**Задача № 3.5**

Фирма выпускает три вида изделий А, Б, В, причем плановый сменный выпуск составляет 9 шт. изделия А, 7 шт. из­делия Б, 6 шт. изделия В. Сменные ресурсы: 51 ед. производственного оборудования, 48 ед. сырья, 67 ед. электроэнергии, их расход на одно изделие дан в табл. Прибыль от реализации изделий А – 40 усл. ед., Б – 50 усл. ед., В – 10 усл. ед.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Изделие А | Изделие Б | Изделие В |
| Оборудование  | 3 | 2 | 0 |
| Сырье  | 1 | 4 | 0 |
| Электроэнергия  | 3 | 3 | 1 |

Определить, сколько изделий каждого вида надо производить, чтобы получить максимальную прибыль от выпускаемых сверх плана изделий.

**Решение:**

1. Составим математическую модель поставленной задачи:

- цель – получение максимальной прибыли от выпускаемых сверх плана изделий;

- параметрами являются все числовые данные, приведенные в условии задачи;

- управляющие переменные:

х1 – число изделий А

х2 – число изделий Б

х3 – число изделий В;

- ограничения: количество сменных ресурсов, плановый сменный выпуск.

В соответствии с этими ограничениями выпишем область допустимых решений:

$$\left\{\begin{array}{c}3х\_{1}+2х\_{2}\leq 51,\\х\_{1}+4х\_{2}\leq 48,\\3х\_{1}+3х\_{2}+х\_{3}\leq 67,\\х\_{1}\geq 9,\\х\_{2}\geq 7,\\х\_{3}\geq 6.\end{array}\right.$$

$$х\_{1},х\_{2},х\_{3}\geq 0$$

Первые три неравенства соответствуют ограничениям по ресурсам, с четвертого по шестое – в соответствии с планом выпуска.

Целевая функция или критерий эффективности задачи имеет вид:

F(X) = 40х1+50х2+10х3 – 770 → max

В формуле буквой F(X) обозначена прибыль. Ее надо максимизировать. Каждое слагаемое определяет прибыль от производства изделий каждого вида соответственно в количествах х1, х2, х3.

770 – это прибыль от реализации планового сменного задания.

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 40x1 + 50x2 + 10x3-770 при следующих условиях-ограничениях.

При вычислениях значение Fc = -770 временно не учитываем.

$$\left\{\begin{array}{c}3х\_{1}+2х\_{2}\leq 51,\\х\_{1}+4х\_{2}\leq 48,\\3х\_{1}+3х\_{2}+х\_{3}\leq 67,\\х\_{1}\geq 9,\\х\_{2}\geq 7,\\х\_{3}\geq 6.\end{array}\right.$$

$$х\_{1},х\_{2},х\_{3}\geq 0$$

1. Приведем систему неравенств к канонической форме.

3x1 + 2x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 = 51

1x1 + 4x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 = 48

3x1 + 3x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 1x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 = 67

1x1 + 0x2 + 0x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6-1x7 + 0x8 + 0x9 = 9

0x1 + 1x2 + 0x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7-1x8 + 0x9 = 7

0x1 + 0x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8-1x9 = 6

2) Введем искусственные переменные x: в 4-м равенстве вводим переменную x10; в 5-м равенстве вводим переменную x11; в 6-м равенстве вводим переменную x12;

3x1 + 2x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 + 0x10 + 0x11 + 0x12 = 51

1x1 + 4x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 + 0x10 + 0x11 + 0x12 = 48

3x1 + 3x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 1x6 + 0x7 + 0x8 + 0x9 + 0x10 + 0x11 + 0x12 = 67

1x1 + 0x2 + 0x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6-1x7 + 0x8 + 0x9 + 1x10 + 0x11 + 0x12 = 9

0x1 + 1x2 + 0x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7-1x8 + 0x9 + 0x10 + 1x11 + 0x12 = 7

0x1 + 0x2 + 1x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 + 0x8-1x9 + 0x10 + 0x11 + 1x12 = 6

Для постановки задачи на максимум целевую функцию запишем так:
F(X) = 40x1+50x2+10x3 - Mx4 - Mx5 - Mx6 - Mx7 - Mx8 - Mx9 - Mx10 - Mx11 - Mx12 → max

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной М, очень большое положительное число, которое обычно не задается.

Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.

Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

x10 = 9-x1+x7

x11 = 7-x2+x8

x12 = 6-x3+x9

которые подставим в целевую функцию:

F(X) = 40x1 + 50x2 + 10x3 - M(9-x1+x7) - M(7-x2+x8) - M(6-x3+x9) → max
или

F(X) = (40+M)x1+(50+M)x2+(10+M)x3+(-M)x7+(-M)x8+(-M)x9+(-22M) → max

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.
**Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.
Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x4, x5, x6, x10, x11, x12
Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:
X1 = (0,0,0,51,48,67,0,0,0,9,7,6)
**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x4 | 51 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | 48 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x6 | 67 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x10 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x11 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x12 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | -22M | -40-M | -50-M | -10-M | 0 | 0 | 0 | M | M | M | 0 | 0 | 0 |

**Итерация №0**.
**1. Проверка критерия оптимальности**.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
**2. Определение новой базисной переменной**.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент по модулю.
**3. Определение новой свободной переменной**.
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2
и из них выберем наименьшее:
min (51 : 2 , 48 : 4 , 67 : 3 , - , 7 : 1 , - ) = 7
Следовательно, 5-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | min |
| x4 | 51 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 251/2 |
| x5 | 48 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| x6 | 67 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 221/3 |
| x10 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x11 | 7 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | **7** |
| x12 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | - |
| F(X1) | -22M | -40-M | **-50-M** | -10-M | 0 | 0 | 0 | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x11 в план 1 войдет переменная x2.
Строка, соответствующая переменной x2 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x11 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=1
На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1.
В остальных клетках столбца x2 плана 1 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x2 и столбец x2.
Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.
Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.
НЭ = СЭ - (А\*В)/РЭ
СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (1), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x4 | 37 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | -2 | 0 |
| x5 | 20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | -4 | 0 |
| x6 | 46 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | -3 | 0 |
| x10 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x2 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x12 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X1) | 350-15M | -40-M | 0 | -10-M | 0 | 0 | 0 | M | -50 | M | 0 | 50+M | 0 |

**Итерация №1**.
**1. Проверка критерия оптимальности**.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
**2. Определение новой базисной переменной**.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент по модулю.
**3. Определение новой свободной переменной**.
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1
и из них выберем наименьшее:
min (37 : 3 , 20 : 1 , 46 : 3 , 9 : 1 , - , - ) = 9
Следовательно, 4-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | min |
| x4 | 37 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | -2 | 0 | 121/3 |
| x5 | 20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | -4 | 0 | 20 |
| x6 | 46 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | -3 | 0 | 151/3 |
| x10 | 9 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **9** |
| x2 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| x12 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | - |
| F(X2) | 350-15M | **-40-M** | 0 | -10-M | 0 | 0 | 0 | M | -50 | M | 0 | 50+M | 0 | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x10 в план 2 войдет переменная x1.
Строка, соответствующая переменной x1 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x10 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=1
На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1.
В остальных клетках столбца x1 плана 2 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x1 и столбец x1.
Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.
Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | -3 | -2 | 0 |
| x5 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 0 | -1 | -4 | 0 |
| x6 | 19 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 0 | -3 | -3 | 0 |
| x1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x2 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x12 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X2) | 710-6M | 0 | 0 | -10-M | 0 | 0 | 0 | -40 | -50 | M | 40+M | 50+M | 0 |

**Итерация №2**.
**1. Проверка критерия оптимальности**.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
**2. Определение новой базисной переменной**.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как это наибольший коэффициент по модулю.
**3. Определение новой свободной переменной**.
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3
и из них выберем наименьшее:
min (- , - , 19 : 1 , - , - , 6 : 1 ) = 6
Следовательно, 6-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | min |
| x4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | -3 | -2 | 0 | - |
| x5 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 0 | -1 | -4 | 0 | - |
| x6 | 19 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 0 | -3 | -3 | 0 | 19 |
| x1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x2 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| x12 | 6 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | **6** |
| F(X3) | 710-6M | 0 | 0 | **-10-M** | 0 | 0 | 0 | -40 | -50 | M | 40+M | 50+M | 0 | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x12 в план 3 войдет переменная x3.
Строка, соответствующая переменной x3 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x12 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=1
На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1.
В остальных клетках столбца x3 плана 3 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x3 и столбец x3.
Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.
Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | -3 | -2 | 0 |
| x5 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 0 | -1 | -4 | 0 |
| x6 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 1 | -3 | -3 | -1 |
| x1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x2 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X3) | 770 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -40 | -50 | -10 | 40+M | 50+M | 10+M |

**Итерация №3**.
**1. Проверка критерия оптимальности**.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
**2. Определение новой базисной переменной**.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x8, так как это наибольший коэффициент по модулю.
**3. Определение новой свободной переменной**.
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai8
и из них выберем наименьшее:
min (10 : 2 , 11 : 4 , 13 : 3 , - , - , - ) = 23/4
Следовательно, 2-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (4) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | min |
| x4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | -3 | -2 | 0 | 5 |
| x5 | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **4** | 0 | -1 | -4 | 0 | **23/4** |
| x6 | 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 1 | -3 | -3 | -1 | 41/3 |
| x1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x2 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | - |
| F(X4) | 770 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -40 | **-50** | -10 | 40+M | 50+M | 10+M | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x5 в план 4 войдет переменная x8.
Строка, соответствующая переменной x8 в плане 4, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана 3 на разрешающий элемент РЭ=4
На месте разрешающего элемента в плане 4 получаем 1.
В остальных клетках столбца x8 плана 4 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 4 заполнены строка x8 и столбец x8.
Все остальные элементы нового плана 4, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x4 | 41/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | 21/2 | 0 | 0 | -21/2 | 0 | 0 |
| x8 | 23/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | 1 | 0 | -1/4 | -1 | 0 |
| x6 | 43/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3/4 | 1 | 21/4 | 0 | 1 | -21/4 | 0 | -1 |
| x1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x2 | 93/4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | -1/4 | 0 | 0 |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X4) | 9071/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 121/2 | 0 | -271/2 | 0 | -10 | 271/2+M | M | 10+M |

**Итерация №4**.
**1. Проверка критерия оптимальности**.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
**2. Определение новой базисной переменной**.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x7, так как это наибольший коэффициент по модулю.
**3. Определение новой свободной переменной**.
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai7
и из них выберем наименьшее:
min (41/2 : 21/2 , 23/4 : 1/4 , 43/4 : 21/4 , - , 93/4 : 1/4 , - ) = 14/5
Следовательно, 1-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (21/2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | min |
| x4 | 41/2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | **21/2** | 0 | 0 | -21/2 | 0 | 0 | **14/5** |
| x8 | 23/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | 1 | 0 | -1/4 | -1 | 0 | 11 |
| x6 | 43/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3/4 | 1 | 21/4 | 0 | 1 | -21/4 | 0 | -1 | 21/9 |
| x1 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x2 | 93/4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 0 | -1/4 | 0 | 0 | 39 |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | - |
| F(X5) | 9071/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 121/2 | 0 | **-271/2** | 0 | -10 | 271/2+M | M | 10+M | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x4 в план 5 войдет переменная x7.
Строка, соответствующая переменной x7 в плане 5, получена в результате деления всех элементов строки x4 плана 4 на разрешающий элемент РЭ=21/2
На месте разрешающего элемента в плане 5 получаем 1.
В остальных клетках столбца x7 плана 5 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 5 заполнены строка x7 и столбец x7.
Все остальные элементы нового плана 5, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.
Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x7 | 14/5 | 0 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x8 | 23/10 | 0 | 0 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x6 | 7/10 | 0 | 0 | 0 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| x1 | 104/5 | 1 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 93/10 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| F(X5) | 957 | 0 | 0 | 0 | 11 | 7 | 0 | 0 | 0 | -10 | M | M | 10+M |

**Итерация №5**.
**1. Проверка критерия оптимальности**.
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.
**2. Определение новой базисной переменной**.
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x9, так как это наибольший коэффициент по модулю.
**3. Определение новой свободной переменной**.
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai9
и из них выберем наименьшее:
min (- , - , 7/10 : 1 , - , - , - ) = 7/10
Следовательно, 3-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 | min |
| x7 | 14/5 | 0 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | - |
| x8 | 23/10 | 0 | 0 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | - |
| x6 | 7/10 | 0 | 0 | 0 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | -1 | **7/10** |
| x1 | 104/5 | 1 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| x2 | 93/10 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| x3 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | - |
| F(X6) | 957 | 0 | 0 | 0 | 11 | 7 | 0 | 0 | 0 | **-10** | M | M | 10+M | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Формируем следующую часть симплексной таблицы.
Вместо переменной x6 в план 6 войдет переменная x9.
Строка, соответствующая переменной x9 в плане 6, получена в результате деления всех элементов строки x6 плана 5 на разрешающий элемент РЭ=1
На месте разрешающего элемента в плане 6 получаем 1.
В остальных клетках столбца x9 плана 6 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 6 заполнены строка x9 и столбец x9.
Все остальные элементы нового плана 6, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.
Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x7 | 14/5 | 0 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x8 | 23/10 | 0 | 0 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x9 | 7/10 | 0 | 0 | 0 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| x1 | 104/5 | 1 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 93/10 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 67/10 | 0 | 0 | 1 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F(X6) | 964 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 10 | 0 | 0 | 0 | M | M | M |

**1. Проверка критерия оптимальности**.
Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.
Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| x7 | 14/5 | 0 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| x8 | 23/10 | 0 | 0 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| x9 | 7/10 | 0 | 0 | 0 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| x1 | 104/5 | 1 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 93/10 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 67/10 | 0 | 0 | 1 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F(X7) | 964 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 10 | 0 | 0 | 0 | M | M | M |

Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым.
Оптимальный план можно записать так:
x1 = 104/5
x2 = 93/10
x3 = 67/10
F(X) = 40•104/5 + 50•93/10 + 10•67/10 -770 = 194
**Метод Гомори**.
В полученном оптимальном плане присутствуют дробные числа.
По 4-у уравнению с переменной x1, получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане с наибольшей дробной частью 4/5, составляем дополнительное ограничение:
q4 - q41•x1 - q42•x2 - q43•x3 - q44•x4 - q45•x5 - q46•x6 - q47•x7 - q48•x8 - q49•x9≤0
q4 = b4 - [b4] = 104/5 - 10 = 4/5
q41 = a41 - [a41] = 1 - 1 = 0
q42 = a42 - [a42] = 0 - 0 = 0
q43 = a43 - [a43] = 0 - 0 = 0
q44 = a44 - [a44] = 2/5 - 0 = 2/5
q45 = a45 - [a45] = -1/5 + 1 = 4/5
q46 = a46 - [a46] = 0 - 0 = 0
q47 = a47 - [a47] = 0 - 0 = 0
q48 = a48 - [a48] = 0 - 0 = 0
q49 = a49 - [a49] = 0 - 0 = 0
Дополнительное ограничение имеет вид:
4/5-2/5x4-4/5x5 ≤ 0
Преобразуем полученное неравенство в уравнение:
4/5-2/5x4-4/5x5 + x10 = 0
коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.
Поскольку двойственный симплекс-метод используется для поиска минимума целевой функции, делаем преобразование F(x) = -F(X).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 |
| x7 | 14/5 | 0 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x8 | 23/10 | 0 | 0 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x9 | 7/10 | 0 | 0 | 0 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x1 | 104/5 | 1 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 93/10 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 67/10 | 0 | 0 | 1 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x10 | -4/5 | 0 | 0 | 0 | -2/5 | -4/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | -1474194 | 0 | 0 | 0 | -2 | -4 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**1. Проверка критерия оптимальности**.
План 0 в симплексной таблице **является псевдопланом**, поэтому определяем ведущие строку и столбец.
**2. Определение новой свободной переменной**.
Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольший по модулю.
Ведущей будет 7-ая строка, а переменную x10 следует вывести из базиса.
**3. Определение новой базисной переменной**.
Минимальное значение θ соответствует 5-му столбцу, т.е. переменную x5 необходимо ввести в базис.
На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент (РЭ), равный (-4/5).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 |
| x7 | 14/5 | 0 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x8 | 23/10 | 0 | 0 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x9 | 7/10 | 0 | 0 | 0 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x1 | 104/5 | 1 | 0 | 0 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 93/10 | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 3/10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 67/10 | 0 | 0 | 1 | -9/10 | -3/10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x10 | -4/5 | 0 | 0 | 0 | -2/5 | **-4/5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | -1474194 | 0 | 0 | 0 | -2 | **-4** | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| θ |  | - | - | - | -2 : (-2/5) = 5 | -4 : (-4/5) = 5 | - | - | - | - | - |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.
Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 |
| x7 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1/4 |
| x8 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1/4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3/8 |
| x9 | 1 | 0 | 0 | 0 | -3/4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -3/8 |
| x1 | 11 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1/4 |
| x2 | 9 | 0 | 1 | 0 | -1/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3/8 |
| x3 | 7 | 0 | 0 | 1 | -3/4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -3/8 |
| x5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -11/4 |
| F(X0) | -1474190 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | -5 |

Решение получилось целочисленным. Нет необходимости применять метод Гомори.
Оптимальный целочисленный план можно записать так:
x7 = 2
x8 = 2
x9 = 1
x1 = 11
x2 = 9
x3 = 7
x5 = 1
F(X) = 40•11 + 50•9 + 10•7 -770 = 190

Ответ: чтобы получить максимальную прибыль от выпускаемых сверх плана изделий необходимо произвести 11 изделий А, 9 изделий Б и 7 изделий В, при этом максимальная прибыль от выпускаемых изделий сверх плана составит 190 усл. ед.