определяют вариабельность (то есть изменчивость) СВ: чем больше вариация, тем дальше от средней находятся возможные значения СВ. Если сравнивать по некоторой характеристике рассеяния, например дисперсии, несколько СВ, то та СВ, у которой дисперсия наибольшая, и будет наиболее вариабельной. Например, если сравниваются несколько типов инвестиций с одинаковой ожидаемой средней возврата, то инвестиции с большей дисперсией считаются более рискованными.

Математическим ожиданием $M(X)$ ДСВ X называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{4.1}$$

Математическое ожидание НСВ X с плотностью $f(x)$ определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \,. \tag{4.2}$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ X от ее математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2. \tag{4.3}$$

Чаще дисперсию вычисляют по другой формуле:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X). \tag{4.4}$$

В случае ДСВ дисперсия определяется формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2. \tag{4.5}$$

Если X – НСВ с плотностью $f(x)$, то дисперсия равна

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(X)\right)^2. \tag{4.6}$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется число, равное квадратному корню из дисперсии, то есть

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{4.7}$$

Модой $M_0(X)$ ДСВ X является наиболее вероятное ее значение. *Модой* НСВ X с плотностью $f(x)$ является то значение x, при котором функция $f(x)$ достигает максимума.

Медианой $M_l(X)$ СВ X является такое ее значение x_l, для которого равновероятно, окажется ли X меньше или больше x, то есть

$$P(X > x_l) = P(X < x_l) = \frac{1}{2}.$$

4.4 Основные законы распределения случайных величин

Биномиальное распределение. Дискретная случайная величина X имеет биноминальное распределение, если возможные значения этой случайной величины 0, 1, 2, … , n, а вероятность каждого из значений определяется по формуле Бернулли (3.1).

Числовые характеристики биноминального распределения:

$$M(X) = np;\ D(X) = npq;\ \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Распределение Пуассона. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона, если её возможные значения 0, 1, 2, … , k, …, а вероятность каждого из значений определяется по формуле Пуассона (3.4).

Потоком событий называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Интенсивность потока – среднее число событий m, появляющихся в единицу времени. Случайная величина *X* – число событий простейшего потока, произошедших в течении промежутка времени *t*, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = mt$.

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$M(X) = \lambda;\ D(X) = \lambda;\ \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Равномерное распределение. Непрерывная случайная величина *X* имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, если её плотность распределения вероятности на этом отрезке постоянна.

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2};\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Показательное распределение. Непрерывная случайная величина *X*, которая принимает только неотрицательные значения, имеет показательное распределение, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если} \quad t \geq 0; \end{cases} \tag{4.8}$$

где λ – параметр показательного распределения.

Функция распределения

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{если} \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Если T – время безотказной работы механизма, то функция $R(T) = P(T > t)$ *описывает вероятность безотказной работы механизма за время t. Эта функция называется функцией надежности*:

$$R(T) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda \cdot t}, \text{ если } t > 0. \tag{4.10}$$

Нормальное распределение. Это распределение широко применяется в теории вероятностей и математической статистике, так как многие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

Непрерывная случайная величина *X* распределена по нормальному закону с параметрами *a* и σ, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4.11)$$

Функция нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (4.12)$$

Вероятностный смысл параметров: a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение. Тогда числовые характеристики нормального распределения:

$$M(X)=a;\ D(X)=\sigma^2;\ \sigma(X)=\sigma.$$

Вероятность попадания на интервал:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right);$$

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Нормированным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$. Функция плотности распределения вероятностей стандартного распределения имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (4.13)$$

Функция Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (4.14)$$

4.5 Задачи

4.1. В магазин входят четверо покупателей. По оценкам менеджера вероятность того, что покупатель приобретет какой-либо товар, равна 0,4. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа покупателей купивших товар. Найдите её функцию распределения $F(x)$. Вычислите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

<u>*Решение.*</u> Случайная величина X – число покупателей, совершивших покупки. Она может принимать пять значений: 0, 1, 2, 3 и 4. Вероятность того, что ни один покупатель не сделает покупки, найдем по формуле Бернулли (3.1): $P(X=0)=P_4(0)=C_4^0p^0q^{4-0}=1\cdot0,4^0\cdot0,6^4=0,6^4=0,1296$.

Вероятности остальных событий были найдены в задаче 3.1:

$$P(X=1)=P_4(1)=0,3456,$$

$$P(X=2)=P_4(2)=0{,}3456,$$
$$P(X=3)=P_4(3)=0{,}1536,$$
$$P(X=3)=P_4(4)=0{,}0256.$$

Запишем закон распределения случайной величины:

X	0	1	2	3	4
P	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

После проверки видим, что сумма всех вероятностей равна единице.

Для удобства часть дальнейших вычислений проведём в таблице.

Таблица 4.1

x_i	0	1	2	3	4	Сумма
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256	1
$P(X<x)$	0,1296	0,4752	0,8208	0,9744	1	–
$x_i p_i$	0	0,3456	0,6912	0,4608	0,1024	1,6
$x_i^2 p_i$	0	0,3456	1,3824	1,3824	0,4096	3,52

Значения функции распределения $F(x)=P(X<x)$ посчитаем в третьей строке: 0,1296; $0{,}1296+0{,}3456=0{,}4752$; $0{,}4752+0{,}3456=0{,}8208$; $0{,}8208+0{,}1536=0{,}9744$; $0{,}9744+0{,}0256=1$. Тогда имеем:

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 0;\\ 0{,}1296\ , & 0<x\le 1;\\ 0{,}4752\ , & 1<x\le 2;\\ 0{,}8208\ , & 2<x\le 3;\\ 0{,}9744\ , & 3<x\le 4;\\ 1\ , & x>4.\end{cases}$$

По четвертой и пятой строкам вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=1{,}6;\ D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\left(M(X)\right)^2=3{,}52-1{,}6^2=0{,}96;$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}96}=0{,}9798.$$

4.2. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если}\quad x<0;\\ \dfrac{1}{33}(2x^2+5x), & \textit{если}\quad 0\le x\le 3;\\ 1, & \textit{если}\quad x>3.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок [1;2].

Решение. Так как $f(x)=F'(x)$, то плотность распределения вероятностей нашей случайной величины имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0; \\ \dfrac{1}{33}(4x+5), & \text{если} \quad 0\le x\le 3; \\ 0, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$$

Математическое ожидание СВ найдём по формуле (4.2):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x\cdot\frac{1}{33}(4x+5)dx+\int_{3}^{+\infty} x\cdot 0dx=\frac{1}{33}\int_{0}^{3}(4x^2+5x)dx=$$

$$=\frac{1}{33}\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{33}\left(\left(\frac{4}{3}\cdot 3^3+\frac{5}{2}\cdot 3^2\right)-\left(\frac{4}{3}\cdot 0^3+\frac{5}{2}\cdot 0^2\right)\right)=\frac{58{,}5}{33}\approx 1{,}773.$$

Как и в случае дискретной случайной величины, дисперсию будем искать по формуле (4.4):

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x^2\cdot\frac{1}{33}(4x+5)dx+\int_{3}^{+\infty} x^2\cdot 0dx=\frac{1}{33}\int_{0}^{3}(4x^3+5x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{33}\left(x^4+\frac{5}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{33}\left(\left(3^4+\frac{5}{3}\cdot 3^3\right)-\left(0^4+\frac{5}{3}\cdot 0^3\right)\right)=\frac{126}{33}\approx 3{,}818.$$

Дисперсия равна $D(X)=3{,}818-1{,}773^2\approx 0{,}674$.

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}674}\approx 0{,}821.$$

Найдем вероятность попадания СВ X на отрезок [1;2]:

$$P(X\in[1;2])=P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1)=$$

$$=\frac{1}{33}(2\cdot 2^2+5\cdot 2)-\frac{1}{33}(2\cdot 1^2+5\cdot 1)=\frac{1}{33}(18-7)=\frac{1}{3}.$$

4.3. Случайная величина T подчиняется показательному закону распределения с известным параметром $\lambda=4{,}1$. Записать функцию распределения $F(t)$, плотность вероятности $f(t)$, функцию надежности $R(t)$, где t – время. Найти числовые характеристики этого распределения $M(T)$, $D(T)$ и $\sigma(T)$. Определить, что вероятнее:

$$T(t)\in(1{,}62;2{,}45) \text{ или } T(t)\in(2{,}31;5{,}07).$$

Решение. По формуле (4.7) при $\lambda=4{,}1$ имеем

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ 4{,}1e^{-4{,}1 \cdot t}, & \text{если} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Интегральная функция распределения имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0; \\ 1 - e^{-4{,}1 \cdot t}, & \text{если} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Построим графики функций $f(t)$ и $F(t)$:

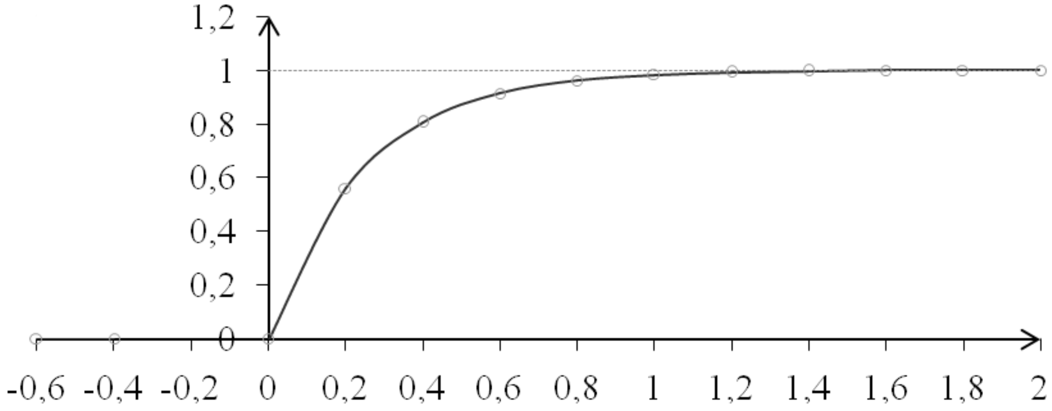

Рис. 4.1 Интегральная функция распределения $F(t)$

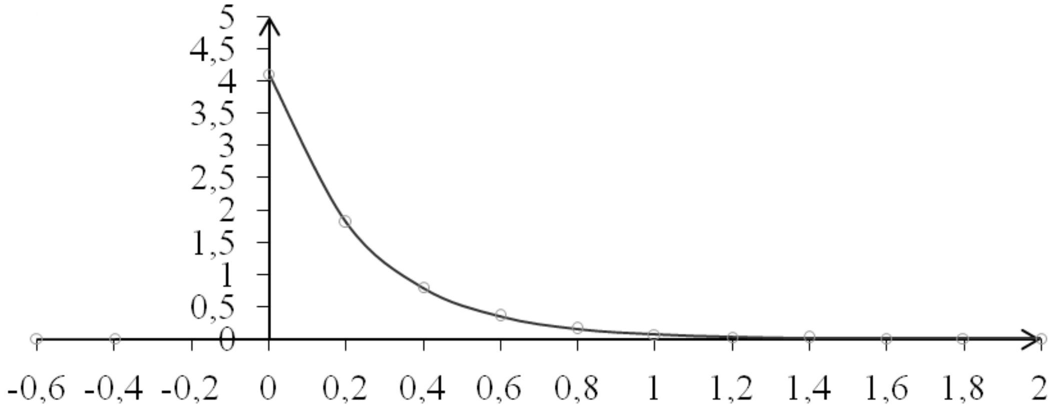

Рис. 4.2 Плотность распределения вероятностей $f(t)$

Определим функцию надежности: $R(T) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-4,1 \cdot t}$, если $t > 0$.

Находим числовые характеристики показательного распределения:

$$M(T) = \frac{1}{4,1} \approx 0,244; \; D(T) = \frac{1}{4,1^2} \approx 0,0595; \; \sigma(T) = \frac{1}{4,1} \approx 0,244.$$

Вероятность попадания случайной величины T в интервал $(a;b)$ *определяется по формуле*

$$P(a < T < b) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-4,1 \cdot b}) - (1 - e^{-4,1 \cdot a}) = e^{-4,1 \cdot a} - e^{-4,1 \cdot b}.$$

Вычислим вероятности попадания в интервалы $(1,62; 2,45)$ и $(2,31; 5,07)$ и сравним полученные числа:

$$P(1,62 < T < 2,45) = e^{-4,1 \cdot 1,62} - e^{-4,1 \cdot 2,45} = e^{-6,642} - e^{-10,045} \approx$$
$$\approx 0,0013044 - 0,0000434 = 0,0012610;$$

$$P(2,31 < T < 5,07) = e^{-4,1 \cdot 2,31} - e^{-4,1 \cdot 5,07} = e^{-9,471} - e^{-20,787} \approx$$
$$\approx 0,0000771 - 10^{-9} \approx 0,0000771.$$

Таким образом, вероятнее, что случайная величина *T* принадлежит первому интервалу.

4.4. В магазине организована лотерея. Разыгрываются два компьютера стоимостью 800000 руб. и один стоимостью 1800000 руб. Составить закон распределения СВ *X* – суммы чистого выигрыша для того, кто приобрел один билет за 10000 руб., если всего продано 1000 билетов.

4.5. Подбрасываются две игральные кости. Пусть СВ *X* – произведение очков, выпадающих на их верхних гранях. Составьте закон распределения СВ *X*.

4.6. Стрелок, имея 5 патронов, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Построить закон распределения числа использованных патронов, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, найти $P(2 < x < 5)$.

4.7. Дискретная случайная величина *X* задана рядом распределения

x_i	–2	–1	1	3
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график. Определите вероятности событий $A = \{X < 0\}$, $B = \{-1 < X < 4\}$, $C = \{1 < X < 3\}$, $D = \{X > 2\}$.

4.8. Трое студентов пришли сдавать коллоквиум по теории вероятностей. Вероятность сдачи коллоквиума для каждого студента одинакова и равна 0.6. Составьте закон распределения СВ X – числа студентов, сдавших коллоквиум. Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте ее график. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4.9. Трое квалифицированных рабочих обратились за помощью в поисках работы в службу занятости. Вероятности того, что каждый их них в течение месяца получит предложение с подходящей работой, соответственно равны 0,5, 0,5 и 0,75. Составьте закон распределения числа рабочих, получивших работу в течение месяца. Найдите функцию распределения и постройте ее график. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4.10. Задана функция распределения непрерывной СВ X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \alpha x^2, & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найдите: коэффициент α; плотность распределения $f(x)$ СВ X; вероятность попадания СВ X в отрезок [2;4]; вероятность того, что при двух независимых испытаниях СВ X примет значение большее 2 хотя бы один раз; математическое ожидание и дисперсию.

4.11. Найдите значения параметров α и β, при которых функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \alpha x-\beta, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

будет функцией распределения некоторой непрерывной СВ X. Чему будет равна вероятность попадания этой СВ X в полуинтервал [1;2)? Найдите её моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

4.12. При каком значении параметра α функция

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \alpha/x^4, & x\ge 1.\end{cases}$$

будет плотностью распределения вероятностей некоторой непрерывной СВ X? Найдите функцию распределения СВ X, её математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, вероятность попадания этой СВ X в интервал (–1;2).

4.13. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M(X)=0,7$ и дисперсией $D(X)=3,24$. Записать плотность вероятности $f(x)$ и построить схематический график этой функции. Записать интервал практически наиболее вероятных значений случайной величины X. Что вероятнее: $X\in(-1;1)$ или $X\in(0;2)$?

4.14. Случайная величина T подчиняется показательному закону распределения с известным параметром $\lambda=3,6$. Записать функцию распределения $F(t)$, плотность вероятности $f(t)$, функцию надежности $R(t)$, где t – время. Найти числовые характеристики этого распределения $M(T)$, $D(T)$ и $\sigma(T)$. Определить, что вероятнее: $T(t)\in(1,54;2,65)$ или $T(t)\in(1,95;5,05)$.

4.15. Автобусы идут с интервалом в 7 минут. Предполагая, что время ожидания автобуса на остановке имеет равномерное распределение, найдите функцию распределения, плотность распределения вероятностей, вероятность того, что время ожидания не превысит 3 минут.

5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

5.1 Выборочный метод. Основные понятия. Группировка статистических данных

Одним из наиболее распространенных в статистике методов, применяющих несплошное наблюдение, является *выборочный метод*, при котором обобщающие показатели изучаемой совокупности устанавливаются по некоторой ее части на основе положений случайного отбора. При этом подлежащая изучению статистическая совокупность, из которой производится отбор части единиц, называется *генеральной совокупностью*. Отобранная из генеральной совокупности некоторая часть единиц, подвергающаяся обследованию, называется *выборочной совокупностью* или просто *выборкой*. *Объемом совокупности* называется число объектов, входящих в совокупность.

В результате статистического наблюдения получают сведения о каждой единице совокупности. Задача статистического исследования состоит в том, чтобы упорядочить и обобщить первичный материал, свести его в группы и на этой основе дать обобщающую характеристику совокупности. Этот этап называется *сводкой*.

Результаты сводки могут быть представлены в виде статистических рядов распределения. *Статистическим рядом распределения* называют упорядоченное распределение единиц совокупности. Статистический ряд, расположенный по возрастанию или убыванию вариант, называется *вариационным*. Чтобы решить ряд конкретных задач, выявить особенности в развитии явления, обнаружить тенденции, установить зависимости, необходимо произвести *группировку статистических данных*.

Для проведения группировки выделяют группировочный признак или основание группировки. В каждом конкретном случае при определении числа групп следует исходить не только из степени колеблемости признака, но еще учитывать и особенности объекта и цель исследования. Для определения оптимального числа групп можно использовать формулу Стерджесса: $k \approx 1 + 3{,}322 \cdot \lg n$, где n – объем выборки.

После определения числа групп следует определить интервалы группировки. Длину интервала определяют по формуле $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значения вариант в выборке, k – число групп. Началом первого интервала x_0 берут любое удобное значение из отрезка $\left[x_{\min} - 0{,}5 \cdot h; x_{\min}\right]$. Прибавляя последовательно h, получают границы остальных интервалов: $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$ и так далее. Прибавляют до тех пор, пока не перешагнут через $x_{\max}$. После этого строится ряд распределения. Для этого в первый столбец (или строку) таблицы заносят границы интервалов. Во второй столбец (или строку) таблицы заносят число вариант n_i, попадающих в данный интервал, – частоту: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Если частоты поделить на объем выборки, то в результате получим относительные частоты (частости): $w_i = n_i / n$ ($i = \overline{1,k}$).

5.2 Графическое изображение вариационного ряда. Эмпирическая функция распределения

Графически вариационный ряд изображается в виде полигона или гистограммы. *Полигоном частот* называют ломаную линию, состоящую из отрезков, соединяющих точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$,..., $(x_k; n_k)$ ($i = \overline{1,k}$).

Полигон для интервального ряда можно построить так же, как и для дискретного (в качестве вариант используются середины интервалов), но в этом случае чаще строят гистограмму. *Гистограммой частот* (частостей) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны плотности частоты n_i / h (плотности частости w_i / h). Гистограмма частостей является статистическим аналогом плотности распределения вероятностей генеральной совокупности.

Преобразованной формой вариационного ряда является *ряд накопленных частот*. Это ряд значений числа единиц совокупности с меньшими и равными нижней границе соответствующего интервала значениями признака. Такой ряд называется *кумулятивным.* Можно построить кумулятивное распределение "не меньше, чем", а можно "больше, чем". В первом случае график кумулятивного распределения называется *кумулятой,* во втором – *огивой*.

Эмпирической функцией распределения выборки называется функция $F^*(x)$, определяющая для всякого $x \in R$ относительную частоту события $X < x$, то есть $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки. Она является аналогом интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$ в теории вероятностей. Основные свойства функции $F^*(x)$:

1) значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$;

2) функция $F^*(x)$ – неубывающая;

3) $F^*(x) = 0$ при $x<x_{min}$ и $F^*(x) = 1$ при $x>x_{max}$.

5.3 Выборочные оценки параметров распределения

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичных тем, что в теории вероятностей определялись для СВ. Пусть $x_1, x_2,..., x_n$ – выборка из генеральной совокупности.

Размахом вариации называется абсолютная разность между максимальным и минимальным значениями признака $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Средним значением выборки или *выборочным средним* называется число $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ или, если даны частоты вариант, $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Среднее отклонение значений признака от средней арифметической величины равно нулю. *Выборочной дисперсией D_B* называют среднее арифметическое квадратов отклонений выборки от выборочной средней. Выборочную дисперсию находят по одной из формул:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}_B^2 \text{ или } D_B = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i = \overline{x^2} - \bar{x}_B^2,$$

где $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ – средний квадрат ($\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i$).

5.4 Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности

Пусть из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x;\theta)$ произведена выборка объема n. По её результатам можно найти приближенное значение $\overline{\theta}$ неизвестного параметра θ, которое и называется оценкой. Любой параметр $\overline{\theta}$, найденный по выборке, является подходящей оценкой параметра θ этой совокупности, если он удовлетворяет трем условиям:

1) $M(\overline{\theta})=\theta$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\overline{\theta}-\theta\right|<\varepsilon)=1$;

3) $D(\overline{\theta})$ – является минимальной.

Параметр $\overline{\theta}$, удовлетворяющий условиям 1)-3) называется соответственно *несмещенной*, *состоятельной* и *эффективной* оценкой параметра θ генеральной совокупности признака X.

Выборочное среднее $\overline{x}_B$ является несмещенной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия D_B является смещенной оценкой для дисперсии генеральной совокупности. В качестве несмещенной оценки принимается величина $s^2=\dfrac{n}{n-1}D_B$ – *исправленная выборочная дисперсия*; и $s=\sqrt{s^2}$ – *исправленное среднеквадратическое отклонение*.

Точечные оценки хороши для первоначальных результатов обработки, но могут значительно отличаться от оцениваемого параметра, то есть приводить к грубым ошибкам. Альтернативой им служат *интервальные оценки*, которые определяются двумя числами – концами интервала.

Доверительной вероятностью оценки называют вероятность γ выполнения неравенства $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\varepsilon$. Вероятность $\alpha=1-\gamma$ называется *уровнем значимости*. Чаще полагают $\gamma=1-\alpha$ = 0,95; 0,99; 0,9973.

Доверительным интервалом называется интервал $\left(\overline{\theta}-\varepsilon;\overline{\theta}+\varepsilon\right)$, накрывающий неизвестный параметр θ с заданной доверительной вероятностью γ.

Доверительный интервал для оценки $\overline{x}_Г$ – среднего генеральной совокупности (математического ожидания a), распределенной по нормальному закону с неизвестным среднеквадратическим отклонением σ определяется из неравенства $\overline{x}_B-t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}<\overline{x}_Г<\overline{x}_B+t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, где s –

исправленное среднее квадратическое отклонение, n – объем выборки, $\bar{x}_B$ – выборочная средняя, $t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ – квантиль распределения Стьюдента, соответствующий значению доверительной вероятности $\gamma = 1-\alpha$ и объему выборки n.

Доверительный интервал для оценки $\sigma_Г$ – среднего квадратического отклонения генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону с неизвестными параметрами, определяется из неравенства $s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}} < \sigma_Г < s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}}$, где $\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ и $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ соответственно являются квантилями уровней значимости $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{1-\alpha}{2}$ распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы (см. приложение 4).

5.5 Проверка гипотезы о законе распределения

Статистической гипотезой называют всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке. Процедура сопоставления гипотезы с данными выборки называется *проверкой гипотез*. Гипотезы делятся на две группы: о параметрах распределения известного вида (*параметрические*) и о виде неизвестного распределения (*непараметрические*).

При проверке выделяют две гипотезы: одна – основная (H_0); другая – альтернативная (H_1). Имея две гипотезы, на основании данных выборки либо принимают основную гипотезу, либо отклоняют её в пользу альтернативной. Правило, на основании которого гипотеза принимается или отклоняется, называется *статистическим критерием* проверки гипотезы.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения производится с помощью непараметрических критериев значимости. Наиболее распространенным критерием значимости для проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения генеральной совокупности является критерий согласия Пирсона (χ^2).Он позволяет производить проверку согласия эмпирической функции распределения с гипотетической функцией $F(x)$, принадлежащей к некоторому множеству функций определенного вида.

При проверке нулевой гипотезы с помощью критерия согласия χ^2 придерживаются следующей последовательности действий:

1) на основании гипотетической функции $F(x)$ вычисляют теоретические вероятности попадания СВ X в частичные интервалы

$$p_i = P(x_{i-1} \le X < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) \ (i = \overline{1,k}).$$

2) умножая полученные вероятности p_i на объем выборки n, получают теоретические частоты np_i частичных интервалов, то есть частоты, которые следует ожидать, если нулевая гипотеза справедлива;

3) вычисляют наблюдаемое значение выборочной статистики (критерия) χ^2:

$$\chi^2_{НАБЛ} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i};$$

4) по таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ находят критическое значение $\chi^2_{\alpha;\nu}$;

5) сравнивая наблюдаемое значение выборочной статистики $\chi^2_{НАБЛ}$ с критическим значением $\chi^2_{\alpha;\nu}$, принимают одно из двух решений:

если $\chi^2_{НАБЛ} \ge \chi^2_{\alpha;\nu}$, то нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативной, то есть считается, что гипотетическая функция не согласуется с опытными данными;

если $\chi^2_{НАБЛ} < \chi^2_{\alpha;\nu}$, то считается, что нет оснований для отклонения нулевой гипотезы.

Замечание. При применении критерия необходимо, чтобы в каждом частичном интервале было не менее 5 элементов. Если число элементов (частота) меньше 5, то рекомендуется объединять такие частичные интервалы с соседними.

5.6 Задачи

5.1. В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда. Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) Найти размах варьирования и разбить его на 9 интервалов;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки выборочное среднее, выборочную дисперсию;

д) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить её, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,025$;

е) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при надежности $\gamma = 0,9$.

20,7	19,2	20,2	21,4	22	20,1	19,5	18,2	22,8	22,7
23,3	21,4	22	20,3	23,2	19,9	20,2	21,5	19,5	19
22,1	19,3	22,5	21,5	19,6	20,5	22	20,3	23,6	23,5
20,3	22,9	19,7	18,4	21,7	18,9	19,3	21,6	20,5	22,6
18,2	21,6	20,7	21,6	23,3	20,8	22,3	20,8	20,4	18,5
21,7	21,1	19,8	19	20,7	21,1	20	23,2	22,2	21,5
21,9	23,1	19,8	20,7	21,3	20,2	21	20,4	20,8	18,6
18,3	21,3	21	21,1	22	20,7	22	19,1	23,6	22,7
21,3	19,1	20,9	22,7	18,7	21,7	22,5	20,1	22,6	19,6

Решение. а) Получим вариационный ряд, расположив значения признака в порядке возрастания:

18,2	19	19,6	20,2	20,7	21	21,4	21,7	22,3	22,9
18,2	19,1	19,7	20,2	20,7	21	21,5	21,9	22,5	23,1
18,3	19,1	19,8	20,3	20,7	21,1	21,5	22	22,5	23,2
18,4	19,2	19,8	20,3	20,7	21,1	21,5	22	22,6	23,2
18,5	19,3	19,9	20,3	20,7	21,1	21,6	22	22,6	23,3
18,6	19,3	20	20,4	20,8	21,3	21,6	22	22,7	23,3
18,7	19,5	20,1	20,4	20,8	21,3	21,6	22	22,7	23,5
18,9	19,5	20,1	20,5	20,8	21,3	21,7	22,1	22,7	23,6
19	19,6	20,2	20,5	20,9	21,4	21,7	22,2	22,8	23,6

б) Находим размах варьирования $x_{\max} - x_{\min} = 23,6 - 18,2 = 5,4$. Так как требуется разбить на 9 интервалов, то найдем длину частичного интервала

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{9} = \frac{5,4}{9} = 0,6.$$

Началом первого интервала возьмём $x_0 = x_{\min} = 18,2$. Выпишем границы интервалов: $x_1 = x_0 + 0,6 = 18,8$, $x_2 = x_1 + 0,6 = 19,4$, $x_3 = 20,0$, $x_4 = 20,6$, $x_5 = 21,2$, $x_6 = 21,8$, $x_7 = 22,4$, $x_8 = 23,0$, $x_9 = 23,6$.

Подсчитаем число вариант, попавших в каждый интервал, т.е. находим частоты n_i, запишем интервальное распределение частот выборки (интервальный вариационный ряд):

Таблица 5.1

Интервалы	18,2 – 18,8	18,8 – 19,4	19,4 – 20,0	20,0 – 20,6	20,6 – 21,2	21,2 – 21,8	21,8 – 22,4	22,4 – 23,0	23,0 – 23,6
n_i	7	8	9	12	14	14	9	9	8

в) Результаты дальнейшей обработки данных будем вносить в таблицу. Введем в рассмотрение x_i' – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты n_i, получим вариационный ряд (графы 3 и 4).

Таблица 5.2

i	$(x_{i-1}\,;\,x_i)$	x_i'	n_i	$\dfrac{n_i}{n}$	$F^*(x)$	$x_i' n_i$	$x_i'^2 n_i$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	[18,2;18,8)	18,5	7	0,078	0	129,5	2395,75
2	[18,8;19,4)	19,1	8	0,089	0,078	152,8	2918,48
3	[19,4;20,0)	19,7	9	0,100	0,167	177,3	3492,81
4	[20,0;20,6)	20,3	12	0,133	0,267	243,6	4945,08
5	[20,6;21,2)	20,9	14	0,156	0,400	292,6	6115,34
6	[21,2;21,8)	21,5	14	0,156	0,556	301	6471,5
7	[21,8;22,4)	22,1	9	0,100	0,711	198,9	4395,69
8	[22,4;23,0)	22,7	9	0,100	0,811	204,3	4637,61
9	[23,0;23,6]	23,3	8	0,089	0,911	186,4	4343,12
10	23,6				1,000		
Всего			90	1		1886,4	39715,4

Если на оси абсцисс отмечать значения x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты, и полученные точки последовательно соединить отрезками прямых, то получим *полигон частот*.

По графам 2 и 5 построим *гистограмму относительных частот*: прямоугольники с основаниями – интервалами вариации и высотами, равными соответствующим интервальным относительным частотам.

Рис. 5.1 Полигон частот

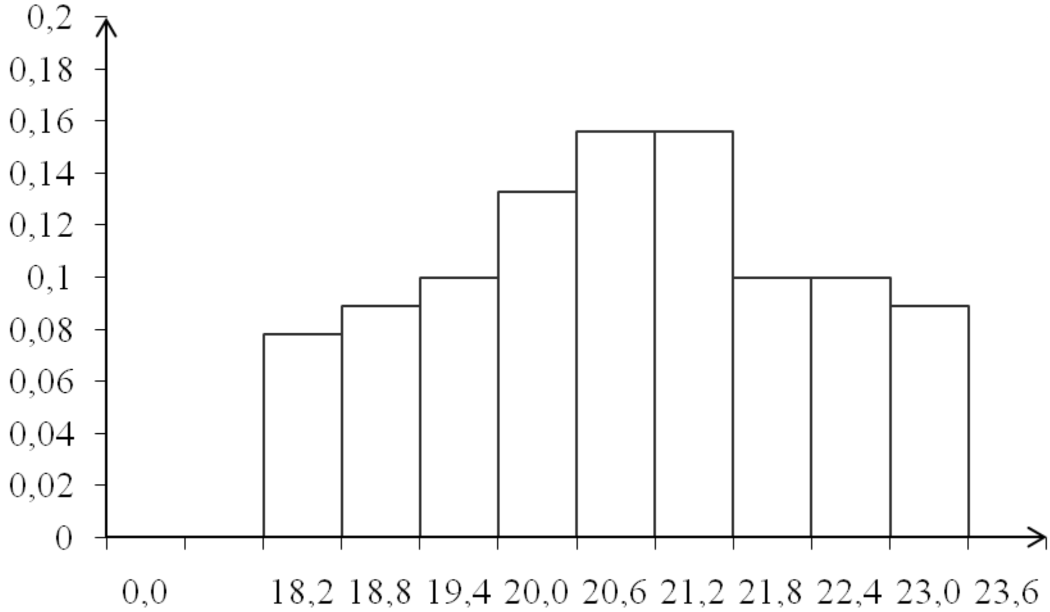

Рис. 5.2 Гистограмма относительных частот

Эмпирическую *функцию распределения* строим поинтервально, исходя из данных граф 2 и 5 по правилу накопления частот:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 18,8;\\ 0,078 & \text{при} \quad 18,8<x\le 19,4;\\ 0,167 & \text{при} \quad 19,4<x\le 20,0;\\ 0,267 & \text{при} \quad 20,0<x\le 20,6;\\ 0,400 & \text{при} \quad 20,6<x\le 21,2;\\ 0,556 & \text{при} \quad 21,2<x\le 21,8;\\ 0,711 & \text{при} \quad 21,8<x\le 22,4;\\ 0,811 & \text{при} \quad 22,4<x\le 23,0;\\ 0,911 & \text{при} \quad 23,0<x\le 23,6;\\ 1,00 & \text{при} \quad x>23,6.\end{cases}$$

Построим график эмпирической функции распределения и кумулятивной кривой выборки:

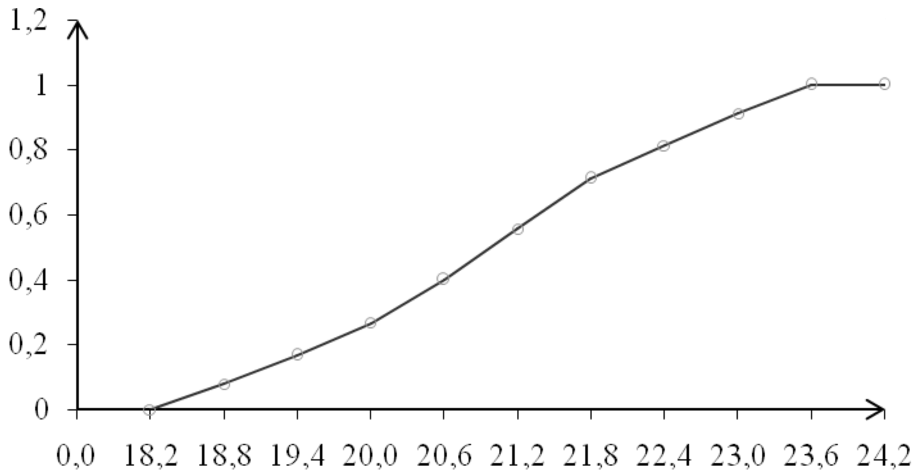

Рис. 5.3 График эмпирической функции распределения $F^*(x)$ и кумулятивной кривой выборки

г) По результатам, полученным в таблице, вычислим основные числовые характеристики выборки:

выборочное среднее $\overline{x}_в = \dfrac{1886,4}{90} = 20,96$;

выборочная дисперсия $D_в = \dfrac{39715,4}{90} - 20,96^2 = 1,9604$;

выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{1,9604} \approx 1,4001$;

исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $\overline{s} = \sqrt{\frac{90}{89}} \cdot 1,4001 \approx 1,408$.

д) Примем в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение.

В силу этого при уровне значимости $\alpha = 0,025$ проверим гипотезу о том, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение с функцией плотности $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ или $f(x) = \frac{1}{1,408 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20,96)^2}{2 \cdot 1,408^2}}$, где в качестве оценки теоретического математического ожидания a берём выборочное среднее $a = \overline{x}_в = 20,96$ и в качестве оценки теоретического среднеквадратического отклонения σ берём исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma = \overline{s} = 1,408$.

По критерию Пирсона надо сравнивать эмпирические и теоретические частоты вариант. Эмпирические частоты n_i даны. Теоретические частоты n_i' найдем по формуле

$$n_i' = n \cdot P(x_{i-1} < X < x_i) = 90 \cdot \left(\Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\overline{s}} \right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \overline{x}}{\overline{s}} \right) \right).$$

Вычисления проведем в таблице 5.3.

Таблица 5.3

i	x_i	u_i	$\Phi(u_i)$	p_i	n'	n_i	χ^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	18,2	–1,96	–0,4750	0,0375	$\left.\begin{matrix}3,38\\6,43\end{matrix}\right\} = 9,81$	$\left.\begin{matrix}7\\8\end{matrix}\right\} = 15$	2,746
2	18,8	–1,53	–0,4375	0,0714			
3	19,4	–1,11	–0,3661	0,1137	10,24	9	0,150
4	20,0	–0,68	–0,2523	0,1514	13,63	12	0,195
5	20,6	–0,26	–0,1009	0,1686	15,17	14	0,090
6	21,2	0,17	0,0677	0,1569	14,12	14	0,001
7	21,8	0,60	0,2246	0,1222	11,00	9	0,364
8	22,4	1,02	0,3468	0,0795	$\left.\begin{matrix}7,16\\3,90\end{matrix}\right\} = 11,06$	$\left.\begin{matrix}9\\8\end{matrix}\right\} = 17$	3,190
9	23,0	1,45	0,4263	0,0433			
10	23,6	1,88	0,4696				
Всего				0,9446	85,02	90	6,736

В третьей графе находим значения $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\overline{s}}$ и для них по таблице (см. приложение 2) находим значения нормированной функции Лапласа $\Phi(u_i)$ (графа 4). В графе 5 вычисляем теоретические вероятности попадания в интервал $p_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$. Умножая полученные вероятности p_i на объем выборки n, получаем теоретические частоты $n_i' = n \cdot p_i$ (графа 6).

Первый и последний интервалы, имеющие частоты, меньшие пяти, объединяем с соседними. Для проверки гипотезы вычисляем статистику $\chi^2 = \sum \dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ (графа 8): $\chi^2_{набл.} = 6,736$.

Далее определим число степеней свободы $k = l - r - 1$, где $l = 7$ – число интервалов с учетом их объединения, а $r = 2$ – число параметров распределения, вычисленных по выборке (a и σ^2). У нас получится $k = 4$. Тогда при уровне значимости $\alpha = 0,025$ и $k = 4$ по таблице "*Критические точки распределения* χ^2" находим $\chi^2_{крит.} = \chi^2(4;0,025) = 11,1$. Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то с 97,5%-ой уверенностью можно утверждать, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение.

е) Найдем доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при надежности $\gamma = 0,9$. Если генеральная совокупность распределена нормально, то с надежностью $\gamma = 0,9$ можно утверждать, что её математическое ожидание a покрывается доверительным интервалом $(\overline{x} - \delta; \overline{x} + \delta)$, где $\delta = \dfrac{\overline{s}}{\sqrt{n}} t_\gamma$ – точность оценки, $n = 90$, $\overline{s} = 1,408$, $t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0,9;90) = 1,66$ (см. приложение 3).

$$\delta = \frac{1,408}{\sqrt{90}} \cdot 1,66 \approx 0,246;$$

$$\overline{x} - \delta = 20,96 - 0,246 = 20,714; \quad \overline{x} + \delta = 20,96 + 0,246 = 21,206;$$

$$a \in (20,714; 21,206);$$

$$P(20,714 < a < 21,206) = 0,9.$$

Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с надежностью $\gamma = 0,95$: $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$, где $q = q(\gamma, n) = q(0,95;90) = 0,151$.

$$s \cdot (1-q) = 1,408 \cdot (1 - 0,151) = 1,1954; \quad s \cdot (1+q) = 1,408 \cdot (1 + 0,151) = 1,6206;$$

$$\sigma \in (1,1954; 1,6206);$$

$$P(1,1954 < \sigma < 1,6206) = 0,95.$$

5.2. В результате наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные:

66,1	71,2	71,0	71,2	69,6	66,0	73,2	73,2	72,0	72,2	72,9	66,1	69,2
74,1	70,2	70,1	74,5	76,8	62,0	74,4	66,1	72,3	72,1	69,1	69,5	69,0
69,3	76,3	76,4	71,2	78,8	68,5	74,6	71,3	68,4	64,5	67,8	74,4	75,1
71,5	71,5	68,3	71,3	61,6	70,6	65,5	66,2	69,6	68,1	72,4	81,6	72,1
78,1	73,2	67,8	75,4	68,8	69,7	63,0	69,5	72,3	73,6	77,4	73,4	71,6
67,2	69,8	71,1	74,1	66,6	69,1	70,5	74,3	74,5	68,1	75,5	74,1	69,0
77,0	74,3	73,9	63,0	75,3	73,6	74,6	67,1	74,5	71,5	71,4	68,2	74,4

Требуется:

а) составить интервальный ряд распределения частот и относительных частот и построить полигон и гистограмму частот;

б) найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график;

в) вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднеквадратическое отклонение;

г) выдвинуть гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины X, обосновать выбор вида распределения;

д) написать аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения и теоретической интегральной функции распределения;

е) приняв уровень значимости $\alpha = 0,05$, по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу о виде распределения.

5.3. Дано интервальное распределение частот некоторой совокупности относительно признака X:

Интервалы	0-36	36-72	72-108	108-144	144-180	180-216	216-252
n_i	44	24	16	9	2	5	4

Требуется:

а) найти эмпирическую функцию распределения X и построить ее график;

б) построить полигон и гистограмму относительных частот;

в) вычислить числовые оценки параметров распределения;

г) выдвинуть гипотезу о виде распределения X и написать аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения;

д) по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

6. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1

1.01 Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 6 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 6 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

1.02. Из девяти значащих цифр составляются трехзначные числа. Сколько различных чисел может быть составлено?

1.03. Студенты данного курса изучают 9 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

1.04. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?

1.05. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью девяти значащих цифр, из которых ни одна не повторяется?

1.06. На сельскохозяйственные работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 12 человек, во второй – 8, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что каждый рабочий может быть отправлен на сельскохозяйственные работы.

1.07. Из 12 кандидатов на одну и ту же должность должно быть выбрано 3. Определить все возможные варианты результатов выборов.

1.08. Из чисел 2, 3, 4, 10 составлены все возможные парные произведения. Сколько полученных чисел будут кратны трем?

1.09. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

1.10 Сколько прямых линий можно провести через 10 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой?

1.11. На конференцию из трех групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй – 22 и в третьей – 20 человек. Определить число возможных делегаций, если известно, что каждый студент из любой группы с одинаковой вероятностью может войти в состав делегации.

1.12. Сколькими способами можно выбрать два карандаша и три ручки из пяти различных карандашей и пяти различных ручек?

1.13. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады?

1.14. В шахматном турнире участвовало 12 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

1.15. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски?

1.16. Сколькими способами можно распределить 6 различных книг между тремя учениками так, чтобы каждый получил 2 книги?

1.17. Сколько различных пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)?

1.18. В пассажирском поезде 8 вагонов. Сколькими способами можно размещать вагоны, составляя этот поезд?

1.19. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?

1.20. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

1.21. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»?

1.22. Автоколонна, состоящая из 24 автомобилей, должна выделить на уборочные работы в колхозы 12 грузовиков. Сколькими способами можно это сделать?

1.23. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из восьми вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку?

1.24. На диске телефонного аппарата имеется 10 цифр. Каждый телефон АТС имеет номер, записываемый с помощью пяти цифр, причем первая цифра у них одна и та же. Найти наибольшее возможное число таких абонентов этой станции, у которых 4 последние цифры номера телефона различны.

1.25. Профсоюзное бюро факультета, состоящее из 9 человек, на своем заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть?

1.26. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

1.27. Сколькими различными способами можно избрать из 15 человек делегацию в составе трех человек?

1.28. Из группы студентов в 22 человека формируются две подгруппы на практику по 10 и 12 человек. Сколькими способами можно создать эти подгруппы?

1.29. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

1.30. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 40 человек, может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря?

Задание 2

2.01 Брошены 2 игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков?

2.02. На карточках написаны числа от 1 до 30. Из них случайно выбирают две карточки. Найти вероятность того, что в обеих карточках написаны числа меньше 10.

2.03. Из 20 кубиков всего 6 окрашены. Какова вероятность того, что среди взятых наугад восьми кубиков будут окрашены только два?

2.04. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 3 карты. Какова вероятность того, что среди них будет два туза?

2.05. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом - 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика попадется именно один белый шар, если из каждого ящика вынуть по одному шару.

2.06. Для производственной практики 30 студентам предоставлены 15 мест в Бресте, 8 - в Кобрине, 7 - в Каменце. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

2.07. В урне 5 белых и 3 черных шара. Найти вероятность того, что 3 наудачу вынутых шара окажутся белыми.

2.08. Из 12 студенческих курсовых работ 3 оценены на «отлично». Определить вероятность того, что среди взятых наугад 5 работ «отличными» будут только две.

2.09. Найти вероятность того, что наудачу взятое число окажется кратным либо 2, либо 5, либо 2 и 5 одновременно.

2.10. В урне 12 шаров: 5 черных и 7 белых. Какова вероятность того, что два наудачу вынутых шара окажутся чёрными?

2.11. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков окажется равным 5?

2.12. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одного цвета?

2.13. Из 20 лотерейных билетов – 4 выигрышных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых билетов, хотя бы один выигрышный?

2.14. На отдельных карточках написаны цифры 1, 2, ..., 9. Все девять карточек перемешаны. Наугад берут 4 из них и раскладывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом число 1, 2, 3, 4?

2.15. Двадцати школьникам предоставлены 10 путевок в Москву, 5 – в Киев и 5 – в Калининград. Найти вероятность того, что трое из них попадут в один и тот же город.

2.16. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы 1 туз?

2.17. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нём все цифры различные?

2.18. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Найти вероятность того, что будут вынуты красный и зеленый шары.

2.19. Из полного набора костей домино (28 шт.) наугад берут две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

2.20. В шкафу находится 10 пар ботинок различных сортов. Из них произвольно вынимают 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.

2.21. Из колоды в 52 карты вынимаются наудачу три. Найти вероятность того, что это «тройка», «семерка» и «туз».

2.22. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность, что в нем все цифры нечетные.

2.23. В ящике находятся катушки четырех цветов: белых – 50%, красных – 20%, зеленых – 20%, синих – 10%. Какова вероятность того, что взятая наудачу катушка окажется зелёной или синей?

2.24. Из 12 собранных аппаратов, 3 получили высокую оценку. Определить вероятность того, что среди взятых наугад 4 аппаратов только 2 из них высокого качества.

2.25. В группе из 24 студентов оценку «отлично» получили двое студентов, «хорошо» - 8 студентов, «удовлетворительно» - 9 студентов. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных студента имеют неудовлетворительные оценки?

2.26. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 11 до 40. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 3 или 2?

2.27. В урне 20 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад два шара подряд. Найти вероятность того, что оба шара черные.

2.28. Какова вероятность, что в январе наудачу взятого года окажется 4 воскресенья?

2.29. В книге 500 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер кратный 7?

2.30. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену заняты 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее двух.

Задание 3

3.01 В трёх коробках находятся детали: в первой – 12, из них 10 стандартных; во второй – 10, из них 9 стандартных; в третьей – 12, из них 9 стандартных. Из каждой коробки наугад берут по одной детали. Найти вероятность того, что: а) три детали окажутся нестандартными; б) только одна деталь нестандартная; в) хотя бы одна деталь нестандартная.

3.02. В первом ящике – 12 деталей, из которых 8 – стандартные, во втором ящике – 8 деталей, 5 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) три детали будут стандартными; б) хотя бы две детали – стандартные; в) ни одной стандартной детали.

3.03. В одной урне находятся 2 белых и 3 красных шара; в другой – 3 белых и 4 красных шара; в третьей – 5 белых и 2 красных шара. Из каждой урны вынули наугад по одному шару. Найти вероятность того, что а) все три вынутых шара окажутся красными; б) два шара будут белого цвета и один красного; в) хотя бы один шар будет красным.

3.04. Первый рабочий изготавливает 20% деталей второго сорта, а второй – 30%. У каждого рабочего взято наугад по две детали. Какова вероятность того, что: а) ни одной детали второго сорта; б) хотя бы две детали второго сорта; в) не менее трёх деталей второго сорта.

3.05. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2 и третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) три станка; б) два станка; в) хотя бы один станок.

3.06. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по два выстрела. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) четыре раза?

3.07. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9; вторым - 0,8; третьим - 0,7. Найти вероятность того, что а) только один попал в цель; б) все три попали в цель; в) хотя бы один попал в цель.

3.08. Стрелок произвел четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,6, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность того, что цель будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) хотя бы раз.

3.09. В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,05; 0,03; 0,01. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) два узла; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

3.10. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по два выстрела из каждого орудия. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен четырьмя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

3.11. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,8; 0,6; 0,4. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) три камеры; 3) хотя бы одна камера.

3.12. В первом ящике – 22 детали, из которых 15 – стандартные, во втором ящике – 28 деталей, 14 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по две детали. Какова вероятность того, что: а) две детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь – стандартная; в) все детали – нестандартные.

3.13. В прибор входят три диода. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,01; 0,02; 0,05. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) все диоды; б) ровно один диод; в) хотя бы один диод.

3.14. На участке кросса для мотоциклистов-гонщиков имеются два препятствия. Для первого гонщика вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5; для второго гонщика вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,6, второго – 0,3. Найти вероятность успешного преодоления: а) всего участка обоими гонщиками; б) хотя бы одним из гонщиков одного препятствия; в) каждым гонщиком по одному препятствию.

3.15. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) две высшего качества; б) хотя бы две высшего качества; в) одна высшего качества.

3.16. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграют: а) четыре билета; б) менее трех билетов; в) хотя бы один билет.

3.17. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,7, второй – 0,9, третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что студент сдаст; а) три экзамена; б) не менее одного экзамена; в) хотя бы один экзамен.

3.18. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка № 1 составляет 5 %, для станка № 2 – 10 %. С каждого станка взяли по две детали. Найти вероятность того, что: а) все детали стандартные; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) три детали нестандартные.

3.19. Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,9; 0,5; 0,8. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

3.20. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течении смены потребует его внимания первый станок, равна 0,4, второй – 0,2, третий – 0,2, четвертый – 0,1. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют его внимания: а) три станка; б) не менее трех станков; в) хотя бы один станок.

3.21. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, – высшего качества, равна 0,8, вторым – 0,9, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник?

3.22. В первом ящике – 25 деталей, 18 из них – стандартные, во втором ящике – 30 деталей, 24 из них – стандартные. Из первого ящика наугад берут две детали, из второго – одну. Какова вероятность того, что: а) все детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь – стандартная; в) две детали – нестандартные.

3.23. На сборку поступают детали с трех станков с ЧПУ. Первый станок дает 40 %, второй – 25 %,третий – 35 % однотипных деталей, поступающих на сборку. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей: а) три с разных станков; б) три с третьего станка; в) две с третьего станка.

3.24. На железобетонном заводе № 1 изготовляют панели, 80 % из которых – высшего сорта; на заводе № 2 – панели, 85 % из которых – высшего сорта. Для строительства взяли две панели завода № 1 и одну панель завода № 2. Какова вероятность того, что из трёх выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

3.25. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна: 0,05; 0,04; 0,1. Найти вероятность того, что включены: а) два электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) три электродвигателя.

3.26. В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,2; 0,2; 0,4; 0,3. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

3.27. Первый станок-автомат дает 2 % брака, второй – 1 %, а третий – 3 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка.

Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь?

3.28. Первый рабочий изготавливает 40 % изделий второго сорта, а второй – 30 %. У каждого рабочего взято наугад по два изделия. Какова вероятность того, что: а) все четыре изделия – второго сорта; б) хотя бы одно изделие второго сорта; в) три изделия второго сорта.

3.29. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,8; 0,6; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен: а) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) хотя бы одной станцией.

3.30. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,7, второй – 0,9, третий – 0,4. Вычислить вероятность того, что студент сдаст; а) один экзамен; б) хотя бы один экзамен; в) все экзамены.

Задание 4

В первой урне находятся a_1 белых и a_2 черных шаров. Во второй урне находятся b_1 белых и b_2 черных шаров. В третьей урне находятся c_1 белых и c_2 черных шаров. Из каждой урны наугад берут по одному шару и бросают, не глядя, в четвертую урну. Из четвертой урны произвольно извлекают шар. Найти вероятность того, что: а) он оказался черным; б) если извлеченный шар оказался черным, то в этой урне остался, по крайней мере, еще один черный шар.

	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
4.01	6	3	5	8	4	3
4.03.	5	4	6	7	5	2
4.05.	4	5	7	6	3	4
4.07.	3	6	8	5	2	5
4.09.	2	7	9	4	1	6
4.11.	7	2	3	10	6	1
4.13.	6	4	6	6	2	6
4.15.	5	5	7	5	3	5
4.17.	4	6	8	4	4	4
4.19.	3	7	9	3	5	3
4.21.	2	8	10	2	6	2
4.23.	3	8	9	2	5	4
4.25.	4	7	8	3	4	5
4.27.	5	6	7	4	3	6
4.29.	6	5	5	8	4	6

	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
4.02.	6	3	5	6	4	6
4.04.	5	4	6	5	3	7
4.06.	4	5	7	4	2	8
4.08.	3	6	8	3	1	9
4.10.	2	7	7	4	2	5
4.12.	3	6	6	5	3	4
4.14.	4	5	5	6	4	3
4.16.	6	7	4	7	5	2
4.18.	5	8	3	8	6	1
4.20.	4	9	2	9	8	2
4.22.	5	8	4	7	7	3
4.24.	6	7	5	6	6	4
4.26.	7	6	6	5	5	5
4.28.	8	5	7	4	4	6
4.30.	9	4	8	3	3	7

Задание 5

5.01 Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей: а) три нестандартных; б) будет наивероятнейшее число нестандартных деталей (из пяти); в) ни одной нестандартной детали.

5.02. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность поражения цели: а) четыре раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы один раз.

5.03. Вероятность перевыполнения годового плана для каждого из восьми рабочих равна 0,8. Найти вероятность того, что перевыполнят годовой план: а) хотя бы один рабочий; б) двое рабочих; в) трое рабочих.

5.04. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 6 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений.

5.05. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) пять изделий; б) не менее пяти изделий; в) не более пяти изделий.

5.06. После зубофрезеровки шестерен у рабочего в среднем получается 10 % нестандартных шестерен. Найти вероятность того, что среди взятых шести шестерен нестандартных будет: а) три; б) не более трех; в) хотя бы одна.

5.07. Оптовая база обслуживает 8 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого из магазинов равна 0,6. Найти вероятность того, что в этот день будет: а) шесть заявок; б) не менее шести заявок; в) не более шести заявок.

5.08. Продукция, поступающая из цеха в ОТК, не удовлетворяет условиям стандарта в среднем в 6 % случаев. Найти вероятность того, что из наугад взятых семи изделий не удовлетворяют условиям стандарта: а) шесть изделий; б) не менее шести изделий; в) менее шести изделий.

5.09. При штамповке изделий бывает в среднем 4 % брака. Для контроля отобрано 6 изделий. Найти: а) вероятность того, что пять изделий окажутся бракованными; б) наивероятнейшее число бракованных изделий; в) вероятность наивероятнейшего числа бракованных изделий.

5.10. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз.

5.11. Вероятность поражения в каждой шахматной партии для игрока равна 0,4. Найти вероятность того, что он выиграл в семи партиях: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) не менее двух раз.

5.12. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,6. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов; в) не более пяти студентов.

5.13. Вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,4. Найти вероятность того, что после пяти бросков будет: а) четыре попадания; б) не менее четырёх попаданий; в) хотя бы одно попадание.

5.14. Всхожесть семян лимона составляет 70 %. Найти вероятность того, что из 8 посеянных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) хотя бы одно.

5.15. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Произведено 7 выстрелов. Найти вероятность того, что имело место: а) четыре поражения цели; б) шесть поражений; в) не более шести поражений.

5.16. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 90 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта.

5.17. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность того, что будет иметь место: а) четыре поражения цели; б) не менее четырех поражений; в) три поражения.

5.18. Вероятность попадания в цель при бомбометании равна 0,2. Одновременно сбрасывается 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадают: а) три бомбы; б) не менее четырех бомб; в) хотя бы одна бомба.

5.19. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 5 % бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей: а) две бракованные; б) хотя бы одна бракованная; в) не более одной бракованной.

5.20. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,3. Выпущено 6 торпед. Найти вероятность того, что имеет место: а) три попадания в судно; б) не более трех попаданий; в) хотя бы одно попадание.

5.21. Охотник, стреляя по дичи, успевает сделать четыре выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что в цель попадают: а) три выстрела; б) не менее трёх выстрелов; в) хотя бы один выстрел.

5.22. Производятся испытания семи приборов на надежность. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,7. Найти вероятность того, что испытания выдержат: а) три прибора; б) не менее шести приборов; в) хотя бы один прибор.

5.23. Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,2. Из партии изделий контролер берет шесть и проверяет их качество. Найти вероятность того, что качественными окажутся: а) все изделия; б) не менее пяти изделий; в) хотя бы одно изделие.

5.24. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинаковая и равна 0,8. Произведено 4 пробы. Найти вероятность того, что с промышленным содержанием металла будет: а) ровно три пробы; б) не больше одной пробы; в) хотя бы одна проба.

5.25. При штамповке металлических клемм для соединительных пластин бывает в среднем 5% брака. Проверяется шесть клемм. Найти вероятность того, что бракованными окажутся: а) хотя бы одна клемма; б) не более одной клеммы; в) четыре клеммы.

5.26. При автоматической прессовке заготовок 2/3 от общего их числа не имеют зазубрин. Выбирается пять заготовок. Найти вероятность того, что из выбранных заготовок не будут иметь зазубрин: а) хотя бы одна заготовка; б) три заготовки; в) не менее четырёх заготовок.

5.27. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,6. Произведено 6 выстрелов. Найти вероятность того, что произошло: а) три попадания в цель; б) пять попаданий; в) не менее пяти попаданий.

5.28. Найти вероятность того, что из пять проведенных химических анализов положительными окажутся: а) хотя бы один; б) ровно два анализа; в) не менее четырёх.

5.29. Вероятность выиграть по одной облигации государственного займа равна 1/3. Найти вероятность того, что имея 5 облигаций этого займа, можно выиграть: а) по двум облигациям; б) хотя бы по одной облигации; в) по трем облигациям.

5.30. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,9. Найти вероятность поражения цели: а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом; в) не менее чем тремя выстрелами.

Задание 6

6.01 Из партии, в которой доля первосортных деталей равна 0,8, отобрано 60 единиц. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей окажется 48 деталей первого сорта.

6.02. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если вероятность, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

6.03. Сколько процентов составляют изделия первого сорта в партии достаточно большого объема, если известно, что вероятность наличия 86 первосортных изделий в партии из 100 наудачу взятых равна 0,0324 и искомый процент меньше 86?

6.04. В каждой из 1000 колод по 36 карт. Из каждой колоды вынимают наудачу две карты. Чему равна вероятность того, что число пар хотя бы с одним тузом заключено между 100 и 200?

6.05. Сколько независимых испытаний следует провести, чтобы вероятность того, что событие A наступит 12 раз, была равна 0,077, если в отдельном испытании $P(A)=0,6$?

6.06. Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. Можно ли считать полученное отклонение числа появлений герба от 2020 случайным или же оно обусловлено систематической причиной?

6.07. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 1000 новорожденных больше 480, но меньше 540 (вероятность рождения мальчика принять равной 0,515)

6.08. Найти приближенное выражение для вероятности того, что число выпадений тройки при 4200 бросаниях игральной кости будет заключено между 650 и 700.

6.09. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

6.10. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0,3. Найти вероятность того, что при этом будет 8 попаданий.

6.11. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения частости взошедших семян от вероятности $p=0,9$, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью $P=0,995$.

6.12. Бюффон бросил монету 4040 раз. При этом герб выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

6.13. При 10000 бросаниях монеты герб выпал 6000 раз. Можно ли считать, что монета симметрична?

6.14. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10% отклонений от принятого стандарта. Сколько клемм необходимо взять наудачу, чтобы вероятность того, что среди них оказалось 363 стандартные, была равна 0,0587?

6.15. В каждой из 1000 урн находится 5000 черных и 5000 белых шаров. Из каждой урны извлекаются без возвращения 3 шара. Чему равна вероятность того, что число урн, из которых извлекли одноцветные шары, заключены между 200 и 310?

6.16. Из партии, в которой доля первосортных деталей равна 0,8, отобрано 60 единиц. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей окажется 48 деталей первого сорта.

6.17. Вероятность попадания в мишень при каждом из 700 выстрелов равна 0,4. Какое максимально возможное отклонение частости от вероятности попадания при отдельном выстреле можно ожидать с вероятностью 0,997?

6.18. Монета была подброшена 40 раз. Пользуясь локальной теоремой Лапласа, найти вероятность того, что герб выпадет в 25 случаях.

6.19. Пирсон подбросил монету 12000 раз и при этом наблюдал 6019 раз выпадение герба. Чему равна вероятность того, что при повторении опыта отклонение частости от 0,5 по абсолютной величине не превзойдет полученного отклонения?

6.20. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров более 36 выдержат гарантийный срок.

6.21. В партии смешаны детали двух сортов: 80% первого и 20% второго. Сколько деталей первого сорта с вероятностью 0,0967 можно ожидать среди 100 наудачу взятых деталей (выборка возвратная)?

6.22. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий отклонение числа изделий первого сорта от навероятнейшего числа превысит по абсолютной величине 50, если вероятность появления изделия первого сорта равна 0,7

6.23. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если вероятность, что отдельное изделие будет высшего сорта, равна 0,62.

6.24. В ящике 10 револьверов одной системы и одинаковых по виду; из них 4 непристрелянных. Вероятность попадания в цель из пристрелянного револьвера равна 0,9, а из непристрелянного – 0,3. Из взятого наудачу револьвера произведено 200 выстрелов по цели. Чему равна вероятность того, что число попаданий в цели заключено между 120 и 150?

6.25. Проведено 700 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события А равна 0,7. Найти вероятность того, что частота появления события А окажется заключенной между 460 и 600.

6.26. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появление события А в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

6.27. Приняв вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 80 новорожденных будет 42 мальчика.

6.28. С конвейера сходит в среднем 85 % изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частости изделий первого сорта в них от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01?

6.29. Английский биолог и статистик Пирсон, подбросив 12 000 раз монету, получил частность выпадения герба 0,5016. Найти вероятность получения такой частости при повторном опыте.

6.30. В партии смешаны детали двух сортов: 80% первого и 20% второго. Сколько деталей первого сорта с вероятностью 0,0967 можно ожидать среди 100 наудачу взятых деталей (выборка возвратная)?

Задание 7

7.01 Изнашивание станка при изготовлении некоторых деталей таково, что производство каждой детали уменьшает вероятность выпуска детали высшего сорта на 1%. Что можно сказать на основании теоремы Пуассона с вероятностью, не меньшей 0,8, о числе деталей высшего сорта в партии из 100 деталей, изготовленных на одном станке, если вероятность того, что первая из них высшего сорта, равна 0,9?

7.02. Проведено 600 независимых испытаний: в 200 из них вероятность появления события А была равна 0,3, а в остальных случаях эта вероятность равна 0,5. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости от средней вероятности не превысит по абсолютной величине 0,05.

7.03. Стрельба по цели ведется поочередно из трех орудий, причем вероятности попадания в цель равны соответственно 0,2, 0,3 и 0,5. Было произведено 300 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этом частость отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более чем на 0,1.

7.04. Определить число испытаний, которые нужно провести, чтобы отклонение частости появления события A от его средней вероятности в проведенных испытаниях не превышало по абсолютной величине 0,02 с вероятностью 0,99.

7.05. Из 4000 проведенных испытаний в 500 вероятность появления ожидаемого результата 0,4, в 1200 – 0,5 и в 2300 – 0,6. Найти границы, в которых должна находиться частость появления ожидаемого результата, если это необходимо гарантировать с вероятностью 0,98.

7.06. Вероятность наличия зазубрины на металлических брусках, заготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5%.

7.07. Доказать, что сумма вероятностей числа появлений события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице. Предполагается, что испытания производятся бесчисленное количество раз.

7.08. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0,01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью Р, не меньшей, чем 0,95?

7.09. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время Т. Найти среднее число отказавших за время Т элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

7.10. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок более двух.

7.11. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух пуль и более, если число выстрелов равно 5000.

7.12. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

7.13. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

7.14. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

7.15. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью не меньше чем 0,997 можно было утверждать, что частость выпадения герба будет между 0,499 и 0,501?

7.16. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

7.17. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

7.18. Вероятность положительного исхода отдельного испытания $p = 0{,}8$. Оценить вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаний отклонение частости положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по своей абсолютной величине будет меньше 0,05.

7.19. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

7.20. Всхожесть семян кукурузы в некоторых условиях равна 93%. Найти границы для частости взошедших семян из 1000 посеянных, если эти границы надо гарантировать с вероятностью, не меньшей 0,99.

7.21. Пусть вероятность того, что покупателю обувного магазина необходимы туфли размера 41, равна 0,15. Оценить границы процента покупателей среди 2000 побывавших в магазине, которым нужны такие туфли, если эти границы надо гарантировать с вероятностью 0,98.

7.22. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

7.23. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий менее трех.

7.24. Ткач обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нитки на одном из веретен в течении одной минуты равна 0,005. Найти вероятность того, что в течении одно минуты обрыв произойдет на 7 веретенах.

7.25. Проведено 600 независимых испытаний: в 200 из них вероятность появления события A была равна 0,3, а в остальных случаях эта вероятность равна 0,5. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости от средней вероятности не превысит по абсолютной величине 0,05.

7.26. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного транзистора.

7.27. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года двух узлов.

7.28. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7,5 с испускало в среднем 3,87 α-частицы. Найти вероятность того, что за 1 с это вещество испустит хотя бы одну α-частицу.

7.29. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит четыре вызова.

7.30. Проведено 800 независимых испытаний: в 200 из них вероятность появления ожидаемого результата была 0,5, в 400 испытаниях эта вероятность была 0,4, и, наконец, в оставшихся случаях вероятность благоприятствующего исхода была равна 0,3. Оценить снизу вероятность того, что отклонение частости появления ожидаемого результата от средней вероятности по абсолютной величине не превысит 0,04.

Задание 8

Дискретная случайная величина задана таблично:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Проверьте, является ли таблица законом распределения данной СВ X. Найдите её функцию распределения $F(x)$ и постройте график функции. Вычислите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

	X	3	4	5	6	7	8
8.1	$P(x)$	0,13	0,23	0,28	0,08	0,21	0,07
8.2	$P(x)$	0,13	0,31	0,12	0,09	0,24	0,11
8.3	$P(x)$	0,13	0,14	0,26	0,13	0,21	0,13
8.4	$P(x)$	0,13	0,23	0,14	0,22	0,16	0,12
8.5	$P(x)$	0,13	0,17	0,35	0,23	0,09	0,03
8.6	$P(x)$	0,13	0,31	0,02	0,16	0,24	0,14

	X	1	3	5	7	9	11
8.7	$P(x)$	0,14	0,23	0,24	0,21	0,10	0,08
8.8	$P(x)$	0,15	0,22	0,26	0,19	0,11	0,07
8.9	$P(x)$	0,16	0,21	0,28	0,17	0,12	0,06
8.10	$P(x)$	0,17	0,20	0,30	0,15	0,13	0,05
8.11	$P(x)$	0,18	0,19	0,32	0,13	0,14	0,04
8.12	$P(x)$	0,19	0,18	0,34	0,11	0,15	0,03

	X	3	6	9	12	15	18
8.13	$P(x)$	0,08	0,22	0,26	0,22	0,08	0,14
8.14	$P(x)$	0,09	0,21	0,28	0,20	0,09	0,13
8.15	$P(x)$	0,10	0,20	0,30	0,18	0,10	0,12
8.16	$P(x)$	0,11	0,19	0,32	0,16	0,11	0,11
8.17	$P(x)$	0,12	0,18	0,34	0,14	0,12	0,10
8.18	$P(x)$	0,13	0,17	0,36	0,12	0,13	0,09

	X	2	5	8	11	14	17
8.19	$P(x)$	0,06	0,16	0,38	0,25	0,08	0,07
8.20	$P(x)$	0,08	0,17	0,35	0,24	0,10	0,06
8.21	$P(x)$	0,10	0,18	0,32	0,23	0,12	0,05
8.22	$P(x)$	0,12	0,19	0,29	0,22	0,14	0,04
8.23	$P(x)$	0,14	0,20	0,26	0,21	0,16	0,03
8.24	$P(x)$	0,16	0,21	0,23	0,20	0,18	0,02

	X	1	5	9	13	17	21
8.25	$P(x)$	0,04	0,18	0,41	0,23	0,07	0,07
8.26	$P(x)$	0,06	0,19	0,38	0,22	0,09	0,06
8.27	$P(x)$	0,08	0,20	0,35	0,21	0,11	0,05
8.28	$P(x)$	0,10	0,21	0,32	0,20	0,13	0,04
8.29	$P(x)$	0,12	0,22	0,29	0,19	0,15	0,03
8.30	$P(x)$	0,14	0,23	0,26	0,18	0,17	0,02

Задание 9

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

а) плотность распределения вероятностей;

б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

в) вероятность попадания СВ X на отрезок $[a;b]$;

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

9.01.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ x^2-2x+1, & 1\le x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$$
a = 1,6; b = 1,9.

9.02.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ 0,25x^2-x+1, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4;\end{cases}$$
a = 2,4; b = 3,5.

9.03.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ x^2-4x+4, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3;\end{cases}$$
a = 2,6; b = 2,9.

9.04.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<4,\\ 0,25x^2-2x+4, & 4\le x\le 6,\\ 1, & x>6;\end{cases}$$
a = 4,2; b = 5,1.

9.05.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ x^2-6x+9, & 3\le x\le 4,\\ 1, & x>4;\end{cases}$$
a = 3,2; b = 3,6.

9.06.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<6,\\ 0,25x^2-3x+9, & 6\le x\le 8,\\ 1, & x>6;\end{cases}$$
a = 6,2; b = 7,1.

9.07.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<4,\\ x^2+16-8x, & 4\le x\le 5,\\ 1, & x>5;\end{cases}$$
a = 4,1; b = 4,4.

9.08.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<8,\\ 0,25x^2-4x+16, & 8\le x\le 10,\\ 1, & x>10;\end{cases}$$
a = 8,1; b = 9,1.

9.09. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<5,\\ x^2+25-10x, & 5\le x\le 6,\\ 1, & x>6;\end{cases}$$

a = 5,1; b = 5,5.

9.10. $$F(x)=\begin{cases}0, & x<10,\\ 0,25(x-10)^2, & 10\le x\le 12,\\ 1, & x>12;\end{cases}$$

a = 10,2; b = 11,0.

9.11. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ (x^2+x)/6, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

a = 1,1; b = 1,5.

9.12. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x^2-3x+2)/6, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

a = 3,1; b = 3,9.

9.13. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (x^2-x)/6, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

a = 1,1; b = 1,9.

9.14. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4,\\ (x^2-7x+12)/6, & 4<x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

a = 5,1; b = 5,9.

9.15. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ (x^2-5x+6)/6, & 3<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

a = 3,1; b = 3,9.

9.16. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5,\\ (x^2-9x+20)/6, & 5<x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

a = 6,2; b = 6,8.

9.17. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ (x^2-x)/2, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

a = 1,1; b = 1,5.

9.18. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4,\\ (x^2-7x+12)/2, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

a = 4,5; b = 4,8.

9.19. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x^2-3x+2)/2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

a = 2,1; b = 2,4.

9.20. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5,\\ (x^2-9x+20)/2, & 5<x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

a = 5,5; b = 5,9.

9.21. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ (x^2-5x+6)/2, & 3<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

a = 3,6; b = 3,9.

9.22. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 6,\\ (x^2-11x+30)/2, & 6<x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

a = 6,1; b = 6,6.

9.23.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ (x^2+3x)/10, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$
a = 0,6; b = 0,9.

9.24.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 7,\\ (x^2-13x+42)/2, & 7<x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$
a = 7,2; b = 7,6.

9.25.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ (x^2+x-2)/10, & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$
a = 2,6; b = 2,9.

9.26.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<4,\\ (x^2-5x+4)/10, & 4\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$
a = 4,6; b = 5,2.

9.27.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x^2-x-2)/10, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$
a = 2,6; b = 3,8.

9.28.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<5,\\ (x^2-7x+10)/10, & 5\le x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$$
a = 6,1; b = 6,8.

9.29.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ (x^2-3x)/10, & 3\le x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$
a = 4,1; b = 4,8.

9.30.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<6,\\ (x^2-9x+18)/10, & 6\le x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$
a = 6,1; b = 7,0.

Задание 10

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда. Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) Найти размах варьирования и разбить его на 8 интервалов;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки выборочное среднее, выборочную дисперсию;

д) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить её, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости α = 0,05.

10.01.

1036	964	1152	734	1028	1111	787	1070	1032	1227	1071	984
934	910	949	977	1095	1053	993	1052	1144	976	966	1156
999	1006	951	946	921	1086	1007	1081	1054	901	917	1076
914	785	916	1086	937	980	978	1016	932	1083	891	980
1057	982	1051	1030	1135	970	814	1053	873	1074	803	1152
975	1073	1002	1013	998	975	1108	1078	1095	1035	1219	979
1277	912	1204	1014	1048	1099	926	1019	1201	906	874	940
1097	976	978	916	1118	1094	867	903	942	899	994	1056
1068	927	847	939	1013	1114	912	884	836	1126	1036	1120
956	1064	959	1133	1107	882	845	846	903	962	997	954

10.02.

902	852	1024	659	929	999	758	944	916	1106	955	932
847	820	857	932	958	960	915	991	1012	881	820	1003
902	888	825	835	839	983	895	975	961	801	837	937
844	719	863	978	840	908	904	933	824	979	800	892
967	906	973	896	1020	822	738	946	779	990	710	1047
923	944	924	911	885	882	1016	959	988	907	1072	887
1152	843	1066	908	991	957	853	909	1094	768	771	865
985	919	906	847	1028	955	812	804	873	802	915	941
983	859	794	833	920	996	862	807	749	1023	932	994
823	966	845	1023	996	760	769	805	791	826	881	841

10.03.

811	781	905	625	816	929	643	893	793	981	847	796
767	762	769	840	865	878	806	863	939	825	770	929
828	803	746	737	781	868	814	859	846	723	785	881
753	646	739	844	742	797	795	806	753	883	720	795
893	801	868	806	946	777	641	849	701	874	676	913
827	874	808	842	789	829	898	858	846	799	974	805
1044	769	967	801	872	889	786	825	964	702	705	780
871	805	803	782	903	857	710	723	745	729	790	868
846	782	731	765	791	936	787	731	671	918	838	928
748	854	743	919	941	711	698	689	725	781	796	779

10.04.

714	663	834	546	721	835	583	797	706	854	765	717
659	680	667	737	778	767	714	787	820	725	670	842
740	711	698	682	690	752	745	771	792	651	686	764
674	598	686	783	671	733	738	741	657	797	654	742
784	719	774	731	831	655	565	758	612	754	597	797
719	768	715	715	723	707	800	762	763	704	885	706
915	702	871	725	756	782	697	708	858	635	620	694
794	731	742	667	837	789	613	631	660	615	745	754
789	664	640	698	723	840	700	635	586	805	710	812
673	770	702	844	804	625	638	613	618	684	703	683

10.05.

637	600	724	469	607	730	502	679	624	756	652	622
575	573	580	617	653	682	612	656	724	606	584	719
634	620	584	573	570	668	607	687	652	563	587	668
583	493	573	649	590	634	642	623	583	680	558	620
658	612	674	633	713	593	499	677	560	649	516	706
630	670	639	645	620	619	699	658	648	614	745	646
787	596	736	635	665	670	570	643	732	530	539	594
672	617	626	599	723	673	546	538	575	541	608	658
679	588	550	589	638	700	585	525	489	704	635	713
601	683	568	723	710	550	525	531	550	575	608	593

10.06.

583	545	652	407	582	653	444	593	552	676	599	570
540	515	525	551	604	618	576	603	635	576	540	638
561	568	529	518	536	621	582	589	594	487	538	621
522	448	527	608	523	570	570	568	541	587	511	555
611	582	591	577	652	517	477	613	482	608	455	634
573	605	564	556	576	567	653	599	591	558	678	563
715	537	693	563	598	619	521	566	672	511	488	533
591	577	554	544	655	598	496	485	538	512	584	614
589	527	499	523	555	627	544	482	466	630	564	624
518	594	549	650	622	482	500	484	489	526	553	533

10.07.

472	445	540	365	473	540	388	517	491	581	495	488
436	433	461	471	502	511	467	520	542	486	437	537
470	480	441	434	451	519	488	502	506	415	444	520
434	378	445	510	434	465	490	490	437	513	425	476
511	486	509	474	551	436	388	503	426	503	386	541
481	502	474	478	465	478	535	521	498	479	570	482
598	454	567	488	505	515	436	479	554	410	422	436
507	484	481	459	544	499	409	417	455	407	476	497
511	458	411	441	477	547	458	428	381	524	490	535
448	514	462	550	540	417	403	410	430	454	481	444

10.08.

377	350	425	273	388	434	306	409	387	454	395	373
363	366	349	372	412	413	378	402	429	380	368	424
391	378	348	347	369	401	374	404	399	327	352	397
348	317	347	399	346	380	372	371	359	397	331	387
403	380	403	389	442	364	303	413	344	410	316	441
373	402	378	369	375	377	428	411	395	384	465	374
470	348	457	369	402	398	358	386	443	333	320	361
399	384	370	362	432	403	343	330	347	343	379	395
411	361	320	355	372	434	347	321	312	428	387	432
350	395	365	435	423	331	333	325	336	349	372	362

10.09.

293	280	315	241	293	316	254	300	288	322	306	287
274	284	280	286	304	305	287	305	317	295	281	311
288	293	280	281	277	300	294	309	298	266	281	298
280	260	284	307	273	291	296	293	283	302	271	294
299	291	304	288	319	274	255	299	266	299	260	311
289	300	292	289	289	289	314	303	304	288	322	288
341	284	330	287	301	302	278	294	323	265	260	279
304	292	285	283	318	301	265	271	279	265	286	305
300	274	261	272	294	314	280	266	257	318	285	318
284	298	279	321	316	269	260	271	271	279	285	273

10.10.

115	93	148	44	115	153	57	138	105	164	134	117
87	99	100	107	141	131	110	133	148	116	99	156
102	120	92	95	99	124	117	141	133	81	89	137
94	46	96	140	102	107	120	103	94	132	68	121
139	109	126	105	151	98	64	136	82	141	50	155
108	134	107	108	109	105	160	139	130	102	178	116
188	94	171	104	132	131	91	104	166	70	83	98
125	106	116	99	160	137	81	69	88	75	106	137
134	86	67	89	112	146	97	78	51	155	120	157
101	139	94	147	156	75	81	72	81	84	107	97

10.11.

53,4	41,1	64,3	12,5	47,8	72	22,5	56,1	45,9	75,1	55,8	50,7
42,6	39,7	43,1	49,6	62,5	61,4	50,6	57,7	70,9	52,5	44	71
51,6	52,9	35,9	43,8	42,3	57,1	53,9	62,3	62	34,4	37,5	63,3
39,5	21,5	37	61,1	41,1	45	51,6	48,8	38,4	60,2	30,9	51
61,6	53	56,7	50,7	66,5	41,4	19,6	58,8	28,4	57,6	24,3	67,4
48,4	61,1	46,3	53,5	48,9	47,7	63,8	58	61,4	50,3	75,1	47,5
91,2	38,1	80,6	51,9	55,7	59,1	41,9	53,5	82,2	29,7	35,2	35,3
57	53,6	48,8	38,2	70,1	56,7	30,9	27,9	38,5	30,2	45,4	62,1
56,3	35,1	27	36,9	50,3	65,5	42,5	33,1	25	70,3	52,8	70,9
41,6	57,2	43,4	67,1	68,1	30	34,9	31,1	35,2	39,1	52,2	36

10.12.

46,6	38,3	64	14,8	47,8	58,4	20,6	50,3	45,5	66,9	50	44
39,7	36,9	35,3	41,6	52,1	55,2	42,4	50,2	63,8	43,8	36,2	60,1
42,6	42,1	36,7	38,3	39,4	52,8	42,6	50,3	50,3	29,3	35,6	49,8
36,9	22,1	32	53,1	40	41,3	44,8	45,3	37,9	54,9	26,8	44,3
50,6	45,8	52,4	42,8	62,1	36	23,1	48,3	26,8	50,5	16,4	59,2
40,8	49,5	40,8	45,8	42,5	47,8	63,6	52,7	49,4	47,5	65,9	42,6
76,3	33	66,8	45	54,5	48,6	38,4	42,3	68,8	27,3	25,1	37,9
54,5	47,6	41	37,8	59,5	51	27,5	31,6	39,3	24,4	47,8	50
51,8	38,4	27,7	32,6	43,7	61,7	35,7	27,2	18,8	61	40,8	58,4
38,1	54,9	37,2	61,7	58,7	31,7	26,6	28,6	28,5	38,5	43,2	32,4

10.13.

36,3	32,3	52,5	10,2	37,7	54,8	12	42,6	38	64,3	47,6	35,9
31,8	33	33,3	41	47,3	44,7	37,7	47,7	49,6	37	30	50,7
39	37,7	32,8	31,6	29,3	43	40,4	47,1	47,3	27,3	31,8	43,5
29	16,6	34,3	44,7	33,9	39,3	38,4	38,9	31,9	48,3	23,2	36,3
47	36,7	48,4	35,9	52,6	31,4	13,9	42,8	25,9	45,9	14,4	53,1
42,3	46,9	37,5	37,9	39,6	36,1	50	44,7	47,4	36,4	60	35,3
70,6	30,1	59,2	36,6	45,3	45,6	33,9	39,3	58,2	24,1	20,7	29,4
46,7	39,3	36,5	29,3	54,1	42,5	23,1	24,2	33,1	20,3	42	45,5
46,3	32,6	24,6	29,1	38	49,6	27,9	25,7	15,3	52,8	36	53,7
27,2	44	34,4	54,2	53,8	21,7	24,2	20,9	20	28,2	36,6	27,3

10.14.

35,9	28,5	47,6	10,5	30,8	43,5	18	37,7	31,6	51,3	38,5	31,2
29,8	30	26,9	32,3	39,9	36,7	33,6	39,8	43,5	36,1	24,1	43,1
33,8	33,5	29,2	29,7	27	38,2	30,9	39,3	36	20,7	26,8	37,7
24,5	14,7	24,7	40,6	28,6	34,7	30,2	33,4	28,6	41,7	19,1	32,9
39	33,4	41,7	31,9	47,9	26,2	14,7	36,5	23	36,1	12,6	47,4
32,6	41,6	35,8	35,8	35,9	30,6	46,7	39,1	39,3	35,3	51,2	32,9
56,8	26,6	51,6	34,3	37	36,3	25,4	34,6	50,9	18,5	21,3	29,4
41,4	31	34,7	28,7	45,7	39,3	19,3	20,7	27,5	22,1	30,2	37,1
36,9	25	20,9	25,7	32,4	45,7	28	24,1	13,3	43,8	35,7	43,2
25,1	38,7	28	46	46,5	20,5	19,6	22	18,4	24,1	30,6	27,1

10.15.

28	24	37,2	4,3	25,9	40,9	13,3	34,5	25,9	42	32,4	24,1
24,2	20,9	21,6	28,6	33,7	30,5	26,5	33,4	38,9	26,5	19,8	39,1
28,3	28,4	21,3	20,7	23,4	34,9	27,7	33,8	32,6	14,2	22,6	34,9
19,5	9,4	23,7	31,1	22,9	28,8	27,9	26,9	21,8	34	17,8	25,6
32,1	27,2	31,4	27,2	36,4	24,4	8,1	32,8	13,9	31,8	10	37,4
26,2	32,1	25,4	28	24,9	29,2	38,7	32,2	34,8	26,9	41,9	29
47,1	24	42,3	29,1	34,2	34,7	19,5	28,2	43,2	18,1	14,4	20,9
32,1	25,6	27,8	23,6	36,3	34,8	17,6	16,5	23,9	13,7	29,4	34,9
30,5	19,5	15,8	21,7	26,4	36,7	22,4	15,6	12,2	41,3	26,7	41,6
23,7	31,2	19,2	36,5	36	17,2	14,1	16,5	15,6	21,2	26,1	20

10.16.

21,1	17,9	31,3	5,9	20,4	29,2	8,4	24,9	21,4	36,8	27,3	20,5
16,7	19	16,5	20,1	25,5	24,4	20,1	28,3	32,1	20,7	20,2	29,6
20,2	21,9	17,4	19	20,1	28	22,7	27,5	26,5	13,5	17,7	28
18,2	8,7	19,8	24,8	20,1	21,1	21,2	21,5	18,6	27,1	15,3	24,1
25,4	22,1	25,6	21,8	33,3	18,9	8,5	25,9	11,9	24,8	9	32,8
23,8	25,1	21,6	24	22,2	24,2	32	25,5	27,8	21,6	36,9	21,9
41,1	17,8	33,4	22,2	26,6	25,3	19	20,4	37,1	14,2	13,3	19,6
25,4	20,7	23,4	20,1	31,8	24,2	12,8	12,7	18,7	14,5	24	25,6
24,6	16,2	12,2	17	22,1	31,3	16,2	12,3	9,1	30,7	22,4	32,7
20,2	27,8	19,4	31,1	32,3	14,7	11,9	14,9	12,7	19,9	23,3	16,2

10.17.

20,4	15,5	26,1	5,2	18,3	26,7	8	21,5	18,7	28,2	23,4	17,4
16,8	17,6	16,2	18,7	22,4	24,1	18,9	21,9	26,9	18,8	14,2	25,4
18,9	18,6	14,7	17,4	17,1	22,2	20,6	21,6	22,4	11,4	14,4	22,3
17,6	7,6	16,3	21,1	15,6	17,4	19,6	20,5	16,9	22,4	10	17,8
23,8	18,3	22,9	17,6	25,8	14,5	6,2	24,5	13,4	24	7,8	26,9
18,2	24,4	20,6	18,3	19,6	19	26,7	24,2	23,7	19,1	31,1	18,7
32,3	14,1	28,7	19,2	22,1	22,6	15,6	18,4	29,9	10,2	13,4	17,2
23,5	17,7	19,2	15,1	27,3	22,5	12,3	11,5	14,5	12,1	17,1	21,8
22,1	16,9	12,8	15,8	17,7	26,2	14,2	13,5	6,2	26,5	20,1	27,3
15,4	23,8	16,8	25,6	28,4	12	10,6	12,3	10,1	15	18,5	15,1

10.18.

13,7	11,3	21,9	0,5	15,1	21,3	3,6	19,1	15	23,9	17,8	13,6
9,5	9,7	10,2	13	16,5	18,6	13,3	17,7	21,3	15,2	9,2	19,1
14,3	14,2	10,9	10	10,5	16,8	15,5	18,3	16,3	6,2	11	18,9
11,4	5,9	11,7	17,4	11,6	14,4	13	13,4	9,5	18,5	6,4	15,9
17,1	14,3	17	15,2	21,2	11	3,2	16,5	8,1	18,6	3,8	20,1
15,6	16,7	14,1	15,8	15,1	15,5	21	17,1	16,6	13,6	23,3	13,1
25,8	10,7	22,5	13,6	19	17,7	9,9	14,8	22,7	7,4	8,1	11,5
17,4	14,3	13,5	9,7	19,4	16,7	8,1	7,6	10,1	8,4	13,4	16,2
18,8	11,9	8,7	9,7	13,5	22	10,4	6,4	5,1	20,1	13,9	20,7
10,4	19	11,2	21,8	19,9	7	8,6	6,6	7,7	9,8	15,8	9,7

10.19.

11,5	9,4	17,5	2,5	11,2	16,1	3,5	13,8	13	19,3	15,2	12,2
8,9	8,9	9,7	11,9	13,9	14,1	12,1	13,2	18,1	12,7	8,5	16,8
13,3	13	10,1	8,4	9,3	14	12,3	14,1	13,1	7,5	8,4	14
8,4	5,2	8,2	13,6	9,4	12,7	11,5	12,1	10	14	7,2	12,2
14,8	12,5	13,4	11,9	18,2	10,1	5,3	14	7,1	13,3	5,3	16,2
13,4	13,9	13,1	13,4	11,9	12,6	17,9	13,2	14,6	11,2	20	11,6
21,2	10,3	18,9	11,8	13,3	14,9	8,1	12,4	20	6,9	6,9	8,8
14,4	11,8	12,7	9,7	16	14	6,4	7,3	9,4	6,7	13	13,4
14,3	8,9	7,1	8,9	12,6	18,1	8,5	6,9	3,7	16,5	12,6	16,5
8,1	15,2	8,7	17,2	17,2	7,6	6,9	8	6,8	10	12,5	8,8

10.20.

10,4	7,6	13,3	3,8	9,4	14	5,4	11,9	9,7	16	11	10,6
8,8	7,4	8,3	9	11,2	11,4	9,8	11,1	13,2	9,6	7	14,6
10,8	10,4	8	7,8	7,3	12,8	10,6	11,2	12,4	6,4	7,2	11,2
7,6	4	7,3	12,1	7,7	9	9	9,8	8,5	12,2	5,4	10
12,1	9,1	12,7	10,4	13	7,5	4,1	12,3	5,3	12,2	4,1	14,8
10,3	12,8	10,2	10,1	10,9	10,7	14,4	11,3	11,5	9,6	15,4	10,6
17,2	8,2	16,4	9,6	11,7	11,8	8,6	10,1	15,2	6,7	6,7	7,2
11,5	10,6	9,9	7,9	14,1	12,6	5,9	5,2	7,2	6,5	10	11,9
12,6	7,9	6,6	7,9	9,5	14,6	7,6	6,1	4,9	14,5	9,6	14,4
8,4	12,2	7,7	13,1	14,8	5,8	6,4	6,7	5,2	8,1	9,1	8,3

10.21.

10	7,09	14,58	1,46	10,92	13,57	3,66	12,3	9,3	16,35	11,09	10,07
7,56	8,01	7,84	10,07	11,71	12,02	10,75	11,92	14,01	10,38	8,6	14
10,65	9,48	7,82	7,37	8,19	12,21	9,51	12,06	11,85	6,17	8	12,79
8,34	3,74	8,22	13,04	8,08	10,36	9,19	10,37	8,46	11,09	6,1	9,24
11,5	10,87	11,28	9,24	14,42	7,42	3,23	12,28	5,76	12,63	4,01	13,77
9,67	11,58	10,66	9,99	10,12	10,37	14,74	11,25	12	9,81	15,66	10,97
18,08	7,45	16,01	9,54	11,67	11,21	8,26	10,65	16,46	5,22	5,7	8,49
12,27	9,77	10,98	8,88	14,56	12,25	5,92	5,53	7,38	5,69	9,37	12,4
11,92	8,63	5,92	7,99	10,37	14,96	7,67	6,11	4,73	13,1	10,09	13,63
8,79	11,34	8,7	14,41	14,74	6,94	5,23	6,83	5,73	8,86	10,13	7,75

10.22.

8,45	7,97	13,18	2,53	8,84	11,96	2,79	10,09	8,57	13,7	11,25	8,77
6,85	7,03	7,6	9,34	9,98	10,19	8,98	10,32	11,84	9,78	7,38	12,69
9,4	9,61	6,63	6,74	7,06	11,31	8,79	10,88	10,83	5,56	6,6	10,47
6,74	2,78	7,21	11,7	7,19	8,93	9,92	8,57	7,95	10,86	5,84	9,84
11,74	8,89	11,29	9,26	13,12	6,88	4,49	11,55	6,34	10,23	3,12	12,31
8,7	10,42	9	8,44	8,67	9,34	12,3	11,7	11,11	9,28	14,47	8,64
15,43	7,16	14,53	9,31	10,81	11,69	7,39	9,65	14,77	5,97	6,27	6,88
10,09	9,44	9,83	6,78	12,49	11,04	6,02	5,92	7,12	5,25	8,16	11,18
11,15	7,13	4,93	7,11	8,68	13,42	6,43	6,07	2,91	12,68	8,34	13,28
6,38	11	6,56	11,96	12,27	5,55	6,3	5,7	5,35	6,79	8,44	7,86

10.23.

7,41	6,55	11,12	1,27	7,45	11,49	3,79	9,62	8,05	12,63	10,39	8,21
5,79	5,91	5,94	8,07	9,72	9,71	7,7	10,1	11,99	8,23	6,85	11,76
7,41	8,63	6,83	7,05	5,78	10,54	8,76	9,79	10,46	5,5	6,9	9,48
5,88	2,78	5,64	9,48	6,09	7,66	8,7	8,56	5,57	9,74	5,47	7,83
9,58	7,64	10,44	8,16	11,83	6,65	2,77	10,49	4,66	9,19	3,3	11,45
8,66	9,58	8,84	7,4	8,01	8	11,44	10,31	9,89	8	13,65	8,69
14,79	6,8	12,96	8,88	9,15	9,01	5,93	8,51	12,89	4,89	4,52	6,04
9,58	8,36	8,59	6,4	11,95	10,45	5,02	4,6	6,45	4,29	7,46	10,54
10,17	5,65	4,43	6,16	7,55	12,15	7,16	4,86	2,91	11,78	8,24	11,79
6,88	10,09	5,77	11,29	11,44	5,48	5,41	4,95	4,42	5,56	7,99	6,7

10.24.

7,62	6,46	11,36	0,75	8,25	10,32	2,36	9,28	6,91	13,18	8,89	7,16
5,83	5,45	5,71	8,13	8,71	8,4	7,47	8,88	10,21	6,81	6,59	10,48
7,06	7,26	6,08	6,57	6,13	9,37	6,87	8,37	8,7	4,04	5,94	9,51
5,41	2,82	6,3	9,41	6,23	7	7,5	6,84	6,39	8,68	4,2	7,7
8,83	6,9	8,9	8,19	10,41	5,65	2,69	8,92	4,41	9,75	2,07	10,67
7,51	9,35	7,72	7,62	8,34	7,81	11,25	9,75	9,8	7,06	13,09	7,34
13,4	6,09	12,52	8,26	8,66	9,19	5,52	8,1	12,34	3,96	4,36	5,85
9,75	7,88	8,05	6,5	11,57	8,39	4,01	3,97	5,24	4,06	7,44	8,51
9,73	6,4	4,68	6,25	7,26	10,51	5,17	3,63	2,43	10,27	7,43	11,33
6,44	8,88	5,63	10,74	11,57	4,09	4,96	4,76	4,05	5,99	7,27	6,55

10.25.

7,01	5,07	10,54	0,73	7,67	10,48	3,36	8,5	6,8	11,18	8,59	7,02
5,47	6,05	6,34	7,07	8,4	9,46	7,08	8,47	10,8	6,55	5,54	10,17
7,3	7,46	6,31	5,39	5,77	8,16	7,74	9,11	8,26	4,12	5,91	9,37
5,28	2,3	5,26	8,24	5,59	7,65	7,02	7,73	6,36	8,89	4,59	6,93
8,9	7,5	8,34	7,86	10,91	5,99	2,11	8,3	3,86	9,26	3,38	9,65
6,53	9,2	7,1	6,83	7,17	7,45	9,87	8,48	9,46	7,39	11,89	7,83
13,89	6,25	12,32	6,99	9,43	8,49	5,8	7,72	11,61	4,72	4,87	6,37
8,79	7,95	7,08	6,2	11,02	8,32	4,43	4,31	4,98	4,32	6,98	8,6
9,12	5,73	3,64	6,3	7,35	10,76	4,97	3,63	2,55	9,6	7,39	9,71
5,85	8,14	5,23	10,92	9,76	4,8	3,8	3,74	3,64	5,66	7,52	5,9

10.26.

7,5	5,37	9,68	1,31	6,64	9,34	2,67	8,08	6,94	11,09	8,71	7,6
5,15	5,21	6,11	6,44	8,93	7,83	7,58	8,21	9,15	6,56	5,82	10,25
7,34	6,62	5,4	5,76	5,41	8,06	6,76	8,14	7,93	3,62	5,99	8,68
4,96	3,13	6,15	8,11	6,1	6,59	7,49	6,72	5,99	8,25	3,82	7,29
8,92	7,59	8,37	7,33	10,08	6,01	2,26	8,73	4,42	8,12	2,57	10,13
7,63	7,99	7,28	6,34	6,61	6,57	10,24	9,01	8,05	7,4	10,5	6,87
12,44	5,49	11,09	7,35	8,95	8,68	5,36	7,56	11,46	3,76	3,99	6,17
8,32	6,31	7,29	6,15	9,68	7,67	4,23	3,7	5,22	4,38	7,23	7,71
8,99	5,05	4,44	5,55	7,28	10,46	5,43	4,53	2,25	9,3	6,68	9,11
6,05	7,81	4,9	10,45	9,95	3,84	3,46	3,89	4,05	5,88	7,08	6,1

10.27.

7,21	5	9,76	1,06	6,94	10	2,68	8,3	6,31	11,42	8,65	7,35
5,45	5,3	5,14	6,53	7,43	7,73	7,36	7,82	10,1	6,13	5,6	9,66
6,11	7,13	5,88	5,45	6,05	8,29	6,87	7,96	7,62	4,51	5,75	7,48
6,04	3,29	5,46	8,14	5,81	6,9	6,56	6,27	5,67	7,94	4,55	6,88
7,87	7,03	8,55	7,15	8,83	4,96	2,7	7,86	3,48	8,5	2,56	9,69
6,09	7,94	6,71	6,11	6,53	6,45	9,44	7,43	7,47	7,26	11,21	7,03
11,74	5,61	10,23	6,92	8,71	8,37	5,23	6,47	10,84	4,09	4,46	4,76
8,7	6,9	7,39	5,12	9,36	7,72	4,71	3,7	5,58	4,11	6,74	8,17
8,74	5,17	4,08	5,17	6,13	9,31	5,37	3,96	3,17	9,64	6,98	9,53
5,96	7,68	4,8	9,99	9,5	4,49	3,72	3,65	4,58	5,13	6,73	5,54

10.28.

6,17	5,8	8,9	1,6	6,46	9,13	3,13	8,28	6,67	10,09	7,89	6,8
4,99	5,34	4,82	6,96	7,36	8,38	6,3	7,63	9,67	7,16	4,98	8,89
6,15	7,07	5,37	4,74	4,68	7,51	6,87	8,31	8,04	3,38	5,34	7,19
5,57	3,29	5,85	7,22	5,8	6,49	7,05	6,26	4,73	7,99	3,95	6,11
7,98	5,91	7,38	7,14	9,46	5,03	2,14	8,28	4,42	7,5	3,08	9,71
6,29	7,51	6,73	5,91	6,62	6,72	9,64	7,41	7,68	6,08	9,91	6,41
12,23	5,28	10,65	7,04	8,17	7,24	5,72	6,77	10,18	4,43	3,66	4,97
8,34	6,68	6,21	4,96	9,52	7,72	3,56	3,67	5,32	4,52	6,89	8,17
8,09	5,33	3,63	5,49	6,41	8,68	5,27	4,43	2,52	9,63	6,27	9,43
5,15	7,22	5,72	9,32	9,31	3,64	3,72	4,46	3,72	5,02	6,57	4,9

10.29.

5,05	2,87	4,56	6,82	4,98	6,36	6,51	5,76	5,02	7,05	3,63	6,2
6,83	6,63	7,44	5,85	8,27	5,29	3,3	7,88	3,79	7,91	2,47	8,45
6,75	7,78	6,43	6,66	6,3	6,35	8,45	6,89	7,6	5,83	9,15	6,43
11,13	5,33	10,12	5,69	7,18	7,69	4,59	5,93	9,75	4,35	4,34	5,46
7,53	5,98	6,37	4,86	8,75	7,73	4,01	3,91	5,53	4,12	6,24	7,09
6,95	4,64	4,21	4,61	6,35	8,75	4,98	3,59	2,5	8,85	6,09	8,64
5,14	7,24	5,25	7,99	9,07	3,7	4,23	3,45	4,12	5,65	6,66	5,04
5,93	5,37	8,73	2,03	5,7	8,47	2,84	7,36	6,2	9,73	7,67	5,88
5,34	5,66	4,55	6,7	7,24	7,34	6,2	7,86	8,02	5,7	4,59	8,59
6,45	6,67	5,58	4,67	5,59	7,95	6,76	7,49	7,43	3,99	4,75	7,78

10.30.

5,79	4,66	7,6	2,08	5,48	7,3	2,73	6,27	5,39	8,56	6,77	5,1
4,53	4,62	4,55	5,22	6,1	6,15	5,35	6,08	7,43	5,26	4,94	7,73
5,84	5,63	4,49	5,05	4,64	6,8	5,09	6,31	6,61	3,99	4,41	6,31
4,33	2,98	4,51	6,71	4,72	5,28	5,6	5,86	4,59	6,8	3,96	5,27
6,06	5,45	6,91	5,64	7,22	4,2	2,76	6,68	3,92	6,42	3	7,27
5,49	6,33	5,35	5,56	5,46	5,29	7,54	6,89	6,8	5,84	8,76	5,69
9,3	4,47	8,26	5,97	6,22	6,63	4,56	5,27	8,27	3,52	3,55	4,18
6,55	5,66	5,62	5,02	7,09	6,51	3,93	3,87	4,25	3,61	5,8	6,02
6,21	5	3,5	4,56	5,18	7,32	4,42	3,46	2,78	7,02	5,27	7,03
4,39	6,25	4,94	7,5	7,74	3,31	3,88	3,24	3,21	4,75	5,49	4,35

7. ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей: учебник / М.С.Красс. – М. : ИЗО «Дело», 2002. – 704 с.
2. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов/ И.П.Мацкевич, Г.П.Свирид – Мн.: Выш. шк., 1993. – 269 с.
3. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1991.
4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1993.
5. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов: в 3 ч. / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М. : "Новое знание", 2002. – Ч.3. – 144с.

Дополнительная:

6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика./ Н.Ш.Кремер – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2000 – 543 с.
7. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика./ И.И.Лихолетов – Мн.: Выш. шк., 1976.
8. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике./ А.П.Рябушко – Мн.: Выш. шк., 1992.
9. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики./ Е.И.Гурский – М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

8.1 Значения плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

	Сотые доли									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

8.2 Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

	Сотые доли									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

8.3 Распределение Стьюдента (двусторонняя критическая область)

α - уровень значимости, γ = 1 - α - доверительная вероятность,
ν - число степеней свободы, n = ν +1 –объем выборки.

α γ ν ↓	0,10 0,90	0,05 0,95	0,02 0,98	0,01 0,99	0,002 0,998	0,001 0,999
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
300	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

8.4 χ^2 – распределение.

ν - число степеней свободы, α - уровень значимости.

ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315

8.5. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$.

$(1 - q)\, s < \sigma < (1+ q)\, s$, если $q< 1$, $0< \sigma < (1+ q)\, s$, если $q> 1$.

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0, 22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162