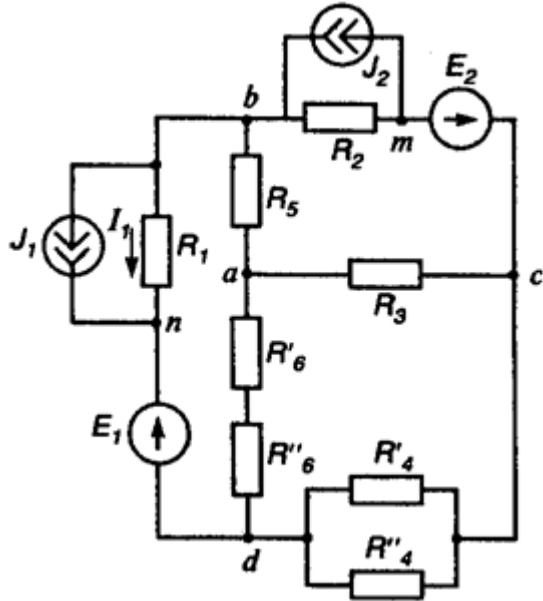


Задание 1

Линейные электрические цепи постоянного и синусоидального тока

Задача 1.1. Линейные электрические цепи постоянного тока

Дана электрическая схема (рис. 1.7):



$$\begin{aligned}
 R_1 &= 325 \text{ Ом}; \\
 R_2 &= 100 \text{ Ом}; \\
 R_3 &= 150 \text{ Ом}; \\
 R'_4 &= 400 \text{ Ом}; R''_4 = 400 \text{ Ом}; \\
 R_5 &= 275 \text{ Ом}; \\
 R'_6 &= 100 \text{ Ом}; R''_6 = 12 \text{ Ом}; \\
 E_1 &= 43 \text{ В}; E_2 = 62.5 \text{ В}; \\
 J_1 &= 0.04 \text{ А}; J_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Рис. 1.7

1. Упростим исходную схему, заменив последовательно и параллельно соединенные резисторы четвертой и шестой ветвей эквивалентными (рис. 1)

$$R_4 = \frac{R'_4 \cdot R''_4}{R'_4 + R''_4} = 200 \text{ Ом}; R_6 = R'_6 + R''_6 = 112 \text{ Ом}.$$

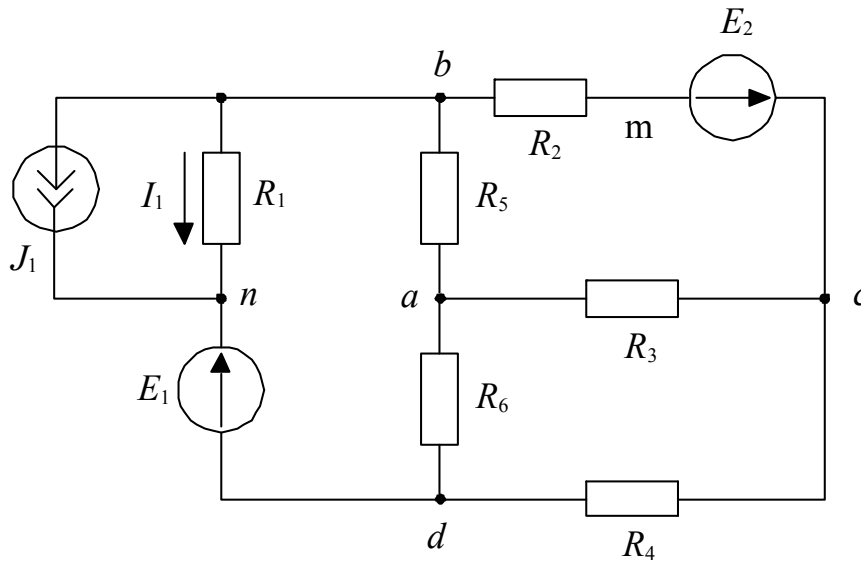


Рис. 1

2. Составим на основании законов Кирхгофа систему уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы (рис. 2).

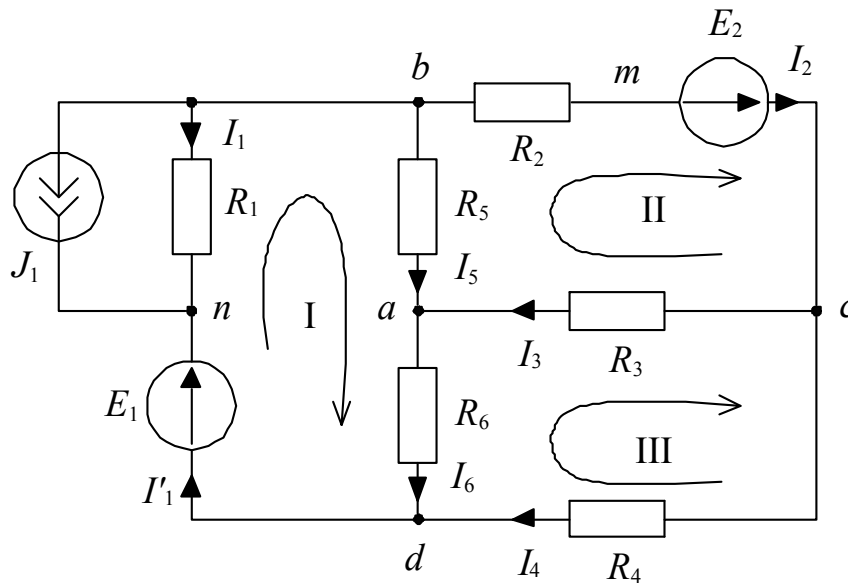


Рис. 2

Для расчетной цепи рис. 1:

- $y = 5$ – число узлов;
- $v = 8$ – число ветвей;
- $v_{um} = 1$ – число ветвей с источником тока.

Количество уравнений по первому закону Кирхгофа $n_1 = y - 1 = 4$; количество уравнений по второму закону Кирхгофа $n_2 = v - v_{um} - (y - 1) = 3$.

Система уравнений для расчета токов ветвей на основании законов Кирхгофа

узел a: $I_3 + I_5 - I_6 = 0$;	}
узел b: $I'_1 - I_2 - I_5 = 0$;	
узел c: $I_2 - I_3 - I_4 = 0$;	
узел n: $J_1 + I_1 + I'_1 = 0$;	
контур I: $-I_1 \cdot R_1 + I_5 \cdot R_5 + I_6 \cdot R_6 = E_1$;	}
контур II: $I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_5 = E_2$;	
контур III: $-I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 - I_6 \cdot R_6 = 0$.	

3. Определим токи во всех ветвях схемы методом контурных токов (рис. 3).

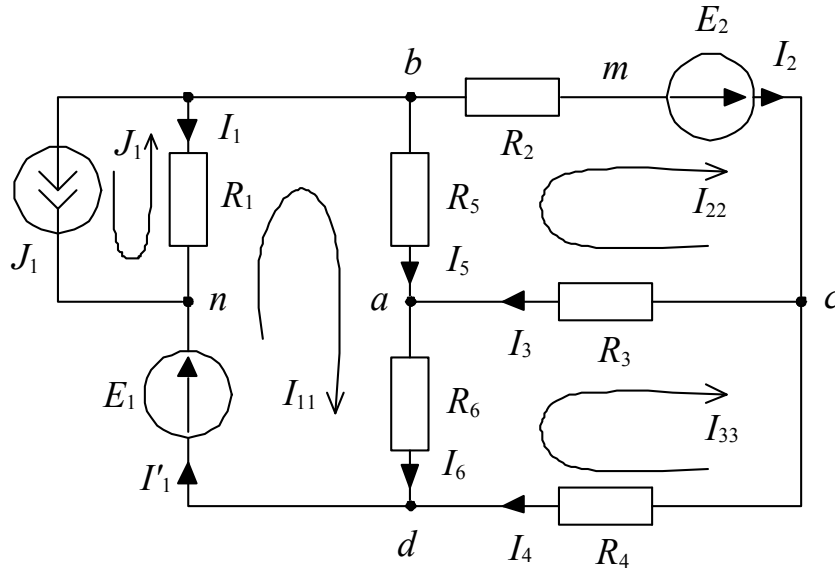


Рис. 3

Контурный ток, проходящий через источник тока, известен и равен току источника тока J_1 . Число независимых уравнений метода контурных токов

$$n_{\text{МКТ}} = \nu - \nu_{\text{ит}} - (y - 1) = 3 .$$

Запишем систему уравнений МКТ для неизвестных контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33}

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_5 + R_6) - I_{22} \cdot R_5 - I_{33} \cdot R_6 = E_1; \\ I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_5) - I_{11} \cdot R_5 - I_{33} \cdot R_3 + J_2 \cdot R_2 = E_2; \\ I_{33} \cdot (R_3 + R_4 + R_6) - I_{11} \cdot R_6 - I_{22} \cdot R_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_5 + R_6) \cdot I_{11} & -R_5 \cdot I_{22} & -R_6 \cdot I_{33} & = & E_1; \\ -R_5 \cdot I_{11} & +(R_2 + R_3 + R_5) \cdot I_{22} & -R_3 \cdot I_{33} & = & E_2 - J_2 \cdot R_2; \\ -R_6 \cdot I_{11} & -R_3 \cdot I_{22} & +(R_3 + R_4 + R_6) \cdot I_{33} & = & 0. \end{cases} \quad (1)$$

Систему уравнений МКТ (1) решаем методом определителей.

Определители системы уравнений (1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 712 & -275 & -112 \\ -275 & 525 & -150 \\ -112 & -150 & 462 \end{vmatrix} = 105911250 ;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 30 & -275 & -112 \\ 62.5 & 525 & -150 \\ 0 & -150 & 462 \end{vmatrix} = 15592125 ;$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 712 & 30 & -112 \\ -275 & 62.5 & -150 \\ -112 & 0 & 462 \end{vmatrix} = 24090500 ;$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 712 & -275 & 30 \\ -275 & 525 & 62.5 \\ -112 & -150 & 0 \end{vmatrix} = 11601500 .$$

Контурные токи по методу определителей:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{15592125}{105911250} = 0.14722 \text{ A};$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{24090500}{105911250} = 0.22746 \text{ A};$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = \frac{11601500}{105911250} = 0.10954 \text{ A}.$$

Токи ветвей по методу контурных токов

$$I_1 = -I_{11} - J_1 = -0.14722 - 0.04 = -0.187 \text{ A};$$

$$I'_1 = I_{11} = 0.147 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{22} = 0.227 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{22} - I_{33} = 0.22746 - 0.10954 = 0.118 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{33} = 0.110 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{11} - I_{22} = 0.14722 - 0.22746 = -0.080 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{11} - I_{33} = 0.14722 - 0.10954 = 0.038 \text{ A}.$$

4. Определим токи во всех ветвях схемы методом узловых потенциалов.

Преобразуем источник тока J_2 с параллельным сопротивлением R_2 в эквивалентный источник ЭДС $J_2 \cdot R_2$ с последовательным сопротивлением R_2 (рис. 3).

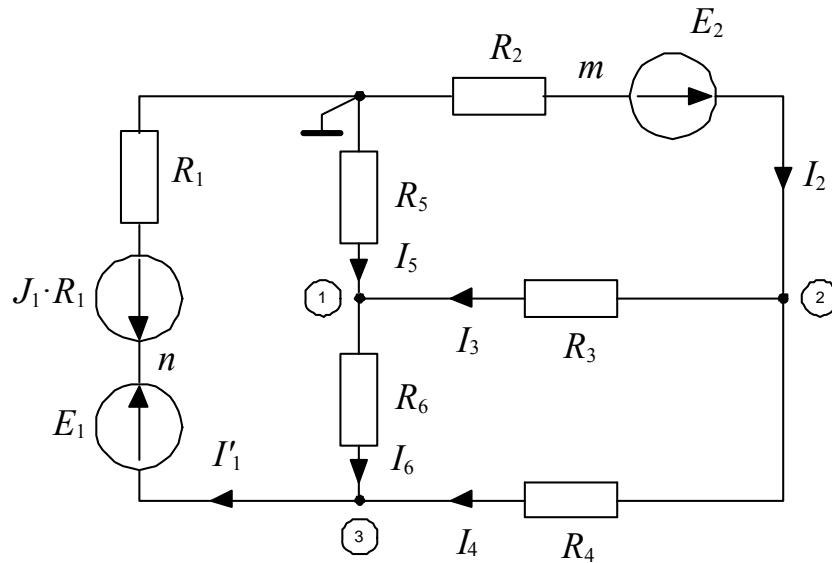


Рис. 4

Полагаем потенциал узла b равным нулю (опорный узел). Число независимых уравнений метода узловых потенциалов для схемы рис. 4

$$n_{\text{МУП}} = y - 1 = 4 - 1 = 3 .$$

Запишем систему уравнений МУП для неизвестных потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R_3} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{R_6} = 0; \\ \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{R_3} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{R_4} = \frac{E_2}{R_2}; \\ \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{R_6} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R_4} = -\frac{E_1 - J_1 R_1}{R_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot \varphi_1 & -\frac{1}{R_3} \cdot \varphi_1 & -\frac{1}{R_6} \cdot \varphi_6 & = & 0; \\ -\frac{1}{R_3} \cdot \varphi_1 & + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \cdot \varphi_2 & -\frac{1}{R_4} \cdot \varphi_3 & = & \frac{E_2}{R_2}; \\ -\frac{1}{R_6} \cdot \varphi_1 & -\frac{1}{R_4} \cdot \varphi_2 & + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) \cdot \varphi_3 & = & -\frac{E_1}{R_1} + J_1. \end{cases} \quad (2)$$

Систему уравнений МУП (2) решаем методом определителей.

$$\Delta = \left| \begin{pmatrix} 0.0192316 & -0.0066667 & -0.0089286 \\ -0.0066667 & 0.0216667 & -0.005 \\ -0.0089286 & -0.005 & 0.0170055 \end{pmatrix} \right| = 3.5268 \times 10^{-6} ;$$

$$\Delta_1 = \left| \begin{pmatrix} 0 & -0.0066667 & -0.0089286 \\ 0.625 & 0.0216667 & -0.005 \\ -0.0923077 & -0.005 & 0.0170055 \end{pmatrix} \right| = 7.7824 \times 10^{-5} ;$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{pmatrix} 0.0192316 & 0 & -0.0089286 \\ -0.0066667 & 0.625 & -0.005 \\ -0.0089286 & -0.0923077 & 0.0170055 \end{pmatrix} \right| = 1.4021 \times 10^{-4} ;$$

$$\Delta_3 = \left| \begin{pmatrix} 0.0192316 & -0.0066667 & 0 \\ -0.0066667 & 0.0216667 & 0.625 \\ -0.0089286 & -0.005 & -0.0923077 \end{pmatrix} \right| = 6.2941 \times 10^{-5} .$$

Потенциалы узлов

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7.7824 \times 10^{-5}}{3.5268 \times 10^{-6}} = 22.07 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1.4021 \times 10^{-4}}{3.5268 \times 10^{-6}} = 39.76 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6.2941 \times 10^{-5}}{3.5268 \times 10^{-6}} = 17.85 \text{ В}.$$

Токи ветвей по закону Ома

$$I'_1 = \frac{\varphi_3 + E_1}{R_1} - J_1 = \frac{17.85 + 43}{325} - 0.04 = 0.147 \text{ А};$$

$$I_1 = -I'_1 - J_1 = -0.147 - 0.04 = -0.187 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{0 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{0 - 39.76 + 62.5}{100} = 0.227 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_3} = \frac{39.76 - 22.07}{150} = 0.118 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4} = \frac{39.76 - 17.85}{200} = 0.110 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{0 - \varphi_1}{R_5} = \frac{0 - 22.07}{275} = -0.080 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_6} = \frac{22.07 - 17.85}{112} = 0.038 \text{ А}.$$

5. Сравним результаты расчета токов, проведенного двумя методами (табл. 1).

Таблица 1

Метод \	I_1	I'_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
МКТ	-0,187	0,147	0,227	0,118	0,110	-0,080	0,038
МУП	-0,187	0,147	0,227	0,118	0,110	-0,080	0,038

6. Составим баланс мощностей в исходной схеме (рис. 1).

Напряжение на зажимах источника тока

$$U_{J_1} = -I_1 \cdot R_1 = -(-0.187) \cdot 325 = 60.8 \text{ В.}$$

Мощность источников энергии

$$\begin{aligned} P_{ист} &= E_1 \cdot I'_1 + E_2 \cdot I_2 + U_{J_1} \cdot J_1 = \\ &= 43 \cdot 0.147 + 62.5 \cdot 0.227 + 60.8 \cdot 0.04 = 22.94 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Мощность приемников энергии

$$\begin{aligned} P_{пр} &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = \\ &= (-0.187)^2 \cdot 325 + 0.227^2 \cdot 100 + 0.118^2 \cdot 150 + 0.11^2 \cdot 200 + (-0.08)^2 \cdot 275 + 0.038^2 \cdot 112 = \\ &= 22.95 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Погрешность расчета баланса мощностей

$$\delta_{\%} = \frac{|P_{ист} - P_{пр}|}{P_{ист}} 100\% = \frac{|22.94 - 22.95|}{22.94} \cdot 100 = 0.04 \text{ \%}.$$