Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Планиметрия

Задание №3 для 10-х классов

(2020 – 2021 учебный год)

г. Долгопрудный, 2020

Составители: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.
С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 10-х классов (2020 – 2021 учебный год), 2020, 29 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 05 декабря 2020 г.

Составители:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Городецкий Сергей Евгеньевич
Подписано 22.10.20. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,81. Уч.-изд. л. 1,61.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Введение

В восьмом и девятом классах ЗФТШ было по два Задания по геометрии. Напомним, что были повторены темы: равенство и подобие треугольников, свойства параллелограмма, прямоугольный треугольник, свойства биссектрис, медиан и высот треугольника, теорема Менелая, свойства касательных, хорд и секущих, площадь треугольника и четырёхугольника.

Содержание этого задания:

§1. Теоремы косинусов и синусов.

§2. Формулы площади треугольника. Сравнение площадей. Метод площадей.

§3. Площадь четырёхугольника.

§4. Свойства трапеции.

Как и раньше, основное внимание уделяется приёмам решения задач. Подробные решения 19 задач демонстрируют различные методы и подходы, по ходу решения напоминаются теоремы и свойства фигур, при этом отобраны в определённом смысле характерные задачи по каждой теме; в некоторых задачах доказаны новые утверждения и получены полезные формулы.

Задание оканчивается контрольными вопросами и задачами для самостоятельного решения. Приступая к решению задания, сначала ознакомьтесь с нашими пожеланиями и требованиями по его оформлению и с примерами ответов на контрольные вопросы (этот материал размещён перед контрольными вопросами). Вопросы и задачи оценены в очках, указанных в скобках после номера. За правильный ответ и верное решение ставится полное число очков, а за недочёты или ошибки определённое число очков снимается. Знаком (*) звёздочка отмечены более трудные задачи и вопросы.

Для тех, кто лишь в этом году поступил в ЗФТШ, сделаем дополнительные замечания. Работа над заданием потребует определённого времени. Надо прочитать и проработать каждый параграф: разобрать приведённые доказательства, выучить формулировки теорем, выписать и запомнить формулы. И, что очень важно, понять и воспроизвести решения приведённых в тексте примеров. После этого вы легко ответите на большинство контрольных вопросов и решите предложенные задачи.

Кроме того, рекомендуем найти на сайте ЗФТШ Задания №1 и №5 для 9-го класса, прочитать их, разобрать новые для Вас утверждения, формулы, методы. Именно для тех, кто поступил в ЗФТШ в этом году, данное Задание и Задание №5 для 9 класса имеют пересечение – т. е. некоторые части текста у них одинаковые.

§1. Теоремы косинусов и синусов

Пусть ABC – произвольный треугольник; a, b, c – длины сторон, лежащих напротив вершин A, B, C соответственно. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\textbf{теорема косинусов: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$\textbf{теорема синусов: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \qquad (1)$$

где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

Покажем применение этих теорем.

Теорема 1. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

□ Пусть $ABCD$ – параллелограмм и $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$, (рис. 1). Если $\varphi = \angle BAD$, то $\angle ADC = 180^\circ - \varphi$. Из треугольников ABD и ACD по теореме косинусов будем иметь:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(180^\circ - \varphi\right).$$

Складывая почленно эти равенства и учитывая, что $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi$, получим требуемое равенство:

$$\boxed{d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.} \ ▲$$

Пример 1. (Лемма о медиане) Зная три стороны треугольника a, b и c, найдите медиану m_c, проведённую к стороне c.

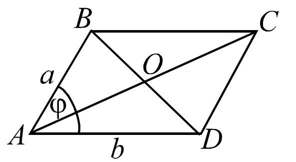


Рис. 1

△ Пусть в треугольнике ABD (рис. 1) $AB = a$, $AD = b$, $BD = c$ и AO – медиана. Достроим треугольник ABD до параллелограмма (на продолжении AO за точку O отложим $OC = AO$ и соединим точку C с B и D; *диагонали четырёхугольника* $ABCD$, *пересекаясь, делятся пополам – это параллелограмм).* Так как $BD = c$ и $AC = 2m_c$, то по доказанному в теореме 1 имеем $\left(2m_c\right)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$; отсюда получаем *формулу для медианы треугольника через его стороны*:

$$\boxed{m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}.} \ ▲$$

Пример 2. В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и AC (рис. 2), при этом $BM = MN = NC$. Найти отношение $MN : BC$, если $AC : AB = 3 : 2$, и угол A равен 60°.

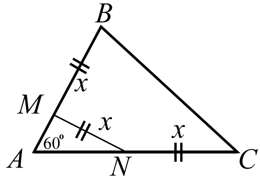


Рис. 2

$\triangle$ Обозначим $x = MN$, $2a = AB$, тогда $AC = 3a$, $AM = 2a - x$ и $AN = 3a - x$. Применяя теорему косинусов к треугольнику AMN, в котором стороны выражены через a и x и известен угол $\angle MAN = 60^\circ$, получаем $x^2 = (2a - x)^2 + (3a - x)^2 - (2a - x)(3a - x)$, откуда находим $x = \dfrac{7}{5}a$. По теореме косинусов выражаем сторону BC:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos 60^\circ} = \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 2a \cdot 3a} = \sqrt{7}a.$$

Теперь находим $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{x}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$. ▲

Ответ: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

Обратим внимание на применение теоремы косинусов. При доказательстве теоремы 1 использовался тот факт, что в фигуре (параллелограмме) есть дополнительные углы $\angle A = \varphi,\ \angle D = 180^\circ - \varphi,$ а $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi.$

В примере 2 теорема косинусов применялась к треугольнику AMN с заданным углом 60°, стороны которого выражались через заданную величину a и неизвестную x.

В примере 5 (см. далее) теорема косинусов позволяет найти косинус угла треугольника по трём известным его сторонам.

Следующие два примера на применение теоремы синусов.

Пример 3. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и AC равны b, а угол при вершине A равен 30° (рис. 3).
Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной окружности, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка BD.

Δ Центр описанной около треугольника окружности лежит на серединном перпендикуляре OK, но т. к. *высота равнобедренного тре-*

угольника является и медианой, то т. O лежит на высоте AK, которая является также и биссектрисой угла A. Таким образом,

$$\angle BAK = \angle CAK = 15^{\circ}.$$

Треугольник AOB равнобедренный ($AO = OB$ как радиусы), следовательно, $\angle ABO = \angle BAO = 15^{\circ}$. Итак, в треугольнике ABD известны два угла, а т. к. сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle BDA = 135^{\circ}$. По теореме синусов из треугольника ABD имеем: $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD} = \dfrac{AB}{\sin\angle BDA}$, откуда находим: $BD = b\dfrac{\sin 30^{\circ}}{\sin 135^{\circ}} = b\dfrac{\sin 30^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. ▲

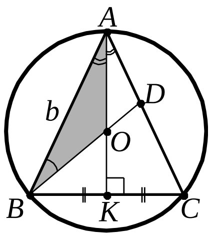


Рис. 3

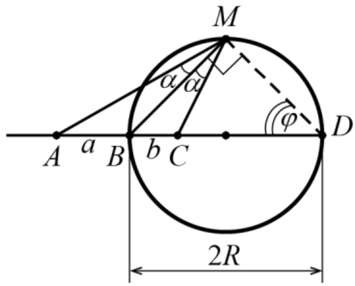


Рис. 4

Пример 4. Точка M лежит на окружности с диаметром BD; точки A и C лежат на прямой BD, причём точка C лежит внутри окружности, а точка B – между точками A и C. Известно, что $AB = a$, $BC = b$ и $\angle AMB = \angle BMC$ (рис. 4). Найдите радиус окружности.

△ 1. Обозначим равные углы AMC и BMC через α, $BD = 2R$, проведём хорду MD и обозначим $\angle ADM = \varphi$.

Угол BMD прямой (опирается на диаметр), тогда $\angle AMD = 90^{\circ} + \alpha$, а $\angle CMD = 90^{\circ} - \alpha$.

Применим теорему синусов к треугольникам AMD и CMD:

$$\left.\begin{aligned} \frac{AM}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin\left(90^{\circ} + \alpha\right)} \Leftrightarrow \frac{AM}{\sin\varphi} = \frac{2R + a}{\cos\alpha} \\ \frac{CM}{\sin\varphi} = \frac{CD}{\sin\left(90^{\circ} - \alpha\right)} \Leftrightarrow \frac{CM}{\sin\varphi} = \frac{2R - b}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{2R + a}{2R - b}.$$

2. По условию отрезок MB – биссектриса угла AMC, по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AM}{CM}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{b}$.

Из равенства $\frac{2R+a}{2R-b}=\frac{a}{b}$ находим, что $R=\frac{ab}{a-b}$. ▲

Ответ: $R=\frac{ab}{a-b}$.

Заметим, что из формулы (1) следует тот факт, *что радиус окружности, описанной около треугольника, определяется одной из сторон и величиной противолежащего угла*, а именно $\boxed{R=\frac{a}{2\sin A}}$. Это замечание поможет нам решить следующую задачу.

Пример 5. Из одной точки окружности проведены две хорды AB и BC длиной 9 и 17. Отрезок MN, соединяющий середины этих хорд, равен 5 (рис. 5). Найдите радиус окружности.

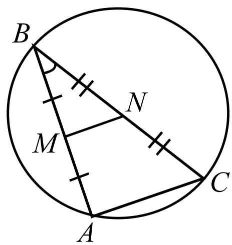


Рис. 5

△ По теореме косинусов из треугольника MBN найдём $\cos\angle B$: $\left(MB=9/2,\ BN=17/2\right)$:

$$MN^2=MB^2+BN^2-2BM\cdot BN\cos B,$$

откуда $\cos B=\frac{BM^2+BN^2-MN^2}{2BM\cdot BN}=\frac{15}{17}$.

Значит, $\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{8}{17}$. Далее, т. к. MN – средняя линия треугольника ABC, то $AC=10$ и $R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{85}{8}$. ▲

Ответ: $\frac{85}{8}$.

Замечание. В этой задаче окружность можно было не изображать на чертеже, так как в решении она не использовалась.

§2. Площадь треугольника. Метод площадей

В школьном курсе геометрии доказано несколько формул площади треугольника. Напомним их.

Пусть A, B и C – углы треугольника ABC; a, b и c – противолежащие этим углам стороны; h_a, h_b и h_c – высоты, проведённые к этим сторонам;

r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности; $2p=(a+b+c)$ – периметр треугольника; S – площадь треугольника.

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c, \qquad (1)$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A, \qquad (2)$$

$$S=pr, \qquad (3)$$

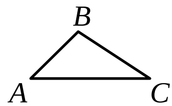
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ – формула Герона}, \qquad (4)$$

$$S=\frac{abc}{4R}. \qquad (5)$$

При вычислении площади из этих формул следует выбрать ту, которая в условиях конкретной задачи приводит к более простому решению.

Для примера, рассмотрим два треугольника:

ΔABC: $AB=13$, $BC=14$, $AC=15$;

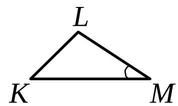


ΔKML: $KL=\sqrt{13}$, $LM=\sqrt{14}$, $KM=\sqrt{15}$;

Надо найти площадь и радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC удобнее такой ход решения:

$p=\frac{1}{2}\left(AB+BC+AC\right)=21$, по формуле Герона



$S_{ABC}=\sqrt{21\cdot6\cdot7\cdot8}=\underline{84}$ и по формуле (5)

$R=\frac{abc}{4S}=\frac{13\cdot14\cdot15}{4\cdot84}=\frac{65}{8}=\underline{8{,}125}$.

Для треугольника KLM вычисления по формуле Герона затруднительны, более простой путь – найти косинус, например, угла M. По теореме косинусов $13=14+15-2\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}\cos M \Leftrightarrow \cos M=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}}$,

тогда $\sin M=\sqrt{1-\frac{64}{210}}=\frac{\sqrt{146}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}}$ и по формуле (2):

$$S_{KML}=\frac{1}{2}KM\cdot LM\sin M=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{146}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{146}}{2}, \text{ тогда}$$

$$R=\frac{KL}{2\sin M}=\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{15}}{2\cdot\sqrt{146}}=\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{15}}{2\cdot\sqrt{73}} \text{ (также по формуле 5).}$$

Сравнение площадей треугольников обычно опирается на одно из следующих утверждений:

2.1°. *Площади треугольников с одинаковой высотой относятся как длины соответствующих оснований.* В частности, если точка D лежит на основании AC (рис. 6а), то $S_{ADB} : S_{BDC} : S_{ABC} = AD : DC : AC$.

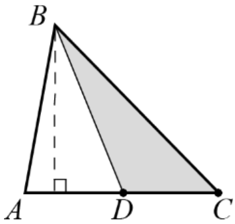


Рис. 6а

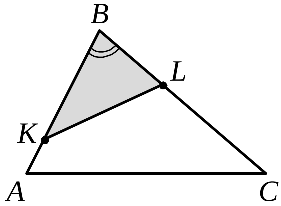


Рис. 6б

2.2°. *Площади треугольников с общим углом относятся как произведения сторон, заключающих этот угол* (см. рис. 6б):

$$\frac{S_{KBL}}{S_{ABC}} = \frac{BK \cdot BL}{BA \cdot BC}.$$

Заметим, что эта формула также остаётся верной, если точки K и L лежат не на сторонах AB и BC, а на их продолжениях (например, рис. 6в, 6г).

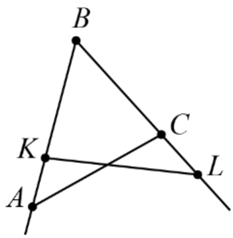


Рис. 6в

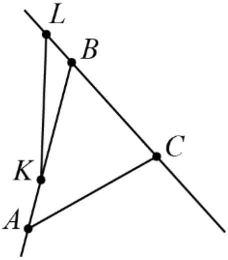


Рис. 6г

2.3°. *Площади подобных треугольников относятся как квадраты их соответствующих сторон*, т. е. если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2.$$

Все эти утверждения легко доказываются с использованием соответственно формул площади (1) и (2).

Обратим внимание на важное свойство медиан треугольника.

Теорема 2 (о медианах). Три медианы треугольника разбивают его на 6 треугольников с общей вершиной и равными площадями.

□ Известно, что *три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины*. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ΔABC площади S (рис. 7а). Надо доказать, что площади всех шести треугольников с вершиной в точке O, составляющих треугольник ABC, равны между собой, т. е. равны $\frac{1}{6}S$.

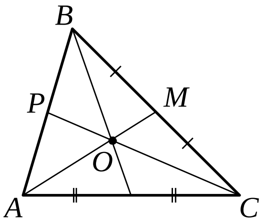


Рис. 7а

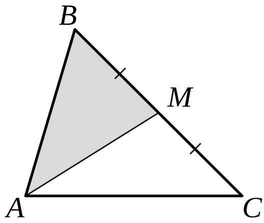


Рис. 7б

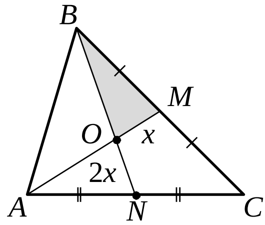


Рис. 7в

Докажем, например, для треугольника BOM, что $S_{BOM} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Точка M – середина стороны BC (рис. 7б), по утверждению 2.1° о сравнении площадей $S_{ABM} = \frac{1}{2}S$. Медиана BN, пересекая медиану AM в точке O (рис. 7в), делит её в отношении $AO:OM = 2:1$, т. е. $OM = \frac{1}{3}AM$. По тому же утверждению 2.1° площадь треугольника BOM составляет 1/3 площади треугольника ABM, т. е.

$$S_{BOM} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{6}S. \ \blacksquare$$

Пример 6. Дан треугольник ABC. Точка D лежит на стороне AB, $AD:DB = 1:2$, точка K лежит на стороне BC, $BK:KC = 3:2$ (рис. 8а). Отрезки AK и CD пересекаются в точке O. Найдите отношение площади четырёхугольника $DBKO$ к площади треугольника ABC.

$\triangle$ 1. Обозначим $S_{ABC} = S$, $S_{DBKO} = \sigma$ и $S_{ADO} = a$ (рис. 8а). По утверждению 2.1° имеем $S_{ABK} = a + \sigma = \frac{3}{5}S$ (так как $BK:BC = 3:5$).

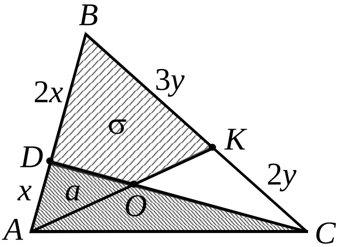


Рис. 8а

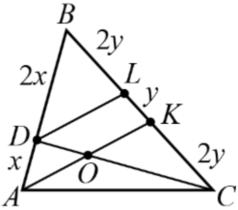


Рис. 8б

2. Найдём отношение $DO{:}OC$. Покажем два способа, как это можно сделать.

1) Через точку D проведём прямую $DL \parallel AK$ (рис. 8б). По теореме о пропорциональных отрезках $\dfrac{BL}{LK} = \dfrac{BD}{DA} = 2.$ Поэтому если $BL = 2y,$ то $LK = y,$ $KC = 2y.$ Применяя теорему о пропорциональных отрезках ещё раз, получаем $\dfrac{CO}{OD} = \dfrac{CK}{KL} = 2.$

2) По теореме Менелая для ΔBCD и секущей AK: $\dfrac{BK}{KC} \cdot \dfrac{CO}{OD} \cdot \dfrac{DA}{AB} = 1,$ откуда $\dfrac{CO}{OD} = \dfrac{KC}{BK} \cdot \dfrac{AB}{DA} = \dfrac{2}{3} \cdot 3 = 2.$

3. Теперь находим $S_{ADO} : S_{ADC} = DO : DC,$ $a = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}S\right) = \dfrac{1}{9}S.$

Значит, площадь: $\sigma = \dfrac{3}{5}S - a = \left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{9}\right)S = \dfrac{22}{45}S.$ ▲

Ответ: $\dfrac{22}{45}.$

Пример 7. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 7, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 4 (рис. 9).

△ Пусть $AB = 3,$ $BC = 7,$ $AM = MC$ и $BM = 4.$ Достроим треугольник ABC до параллелограмма, (см. рис. 9). *Противоположные стороны параллелограмма равны* $(DC = AB)$ и равны площади треугольников ABC и DBC (общее основание BC и равные высоты из вершин A и D).

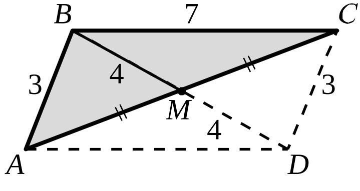


Рис. 9

В треугольнике DBC известны все три стороны:

$$BC = 7,\ DC = 3,\quad BD = 2BM = 8.$$

Находим его площадь по формуле Герона: $p = 9,\ \ S_{BCD} = 6\sqrt{3}.$

Значит и $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$. ▲

В решении этой задачи дополнительным построением получен треугольник, площадь которого равна площади заданного и легко вычисляется по данным задачи. Приведём ещё одну задачу, где сначала вычисляется площадь дополнительно построенной фигуры, а затем легко находится искомая площадь.

Пример 8. Найдите площадь треугольника, если его медианы равны 3, 4 и 5.

△ Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 10) и пусть $m_a = AM = 3,\ m_b = BN = 4$ и $m_c = CP = 5$.

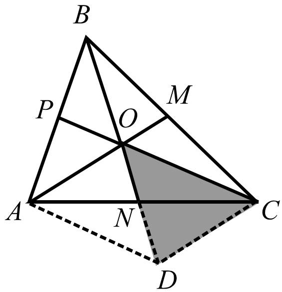


Рис. 10

По свойству медиан $AO = \dfrac{2}{3}m_a,\ \ CO = \dfrac{2}{3}m_c$ и $ON = \dfrac{1}{3}m_b$. В треугольнике AOC известны две стороны AO и CO и медиана, проведённая к третьей стороне ON. Площадь этого треугольника найдём, как в предыдущей задаче.
Достроим треугольник AOC до параллелограмма $AOCD$, $S_{AOC} = S_{DOC}$. В треугольнике DOC известны три стороны:

$$DO = 2ON = \frac{2}{3}m_b,\ \ OC = \frac{2}{3}m_c\,,\ \ DC = AO = \frac{2}{3}m_a,$$

поэтому он подобен треугольнику со сторонами $m_a,\ m_b,\ m_c$. Площадь последнего треугольника равна $\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$ (т. к. он прямоугольный). Коэффициент подобия равен $\dfrac{2}{3}$, поэтому $S_{DOC} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot 6 = \dfrac{8}{3}$. Сравним теперь площадь треугольника ABC (обозначим её S) с площадью треугольника AOC. Из теоремы 2 о медианах и площадях следует

$$S_{AOC} = S_{AON} + S_{NOC} = 2\cdot\frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S.$$

Итак, $S_{ABC} = 3S_{AOC} = 8$. ▲

В следующей задаче докажем **лемму** об отношении площади треугольника к площади другого треугольника, построенного из медиан первого.

Пример 9. Найдите отношение площади S треугольника к площади S_0 треугольника, составленного из медиан первого.

△ Рассмотрим рис. 10. В построенном треугольнике OCD стороны таковы: $OC = \frac{2}{3}m_c$, $OD = \frac{2}{3}m_b$, $CD = \frac{2}{3}m_a$. Очевидно, что треугольник со сторонами m_a, m_b, m_c подобен (по третьему признаку) треугольнику со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$.

Из решения предыдущей задачи следует, что $S_{OCD} = S_1 = \frac{1}{3}S$ (здесь $S -$ площадь треугольника ABC). Кроме того, *площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон*, поэтому $\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Таким образом, имеем $S_0 = \frac{9}{4}S_1 = \frac{3}{4}S$, т. е.

$$\boxed{S_{m_a m_b m_c} = \frac{3}{4}S_{abc}}. \ \blacktriangle$$

Замечание. Из рассуждений в решении Примера 9 следует, что всегда существует треугольник со сторонами, равными медианам данного треугольника, поскольку всегда существует подобный ему треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$. Кроме того, становится ясным план построения треугольника по трём отрезкам, равным его медианам: сначала строится треугольник OCD (см. рис. 10) со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$, затем точка $N -$середина отрезка OD, потом точка A (из $AN = NC$) и точка B (из $OB = OD$). Это построение осуществимо, если существует треугольник OCD, т. е. если существует треугольник со сторонами m_a, m_b, m_c. Итак, вывод: *три отрезка могут быть медианами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда из них можно составить треугольник.*

Пример 10. Около окружности радиуса $\sqrt{3}$ описан треугольник. Найдите его площадь, если одна из его сторон точкой касания делится на отрезки 9 и 5.

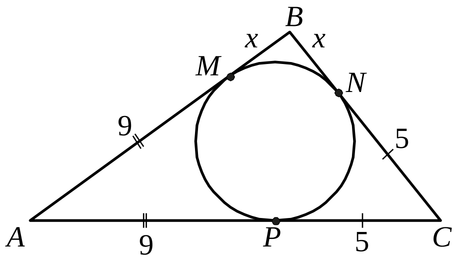


Рис. 11

$\triangle$Пусть $AP=9, PC=5$ (рис. 11) и пусть $BM=x$. По свойству касательных $AM=AP, CN=CP$ и $BN=BM$, поэтому стороны треугольника таковы: $AC=14$, $AB=9+x$, $BC=5+x$, тогда $p=14+x$. (Заметим, что $p=AC+BM$). По формулам площади (3) и (4) имеем $S=pr=(14+x)\sqrt{3}$ и $S=\sqrt{(14+x)x\cdot 5\cdot 9}$. Приравнивая правые части, получаем $(14+x)\sqrt{3}=\sqrt{(14+x)\cdot 45x}$, откуда $\sqrt{14+x}=\sqrt{15x}$, поэтому $x=1$ и $S=pr=(14+1)\cdot\sqrt{3}=15\sqrt{3}$. ▲

Приём, применённый в решении этой задачи, когда площадь фигуры выражается двумя различными способами, иногда используется в задачах на доказательство.

Проведём два примера, в каждом выведем полезную формулу.

Пример 11. (лемма о биссектрисе) В треугольнике ABC угол C равен φ, $AC=b$, $BC=a$ (рис. 12). Докажите, что биссектриса CD равна $\dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

$\triangle$ Обозначим $CD=x$. Очевидно, что $S_{ABC}=S_{ACD}+S_{DCB}$. По формуле (2) $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin\varphi$, $S_{ACD}=\dfrac{1}{2}bx\sin\dfrac{\varphi}{2}$, $S_{BDC}=\dfrac{1}{2}ax\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Таким образом, имеем $\dfrac{1}{2}ab\sin\varphi=\dfrac{1}{2}(a+b)x\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Используя формулу синуса двойного угла $\sin\varphi=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$, получаем $\boxed{x=\dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{\varphi}{2}}$. ▲

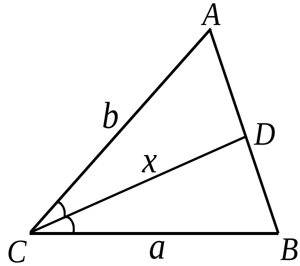


Рис. 12

Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Таких окружностей, очевидно, три (рис. 13). Их радиусы обычно обозначаются r_a, r_b, r_c в зависимости от того, какой стороны окружность касается.

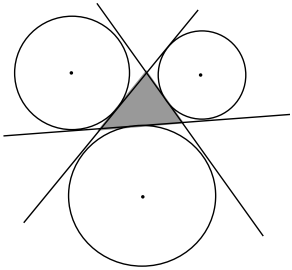


Рис. 13

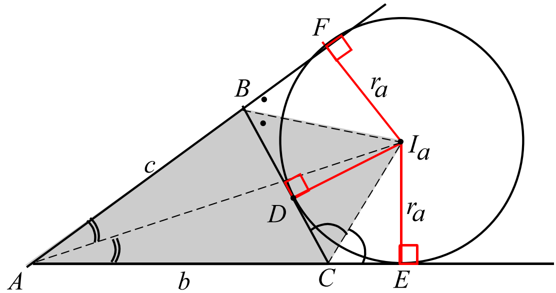


Рис. 14

Пример 12. Вневписанная окружность касается стороны $a = BC$ треугольника ABC (рис. 14). Докажите, что $S_{ABC} = r_a\left(p-a\right)$, где p – полупериметр треугольника.

Δ Центр окружности I_a лежит на пересечении биссектрисы угла A и биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Легко видеть, что если D, F и E – точки касания, то $I_aD = I_aF = I_aE = r_a$.

Площадь S_0 четырёхугольника ABI_aC можно выразить двумя способами:

$$S_0 = S_{ABC} + S_{BCI_a} \text{ и } S_0 = S_{ABI_a} + S_{ACI_a}, \text{ откуда}$$

$$S_{ABC} = S_{ABI_a} + S_{ACI_a} - S_{BCI_a} = \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a =$$

$$= r_a\frac{c+b-a}{2} = r_a\frac{2p-2a}{2} = r_a\left(p-a\right).$$

Итак, $\boxed{S_{ABC} = r_a\left(p-a\right)}$. ▲

§3. Площадь четырёхугольника

В школьном учебнике выведены следующие формулы площади параллелограмма:

$$S = a\cdot h_a = b\cdot h_b, \tag{6}$$

$$S = a\cdot b\sin\varphi, \tag{7}$$

где a и b – стороны параллелограмма, h_a и h_b – высоты, проведённые к ним, φ – величина угла между сторонами параллелограмма.

Докажем теорему о площади четырёхугольника.

Теорема 3. Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, т. е.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha, \tag{8}$$

где d_1 и d_2 – диагонали 4-х угольника, α – величина угла между ними.

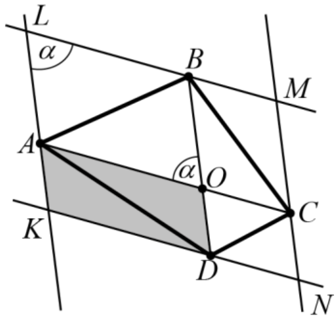


Рис. 15

□ Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O под углом α (рис. 15). Через вершины A и C проведём прямые, параллельные диагонали BD, а через вершины B и D проведём прямые, параллельные диагонали AC. Проведённые прямые в пересечении образуют параллелограмм со сторонами, равными диагоналям BD и AC, и углом α. Площадь параллелограмма равна $AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, а площадь четырёхугольника $ABCD$ равна, половине его площади, (параллелограмм $KLMN$ состоит из четырёх меньших параллелограммов $ALBO$, $BMCO$, $OCND$, $AODK$; у каждого из них ровно половина попадает внутрь четырёхугольника $ABCD$), т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$. ■

Следствие. *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.* Это сразу следует из доказанной формулы, т. к. диагонали ромба перпендикулярны.

Пример 13. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны a и b $(a \neq b)$, а угол между диагоналями равен α $(\alpha < 90^\circ)$.

△ Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 16), $AB = a$, $AD = b$. Обозначим $BD = 2x$, $AC = 2y$. По теореме косинусов для треугольников AOB и AOD (заметим, что $\angle AOD = 180^\circ - \alpha$, $\cos\angle AOD = -\cos\alpha$), получаем

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha, \quad b^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha.$$

По теореме 3 площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha = 2xy\sin\alpha.$ Заметим, что это выражение легко можно найти, не определяя x и y из системы. Действительно, из двух уравнений для x и y получим $b^2-a^2=4xy\cos\alpha.$ По условию $b\neq a,$ следовательно, $\cos\alpha\neq 0$ и $xy=\dfrac{b^2-a^2}{4\cos\alpha}.$ Отсюда площадь параллелограмма равна $S=2xy\sin\alpha=\dfrac{b^2-a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$ ▲

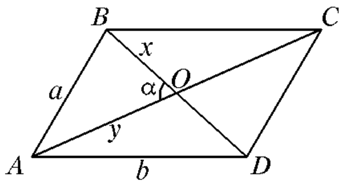


Рис. 16

Пример 14. Середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ являются вершинами другого четырёхугольника (он называется *четырёхугольником Вариньона*). Докажите, что четырёхугольник Вариньона – параллелограмм, а его площадь равна половине площади S четырёхугольника $ABCD$.

△ 1. Проведём диагонали AC и $BD.$ Середины сторон обозначим K, L, M и N (рис. 17). По определению, $KL-$ средняя линия треугольника ABC; по теореме о средней линии

$$KL \parallel AC,\ KL=\frac{1}{2}AC.$$

Аналогично, $NM-$ средняя линия треугольника $ADC,$ $NM\parallel AC,$ $NM=\frac{1}{2}AC.$

В четырёхугольнике $KLMN$ противоположные стороны KL и NM равны и параллельны; по признаку $KLMN-$ параллелограмм.

Если рассмотреть стороны LM и $KN,$ то точно также установим, что $LM\parallel BD\parallel KN$ и

$$LM=KN=\frac{1}{2}BD.$$

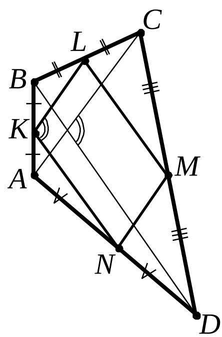


Рис. 17

2. Из параллельности $KL\parallel AC$ и $KN\parallel BD$ следует, что угол LKN параллелограмма $KLMN$ равен углу между диагоналями четырёхугольника $ABCD$ (обозначим угол α).

Имеем $S_{KLMN}=KL\cdot KN\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot\frac{1}{2}BD\sin\alpha,$ а по теореме 3

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha.$$

Из этого следует $S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, ч. т. д.▲

Рассмотрим несколько задач, где определяется или используется площадь трапеции. Напомним, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на её высоту, т. е.

$$S = \frac{a+b}{2} h. \tag{9}$$

Пример 15. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 16 и 44, а боковые стороны равны 17 и 25.

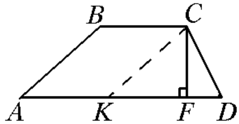


Рис. 18

△ Через вершину C проведём $CK \| BA$ (рис. 18). $ABCK$ – параллелограмм, его противоположные стороны равны, поэтому в треугольнике KCD определяются все стороны: $KC = AB = 25$, $CD = 17$, $KD = AD - BC = 28$. По формуле Герона вычисляем площадь этого треугольника: $p = 35$, $S_{KCD} = 210$. С другой стороны, $S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CF$, ($CF$ – высота ΔCDK). Отсюда находим $CF = \frac{2S_{KCD}}{KD} = 15$ и вычисляем площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)CF = 450$. ▲

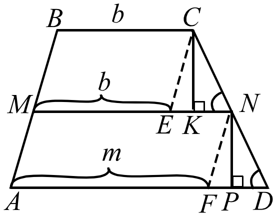


Рис. 19

Пример 16. Отрезок длины m, параллельный основаниям трапеции, разбивает её на две трапеции. Найти отношение площадей этих трапеций, если основания трапеции равны a и b ($b < a$).

△ Пусть $BC = b$, $AD = a$ и $MN = m$, и $MN \| AD$. Проведём $CE \| BA$ и $NF \| BA$, а также $CK \perp MN$ и $NP \perp AD$ (см. рис. 19). Обозначим $CK = h_1$, $NP = h_2$. Далее, т. к. $CE \| NF$, то $\angle ECN = \angle FND$, а из $MN \| AD$ следует $\angle ENC = \angle FDN$. Следовательно, треугольники ECN и FND имеют по два равных угла, и они подобны. Соответствующие элементы подобных треугольников пропорциональны, откуда $\frac{CK}{NP} = \frac{CN}{ND}$, т. е. $\frac{m-b}{a-m} = \frac{h_1}{h_2}$. Если S_1 и S_2 – площади трапеций $MBCN$ и $AMND$, то

$$S_1 = \frac{1}{2}(b+m)h_1,\ S_2 = \frac{1}{2}(a+m)h_2 \text{ и } \frac{S_1}{S_2} = \frac{(m+b)h_1}{(a+m)h_2} = \frac{m^2 - b^2}{a^2 - m^2}. ▲$$

§4. Свойства трапеции

Напомним свойства трапеции, которые часто используются при решении задач. Некоторые из этих свойств были доказаны в заданиях для 9-го класса, другие попробуйте доказать самостоятельно. Приведённые рисунки напоминают ход доказательства.

4.1°. Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника с общей вершиной (рис. 20). Площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны, а треугольники прилежащие к основаниям – подобны.

4.2°. В любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжении боковых сторон, лежат на одной прямой (на рис. 21 точки M, N, O и K).

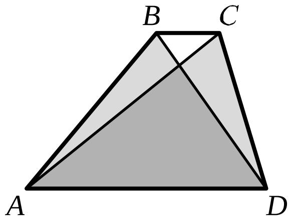


Рис. 20

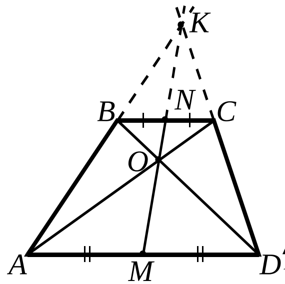


Рис. 21

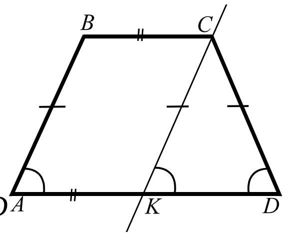


Рис. 22

4.3°. В равнобокой трапеции углы при основании равны (рис. 22).

4.4°. В равнобокой трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции (рис. 23).

4.5°. В равнобокой трапеции диагонали равны (рис. 24).

4.6°. В равнобокой трапеции высота, опущенная на большее основание из конца меньшего основания, делит его на два отрезка, один из которых равен полуразности оснований, а другой – их полусумме (рис. 25, основания равны a и b, $a > b$).

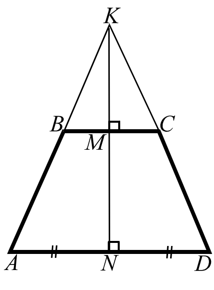


Рис. 23

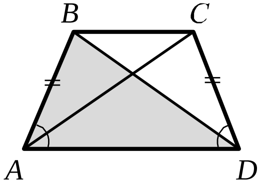


Рис. 24

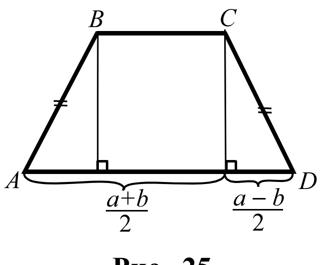


Рис. 25

4.7°. Во всякой трапеции середины боковых сторон и середины диагоналей лежат на одной прямой (рис. 26).

4.8°. Во всякой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям и равен полуразности оснований (рис. 27).

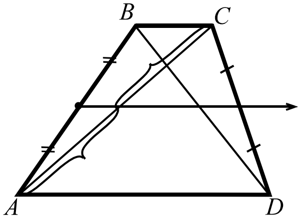


Рис. 26

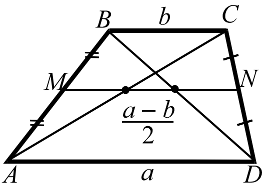


Рис. 27

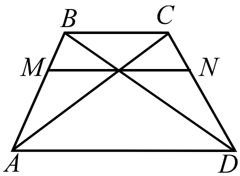


Рис. 28

4.9°. В равнобокой трапеции $d^2 = c^2 + ab,$ где $d -$ диагональ, $c -$ боковая сторона, a и $b -$ основания.

Во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований, т. е. $d_1^2 + d_2^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2 \cdot ab.$

4.10°. Во всякой трапеции с основаниями a и b отрезок с концами на боковых сторонах, проходящий через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен $\dfrac{2ab}{a+b}$ (на рис. 28 отрезок MN).

4.11°. Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Докажем, например, утверждение 4.9°.

□ Применяем теорему косинусов (см. рис. 29а и б):

$\underline{\Delta ACD}$: $d_1^2 = a^2 + c_2^2 - 2a \cdot c_2 \cdot \cos\varphi,$

$\underline{\Delta BCD}$: $d_2^2 = b^2 + c_2^2 + 2b \cdot c_2 \cdot \cos\varphi$ (т. к. $\cos\left(180^\circ - \varphi\right) = -\cos\varphi$).

Складывая, получаем

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c_2^2 + \left(c_2^2 - 2\left(a-b\right)c_2\cos\varphi\right). \qquad (2)$$

Проводим $CK \parallel BA$ (рис. 29в), рассматриваем треугольник KCD: $c_1^2 = c_2^2 + \left(a-b\right)^2 - 2c_2 \cdot \left(a-b\right) \cdot \cos\varphi.$ Используя последнее равенство, заменяем выражение в скобках в (2):

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c_2^2 + \left(c_1^2 - \left(a-b\right)^2\right) = \left(a^2 + b^2 + c_2^2\right) + \left(c_1^2 - a^2 - b^2 + 2ab\right).$$

Окончательно имеем $\boxed{d_1^2 + d_2^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2ab.}$

В случае равнобокой трапеции $d_1 = d_2 = d$, $c_1 = c_2 = c$, поэтому получаем $\boxed{d^2 = c^2 + ab.}$ ■

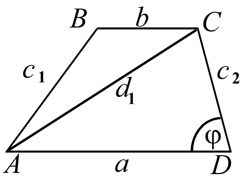


Рис. 29а

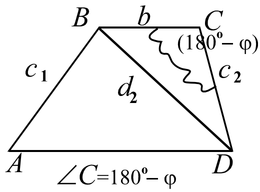


Рис. 29б

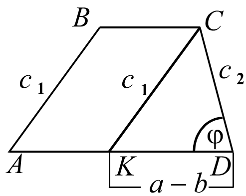


Рис. 29в

Пример 17. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 5, одна из диагоналей равна 6. Найдите площадь трапеции, если её диагонали перпендикулярны.

△ $AC =$ 6, $BM = MC$, $AN = ND$, $MN = 5$ (рис. 30а). Во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой (свойство 4.2°). Треугольник BOC прямоугольный (по условию $AC \perp BD$), OM – его медиана, проведённая из вершины прямого угла, она равна половине гипотенузы: $OM = \frac{1}{2}BC.$ Аналогично устанавливается $ON = \frac{1}{2}AD,$ поэтому $MN = \frac{1}{2}(BC + AD).$ Через точку D проведём прямую, параллельную диагонали AC, пусть K – её точка пересечения с прямой BC (рис. 30б).

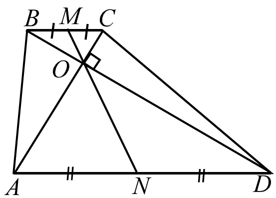


Рис. 30а

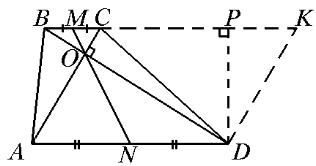


Рис. 30б

По построению $ACKD$ – параллелограмм, $DK = AC$, $CK = AD$ и $\angle BDK = 90^\circ$ (т. к. угол BDK равен углу между диагоналями трапеции). Прямоугольный треугольник BDK с гипотенузой $BK = BC + AD = 2MN = 10$ и катетом $DK = 6$ имеет площадь $S = \frac{1}{2}DK \cdot BD = \frac{1}{2}DK\sqrt{BK^2 - DK^2} = 24.$ Но площадь треугольника BDK равна площади трапеции, т. к. если $DP \perp BK$, то

$$S_{BDK} = \frac{1}{2} BK \cdot DP = \frac{1}{2}(BC + AD)DP = S_{ABCD}.$$

Итак, $S_{ABCD} = S = 24.$ ▲

Пример 18. Диагонали трапеции, пересекаясь, разбивают её на четыре треугольника с общей вершиной. Найдите площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны S_1 и S_2.

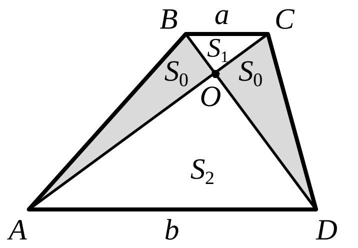


Рис. 31

△ Пусть $BC = a$, $AD = b$, и пусть h – высота трапеции (рис. 31). По свойству 4.1° $S_{ABO} = S_{CDO}$, обозначим эту площадь S_0 (действительно, $S_{ABD} = S_{ACD}$, т. к. у них общие основания и равные высоты; значит, $S_{AOB} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD}$, откуда следует $S_{AOB} = S_{COD}$).

Так как $S_{ABC} = S_0 + S_1 = \frac{1}{2}ah$ и $S_{ACD} = S_0 + S_2 = \frac{1}{2}bh$, то $\frac{S_0 + S_1}{S_0 + S_2} = \frac{a}{b}$.

Далее, треугольники BOC и DOA подобны, площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, значит, $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Таким образом, $\frac{S_0 + S_1}{S_0 + S_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$. Отсюда находим $S_0 = \sqrt{S_1 S_2}$, и поэтому площадь трапеции равна

$$S_1 + S_2 + 2S_0 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \quad ▲$$

Пример 19. Основания равнобокой трапеции равны 8 и 10, высота трапеции равна 3 (рис. 32). Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

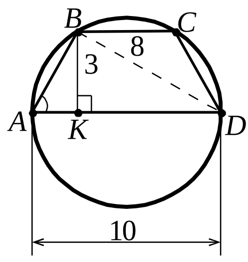


Рис. 32

△ Трапеция равнобокая, по свойству 4.11° около этой трапеции можно описать окружность. Пусть $BK \perp AD$. По свойству 4.6°

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = 1, \quad KD = \frac{AD + BC}{2} = 9.$$

Из прямоугольного треугольника ABK находим $AB = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ и $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. *Окружность, описанная около трапеции* $ABCD$, *описана и около треугольника ABD,* значит (формула (1), § 1), $R = \dfrac{BD}{2\sin A}$. Отрезок BD находим из прямоугольного треугольника KDB: $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 3\sqrt{10}$ (или по формуле $d^2 = c^2 + ab$), тогда

$$R = \frac{3\sqrt{10}}{2 \cdot 3/\sqrt{10}} = 5. \ \blacktriangle$$

<u>Решение задач 15 – 18 дают следующие свойства трапеций:</u>

4.12°. Площадь трапеции равна площади треугольника, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а третья равна сумме оснований.

4.13°. Если S_1 и S_2 – площади треугольников, прилежащих к основаниям, то площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам равны $\sqrt{S_1 S_2}$, а площадь всей трапеции равна $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

4.14°. Радиус окружности, описанной около трапеции, находится по формуле $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где a – какая-то сторона (или диагональ трапеции), α – смотрящий на неё вписанный угол.

Домашнее задание

Прежде чем приступать к его выполнению, ознакомьтесь с нашими **пожеланиями** и **требованиями.**

1. За краткий ответ «да», «нет», «не может быть» без пояснений (доказательство, опровергающий пример) ставится 0 очков. Примеры ответов приведены далее.

2. Если в решении длина какого-либо отрезка выразилась иррациональным числом (например, $a = \sqrt{5}$), то ни в дальнейших вычислениях, ни в ответе не следует заменять это точное значение на приближённое.

3. Если в решении использовалась тригонометрия и получилось, например, $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, то не следует определять величину угла α по таблице или на калькуляторе приближённо и затем тем же способом находить значение $\cos\alpha, \sin 2\alpha, \sin\left(\alpha + 45^\circ\right)$ и т. п. Все значения других тригонометрических функций определяются *только по формулам.*

Например, $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{1}{3}$, если угол α тупой, и $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

а $\sin\left(\alpha + 45^{\circ}\right) = \sin\alpha \cdot \cos 45^{\circ} + \cos\alpha \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)$.

4. Если в Задании контрольный вопрос сопровождается поясняющим рисунком, при ответе перенесите рисунок с теми же обозначениями в свою тетрадь, – это облегчит Вашему педагогу проверку работы.

5. Рисунок к задаче должен быть достаточно большим и ясным, чтобы на нём уместились все введённые Вами обозначения углов, отрезков и данные задачи (посмотрите на рис. 4, 8(а, б) или рис. 30(а, б, в) Задания: как хороший рисунок и обозначения помогают увидеть простое решение).

6. Стремитесь к тому, чтобы Ваше решение было кратким, но обоснованным, и было ясным и понятным для проверяющего (работа проверяется без Вас, Вы не можете комментировать, что же имелось в виду или почему такое равенство имеет место). Для этого полезно решение разбивать на шаги: 1)…, 2)…, 3)… и то, что вычислено или выражено и важно для дальнейшего, выделить, например, так $\boxed{S_0 = \sqrt{S_1 S_2}}$ или $\boxed{S_{ADK} = 24}$.

Кроме того, вычисления разумно (а математика – это здравый смысл) проводить в кратких обозначениях, например

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m-b}{a-m}, \text{ а не} \left(\frac{CK}{NP} = \frac{MN-ME}{AD-MF}\right)$$

или $c_1^2 = \left(a-b\right)^2 + c_2^2 - 2\left(a-b\right)c_2\cos\varphi$,

(а не $CK^2 = \left(AD-BC\right)^2 - 2\left(AD-BC\right)\cdot CD\cdot\cos\left(\angle ADC\right)$).

<u>Примеры ответов на контрольные вопросы</u>

<u>Вопрос</u>. Можно ли внутри прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 поместить круг площадью 25/8?

<u>Ответ</u>: Да, можно. Докажем это.

В прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c радиус r вписанной окружности выражается формулой $r = \frac{a+b-c}{2}$ (рис. 33 напоминает доказательство).

При $a = 3,\ b = 4$ находим $c = 5,\ r = 1$. Площадь вписанного круга равна $\pi r^2 = \pi$; так как $\frac{25}{8} < \frac{25,04}{8} = 3,13 < 3,14 < \pi,$ то радиус r_0 круга площадью 25/8 меньше 1. Он помещается внутри вписанного круга (если совместить их центры) и, следовательно, внутри треугольника.

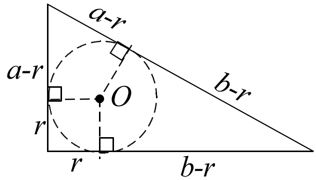


Рис. 33

<u>Вопрос</u>. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый $n-$ угольник при $n > 3$?

<u>Ответ</u>: Три. Докажем это.

Из вершины (например A_1) выходит $(n-1)$ отрезков, два из них $(A_1A_2$ и $A_1A_n)-$ стороны, остальные $(n-3)-$ диагонали (рис. 34). Выпуклый $n-$угольник разбивается диагоналями на $(n-2)$ треугольника.

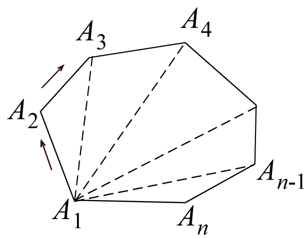


Рис. 34

Сумма углов каждого треугольника равна 180°, значит сумма всех углов выпуклого $n-$ угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Сумма углов внутренних и внешних (по одному при каждой вершине) очевидно равна $180^\circ \cdot n,$ тогда сумма внешних углов равна

$$180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ\ (!).$$

<u>Наглядно</u>: если приложить вектор к стороне A_1A_2 и обойти по периметру $n-$ угольник, двигая вектор, то вернувшись на сторону A_1A_2, обнаружим, что, сделав полный поворот, вектор принял прежнее положение. Угол поворота вектора равен сумме внешних углов.

Если предположить, что в выпуклом $n-$ угольнике $(n > 3)$ хотя бы 4 острых угла, то сумма их внешних углов (они тупые) будет больше $90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$, что не может быть. Значит острых углов не более трёх.

Вопрос. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC таковы, что $a_1 < a$, $b_1 < b$, $c_1 < c$. Верно ли, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ меньше площади треугольника ABC?

Ответ: Нет. Приведём пример (рис. 35).

Рассмотрим два равнобедренных треугольника: $\underline{\Delta ABC}$, в котором

$AC = BC = a$, $\angle ACB = 150^\circ$,

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2 + 2a^2\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{2+\sqrt{3}} = a\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin 150^\circ = \frac{a^2}{4};$$

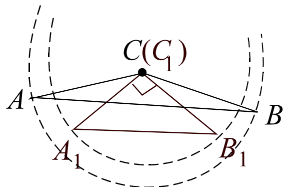


Рис. 35

$\Delta A_1B_1C_1$, в котором $A_1C_1 = B_1C_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}a < a$,

$$\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ,\ A_1B_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}a\right)\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a < \sqrt{2}a < \frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}} = AB,$$

а $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}a\right)^2 = \frac{3}{8}a^2 > \frac{1}{4}a^2 = S_{ABC}$.

Контрольные вопросы

1(2). Стороны треугольника равны 11, 13, 15. Найдите его медиану, проведённую из вершины меньшего угла.

2(2). Найдите отношение суммы квадратов длин сторон треугольника к сумме квадратов длин его медиан.

3(2). Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. A_2, B_2, C_2 – середины отрезков OA, OB, OC соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь шестиугольника $A_2C_1B_2A_1C_2B_1$ равна 12.

4(6). Стороны треугольника равны a, b, c, а противолежащие углы – α, β, γ соответственно. Возможно ли, что:

а) $a\cos\gamma = c\cos\alpha$;

б) $c^2 = a^2 + b^2 - ab\cos(\alpha+\beta)$;

в) $c^2 = 2a^2 + 2b^2$?

5(3). Две стороны треугольника равны 10 и 12, а его площадь равна 15. Найдите медиану треугольника, проведённую к третьей стороне.

6(6). а) Существует ли треугольник с медианами 5, 7, 8? Если да, то найдите его площадь.

б) Существует ли треугольник с высотами 5, 7, 8? Если да, то найдите его площадь.

7(6). а) Точки M и N – середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Точка D лежит на отрезке AB, причём $AD:DB=2:3$. Прямые CD и MN пересекаются в точке P. Найдите отношение площади треугольника CPN к площади треугольника ABC.

б) Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно, причём $AP:PB=1:3$, $BQ:QC=5:1$. Прямые PQ и AC пересекаются в точке R. Найдите площадь треугольника RPC, если площадь треугольника ABC равна 1.

в) Точки K, L, M лежат на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC соответственно, причём площади треугольников AKM, CLM, BKL, KLM равны 30, 15, 7, 18 соответственно. Определите соотношения $AK:KB$, $AM:MC$, $CL:LB$.

8(5). Точки P и Q лежат на сторонах BC и AB параллелограмма $ABCD$ соответственно, причём $AQ:QB=0{,}5$; $BP:PC=0{,}75$. Отрезки CQ и AP пересекаются в точке L, а DQ и AP – в точке M. Найдите площадь треугольника LMQ, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

9(3). В треугольнике ABC известно, что $AB=7$, $BC=11$, $\angle ABC=150^\circ$. Найдите радиусы вписанной и описанной окружности треугольника.

10(5). а) Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются в точке O и перпендикулярны друг другу (рис. 36). Как доказать, что $AC^2+BD^2=4R^2$?

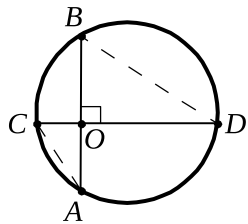


Рис. 36

б) В окружность радиуса 5 вписана трапеция $ABCD$, в которой диагонали AC и BD перпендикулярны друг другу и отношение оснований $BC:AD=1:2$. Чему равны стороны и площадь трапеции?

11(4). Докажите, что сумма длин медиан треугольника меньше его периметра, но больше трёх четвертей периметра.

12(6). Пусть r – радиус вписанной в треугольник окружности; r_a, r_b, r_c – радиусы трёх его вневписанных окружностей; S – площадь треугольника. Докажите, что

а)(3) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$; **б)(3)** $S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$.

13(4). Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам двумя способами:

а) выражая отношение площадей треугольников;

б) с помощью теоремы синусов.

14(4). Известно, что у некоторой трапеции существуют вписанная и описанная окружности, а её основания равны 3 и 75. Найдите радиусы обеих окружностей.

Задачи

1(5). В ΔABC угол B – острый, $AB=4$, $BC=5$. Точка M – середина стороны AB. Точка K лежит на стороне BC и $BK=3$. Найдите длину отрезка MK, если площадь треугольника ABC на $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ больше треугольника MBK.

2(5). В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ медиана AD пересекает биссектрису CK в точке O, при этом $AD\perp CK$. Найдите отношение $S_{OKBD}:S_{ABC}$.

3(3). Стороны и углы треугольника связаны соотношением $\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}$ (углы α, β лежат напротив сторон a и b соответственно). Верно ли, что треугольник равнобедренный?

4(5). Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AB=3$, $BC=5$, $AC=7$. Найдите AH.

5(6). Отрезки AB и CD являются диаметрами одной окружности, а точка M лежит на этой окружности. P и Q – проекции точки M на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M на окружности.

6(4). Вершины треугольника соединены с центром вписанной окружности. Проведёнными отрезками треугольник разбит на три части, площади которых равны $\frac{195}{2}$, 70, $\frac{85}{2}$. Найдите стороны треугольника.

7(5). В треугольнике ABC угол C равен 60°, $AC:BC=5:2$. Найдите косинус угла B и сторону AC, если биссектриса CF равна $10\sqrt{3}$.

8(5). Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$, в которой $AD>BC$.

а) Докажите, что прямая BO делит трапецию на две равновеликие фигуры.

б) Пусть дополнительно известно, что $AD=3BC$, а M и $N-$ точки касания окружности с боковыми сторонами. Найдите отношение площадей трапеций $ADMN$ и $BCMN$.

9(5). Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника со сторонами 25, 25, 48.

10(6). Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, пересекает основание BC в точке K, а сторону $AB-$ в точке N. Найдите AB, если $BN=17$, $BK=18$.

11(8). Четырёхугольник со сторонами a,b,c,d вписан в окружность.

а)(5) Докажите, что его площадь можно вычислить по формуле $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p – полупериметр четырёхугольника.

б)(3) Пусть дополнительно известно, что в данный четырёхугольник можно вписать окружность. Докажите, что $S=\sqrt{abcd}$.

12(5). Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны, а её радиус в 5 раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. Найдите отношение, в котором точка касания вневписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону.

13* (7). Внутри равностороннего треугольника расположена точка, удалённая от вершин этого треугольника на расстояния 3, 8, 9. Найдите площадь треугольника.

Указание. Отразите эту точку относительно всех сторон треугольника.