Задача 10

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2$

(2) Система урав.

$\begin{cases} 3 \cdot x^2 \, 3y = 0 \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$, получим из первого уравнения выражаем x и подставляем во второе уравнение

а) $x_1 = -\sqrt{y}$

$3\sqrt{y} + 3y^2 = 0$

$x_2 = \sqrt{y}$

$-3\sqrt{y} + 3y^2 = 0$, отсюда

$y_1 = 0$, $y_2 = 1$ $y_3 = 0$ $y_4 = 1$, значения подставляем в выражение для $x \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$.

б) Из первого уравнения выражаем y и подставим во второе уравнение

$y_1 = -\sqrt{x}$

$3\sqrt{x} + 3x^2 = 0$

$y_2 = \sqrt{x}$

$-3\sqrt{x} + 3x^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 1$. данные значения x подставляем в выражение для y. Получаем $y_1 = 0$; $y_2 = -1$; $y_3 = 0$; $y_4 = 1$

Количество критических точек равно 2.

$M_1 (0;0)$; $M_2 (1;1)$.

③ Найдем частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

④ Вычислим значения этих частных производных второго порядка в критических точках $M(x_0; y_0)$

- Вычисляем значения для точки $M_1(0;0)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0;0) = 0 \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0;0) = -3 \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0;0) = 0$$

$AC - B^2 = -9 < 0$, то глобального экстремума нет.

- Вычисляем значения для точки $M_2(1;1)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1;1) = 6 \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1;1) = 6 \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1;1) = -3$$

$AC - B^2 = 27 > 0$ и $A > 0$, то в точке $M_2(1;1)$ имеется минимум $z(1;1) = -1$

Вывод: в точке $M_2(1;1)$ имеется минимум

$z(1;1) = -1$