ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра процессов управления и информационных систем

Теория автоматического управления часть 1

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Институты: Системного анализа, автоматики и управления Приборостроения Информационных систем и вычислительной техники Машиностроительно-технологический Радиоэлектроники

Специальности: 220201.65 – Управление и информатика в технических системах 220301.65 – Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям) 200101.65 – Приборостроение 230101.65 – Вычислительные машины, комплексы системы и сети

- 151001.65 Технология машиностроения
- 210106.65 Промышленная электроника

Санкт-Петербург Издательство СЗТУ 2009

Утверждено редакционно-издательским советом университета УДК 681.5

Теория автоматического управления. ч. 1: учебно-методический комплекс / сост. Л.П.Козлова, О.И.Золотов - СПб.: Изд-во СЗТУ, 2009. - 252 с

Учебно-методический комплекс разработан в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

В дисциплине рассматриваются общие сведения о системах управления и их моделях, методы анализа и синтеза линейных непрерывных, дискретных, нелинейных систем. Рассматривается проблема математического описания систем управления, раскрываются взаимосвязи понятия управления и информации, структуры систем и фундаментальных свойств их поведения – устойчивости.

Для разных специальностей дисциплина имеет свое название: 220201.65, 220301.65, 151001.65, 210106.65 - Теория автоматического управления; 200101.65 – Основы автоматического управления; 230101.65 – Основы теории управления.

Рассмотрено на заседании кафедры процессов управления и информационных систем 01.12.08 г., одобрено методической комиссией факультета общепрофессиональной подготовки 12.12.08 г.

Рецензенты: кафедра АПП СЗТУ (А.А. Сарвин, д-р. техн. наук, проф.)

Составители: Л.П.Козлова, канд. техн. наук, доц., О.И.Золотов, канд. техн. наук, проф.

© Северо-Западный государственный заочный технический университет, 2009

© Козлова Л.П., Золотов О.И., 2009

1. ИНФОРМАЦИЯ О ДИСЦИПЛИНЕ



1.1. Предисловие

Учебно-методический комплекс «Теория автоматического управления» предназначен студентам специальностей 220201.65 – Управление и информатика в технических системах; 220301.65 – Автоматизация производственных процессов и производство; 200101.65 – Приборостроение; 230101.65 – Вычислительные машины, комплексы системы и сети; 151001.65 – Технология машиностроения; 210106.65 – Промышленная электроника.

Для разных специальностей дисциплина имеет свое название: 220201.65, 220301.65, 151001.65, 210106.65 – Теория автоматического управления; 200101.65 – Основы автоматического управления; 230101.65 – Основы теории управления.

Изучение курса завершается сдачей экзамена (кроме специальности 230101.65, студенты сдают зачет), при этом студенты всех специальностей предварительно выполняют курсовую работу.

Эта дисциплина «Теория автоматического управления» ориентирована на получение сведений о принципах построения САУ и содержит ряд разделов, при изучении которых следует выполнить блок лабораторных работ.

При работе с любым разделом дисциплины после изучения материала очередной темы следует ответить на вопросы для самопроверки, а после завершения работы с разделом – на вопросы теста текущего контроля. Целью изучения дисциплины «Теория автоматического управления» является приобретение студентами знаний и навыков в области построения и исследования САУ.

Задача изучения дисциплины – освоение принципов функционирования и построения математических моделей объектов и систем непрерывного и дискретного управления, формирование у студентов современного представления о технических средствах САУ, развитие у студентов навыков самостоятельно решать конкретные технологические и проектные задачи. Дать необходимые знания для освоения способов синтеза САУ и научить обоснованно выбирать их. Познакомить с современными методами анализа и синтеза динамических систем с использованием типовых пакетов прикладных программ.

Иметь представление:

- О перспективах развития автоматических систем;
- Об областях их применения;
- О месте и роли теории автоматического управления в общей системе знаний.

Знать:

- Виды математических моделей;
- Частотные и алгебраические методы исследования автоматических систем;
- Виды регуляторов;
- Виды нелинейностей систем;
- Способы синтеза и оптимизации автоматических систем.

Уметь:

- составлять математические модели систем;
- осуществлять их преобразования к виду, удобному для исследования на ЭВМ;
- строить частотные и временные характеристики;
- основные методы анализа САУ во временной и частотной областях;
- анализировать устойчивость и качество линейных и нелинейных САУ;
- провести синтез регулятора;
- осуществлять синтез и оптимизацию автоматических систем.

Владеть методами:

- Составления математических моделей систем управления;
- Преобразования структурных схем систем управления;
- Исследования линейных и нелинейных систем управления;
- Расчета и выбора регуляторов;
- Синтеза систем управления.

Место дисциплины в учебном процессе

Дисциплина базируется на курсах «Математика», «Физика», «Основы электротехники», изучаемых в первом, втором и третьем семестрах. Знания, полученные при изучении данной дисциплины, являются базой для всех специальных дисциплин, связанных с использованием систем автоматического управления.

1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы

	Всего часов										
Вид учебной работы		Форма обучения									
	Очная	Заочная									
Общая трудоемкость дисциплины	260										
Работа под руководством преподавателя (включая дистанционные обучаю- щие технологии - ДОТ)	156	156	156								
В том числе аудиторные занятия:	Спец. 220201.65 220301.65 210106.65	Спец. 220201.65 220301.65 200101.65 230101.65 151001.65 210106.65	Спец. 220201.65 220301.65 200101.65 230101.65 151001.65 210106.65								
лекции	56	44	44								

1.2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы

лабораторные работы	32	16	16
Самостоятельная работа студента	104	104	104
Промежуточный кон- троль, количество В том числе	7	8	8
контрольная работа		1	1
курсовая работа	1	1	1
Вид итогового контроля		Экзамен, заче	Г

1.2.2. Перечень видов практических занятий и видов контроля

- Лабораторные работы.
- Тестовый контроль: текущий по разделам курса.
- Контрольная работа.
- Курсовая работа.

итоговый - экзамен для всех специальностей кроме 230101.65; зачет для специальности 230101.65.



2. РАБОЧИЕ УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

2.1. Рабочая программа (Объём курса 260 часов)

Раздел 1. Введение. Основные понятия и определения

(10 часов) [1], с. 15-35; [2], с. 13-18

Основные понятия и определения теории автоматического управления. Терминология и стандарты. Общая характеристика различных видов математического описания автоматических систем: дифференциальных урав-

нений, передаточных функций, детализированных структур и векторноматричных моделей. Классификация систем по типу информации, используемой при формировании управления - разомкнутые, замкнутые системы. Классификация математических моделей автоматических систем - понятие о непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных, детерминированных и стохастических САУ. Примеры автоматических систем и области их применения. Системы регулирования и следящие системы. Историческая справка. Вклад русских и советских ученых в развитие теории автоматического управления. Место современной теории среди других научных направлений.

Раздел 2. Общая характеристика автоматического управления (10 часов)

[1], c. 25-33; [2], c. 31-34

Основные понятия и определения теории автоматического управления (на примере системы стабилизации).

Статические свойства систем автоматического управления (проблема точности). Роль обратной связи. Основные принципы автоматического управления: регулирование по отклонению и по возмущению. Физика процессов в замкнутых системах.

Общая структура замкнутой САУ; примеры элементов. Классификация автоматических систем по принципу действия; по цели управления; по классу уравнений, описывающих систему; по характеру преобразования переменных в элементах системы; по характеру процессов в системе; по числу входных и выходных переменных. Примеры автоматических систем, области их применения.

Раздел 3. Теория линейных непрерывных систем (60 часов) [1], с. 35-40; [2], с. 19-46

Тема 1. Виды математического описания непрерывных систем

Математические модели вход-выход: дифференциальные уравнения (ДУ), передаточные функции (ПФ), операторные ПФ, частотные ПФ, коэффициенты передачи, временные характеристики. Связь между различными формами входвыходного описания. Связь между входом и выходом системы во временной области: непосредственное решение ДУ, применение методов операционного исчисления, интеграл свертки. Весовая и переходная функции. Передаточные функции типовых соединений звеньев.

Тема 2. Частотные характеристики динамических систем

Определения, основная теорема. «Физический» смысл частотной передаточной функции. Экспериментальное определение частотных характеристик. Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Частотные и временные характеристики пропорционального, интегрирующего (обобщенного интегрирующего), дифференцирующего (обобщенного дифференцирующего), апериодического и форсирующего звеньев. Физический смысл постоянной времени интегрирующего звена.

Частотные и временные характеристики динамических звеньев второго порядка: апериодического 2-го порядка, колебательного, консервативного. Методика анализа типа звена.

Специальные типы динамических звеньев: реальные дифференцирующее и форсирующее, чистого запаздывания, пропорционально-интегральное. Прохождение помехи через реальное дифференцирующее звено.

Неминимально-фазовые звенья.

Тема 3. Логарифмические частотные характеристики типовых соединений звеньев

ЛЧХ последовательного соединения звеньев. Методика построения ЛЧХ по сложной передаточной функции. Определение фазы по ЛАХ минимально-фазовой системы. Приближенное построение ЛЧХ параллельных соединений звеньев.

Детализированные структурные схемы и сигнальные графы: определения, сравнительная характеристика, методика построения по уравнениям. Эквивалентные преобразования структурных схем линейных и нелинейных систем. Теорема Мейсона.

Тема 4. Математические модели динамических систем в форме переменных состояния

Основные определения и формы записи уравнений. Запись уравнений в переменных состояния по детализированной структурной схеме. Линеаризация математических моделей нелинейных систем: линеаризация нелинейных статических характеристик и функций нескольких переменных, дифференциальных уравнений, уравнений в форме переменных состояния. Практические способы дифференциальной линеаризации.

Общие сведения о канонических формах. Управляемая каноническая форма (УКФ), получение УКФ по передаточной функции. Использование УКФ для получения ДСС.

Передаточные матрицы динамической системы.

Раздел 4. Анализ и синтез линейных САУ (60 часов) [1], с. 98-107; [2], с. 88-110

Тема 5. Алгебраические и частотные методы анализа устойчивости линейных систем

Устойчивость состояния равновесия линейной системы: основные определения. Суждение об устойчивости линейной системы по корням ее характеристического полинома (ХП) (собственным значениям матрицы системы): основные теоремы. Теоремы 1-го метода Ляпунова. Суждение об устойчивости по коэффициентам ХП: алгебраические критерии устойчивости Гурвица, Рауса.

Критерий устойчивости Найквиста и его логарифмическая форма.

Тема 6. Качество и точность процессов в САУ

Требования к точности, к динамике, прямые и косвенные показатели качества динамики. Частотные оценки качества САУ: частота среза, запасы устойчивости по модулю и фазе, полоса пропускания, показатель колебательности.

Интегральные оценки качества: простая, квадратичная, улучшенная квадратичная. Понятие об экстремали.

Анализ установившихся ошибок при воспроизведении типовых воздействий. Применение теоремы о конечном значении.

Установившиеся ошибки при произвольном воздействии. Коэффициенты ошибок, методы их нахождения.

Порядок астатизма: определение, методы анализа.

Точность САУ в типовых режимах (при постоянном, линейном, квадратичном и гармоническом воздействиях). Добротности по скорости и по ускорению.

Статический расчет системы стабилизации и следящей системы (типовые задачи).

Тема 7. Синтез систем автоматического управления

Основные этапы синтеза САУ. Методики синтеза в частотной области. Общая характеристика аналитических методов синтеза САУ.

Последовательная коррекция САУ: методы, типовые корректирующие звенья (П-, ПД-, ПИ- и ПИД-законы управления), методика синтеза по ЛАХ.

Параллельная коррекция САУ: метод синтеза. Гибкие и жесткие обратные связи, их влияние на качество системы.

Краткая характеристика технических средств коррекции.

Тема 8. Системы подчиненного регулирования

Стандартные настройки контуров на оптимум по модулю и симметричный оптимум. Практическая оптимизация многоконтурных систем.

Тема 9. Модальное управление

Сущность модального управления. Основная теорема. Краткие сведения об управляемости динамических систем. Методика синтеза модального регулятора. Пример.

Раздел 5. Теория дискретных САУ (65 часов) [1], с. 212-271; [2], с. 202-246

Тема 10. Понятия о дискретных САУ

Общие сведения о дискретных САУ и их классификация. Классификация систем по виду квантования, по виду и роду модуляции. Примеры систем. Характеристики релейных, импульсных и цифровых САУ.

Тема 11. Математическое представление дискретных САУ

Решетчатые функции и дискретное преобразование Лапласа. Определение решетчатой функции и смещенной решетчатой функции. Конечные размерности решетчатых функций. Суммирование решетчатых функций. Линейные разностные уравнения. Системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Математическое описание величины на выходе идеального импульсного элемента. Определение дискретного преобразования Лапласа. Формула обращения. Дискретное преобразование Фурье. Дискретный ряд Фурье. Формирующий элемент и его частотная характеристика.

Тема 12. Z-преобразования

Основы Z-преобразования. Определение простого и модифицированного Zпреобразования. Способы получения Z-преобразования. Z-преобразование элементарных функций. Обратное Z-преобразование и способы его нахождения. Нахождение обратного Z-преобразования с помощью ряда Лорана. Рекуррентная формула определения числовой последовательности.

Тема 13. Структурные схемы и передаточные функции

Передаточные функции дискретных систем в форме Z-преобразования (простого и модифицированного). Реальный импульсный элемент и его структурная схема. Структурные схемы и передаточные функции разомкнутых и замкнутых систем при различных способах включения импульсных элементов. Учет экстраполяторов, запаздывания и цифрового вычислительного устройства цепи передачи сигнала. Передаточные функции замкнутых дискретных САУ при наличии скачков на выходе импульсного элемента. Алгебра передаточных функций и эквивалентные преобразования структурных схем дискретных САУ.

Тема 14. Векторно-матричные модели

Векторно-матричные модели линеаризованных дискретных САУ. Составление уравнений состояния по структурной схеме. Каноническая форма уравнений состояния. Передаточные матрицы системы.

Тема 15. Частотные характеристики

Комплексные спектры решетчатых функций. Годографы Z-преобразования и способы их построения. Годографы элементарных функций. W-преобразование и его свойства. Спектральные характеристики ДСАУ в функции псевдочастоты. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики дискретных систем и их особенности. Построение частотных характеристик неминимальнофазовых звеньев. Построение ЛАЧХ и АФЧХ ДСАУ точным и приближенным способами.

Тема 16. Анализ устойчивости

Алгебраические методы анализа устойчивости ДСАУ по критериям Шур-Кона, Рауса и Гурвица. Принцип аргумента. Частотные методы анализа устойчивости с использованием ЛФЧХ разомкнутых систем (критерии, аналогичные критериям Михайлова и Найквиста).

Тема 17. Анализ качества переходных процессов

Связь показателей качества с частотными характеристиками систем. Показатели качества, определяемые в НЧ-, СЧ- и ВЧ-областях частотной характеристики разомкнутой САУ. Расчет переходного процесса на выходе системы с использованием различных способов определения обратного Z-преобразования. Построение переходного процесса по разностному уравнению, составленному по передаточным функциям замкнутой или разомкнутой системы. Примеры расчета. Установившаяся ошибка, коэффициенты ошибок, добротность системы. Построение переходного процесса цифровой САУ (учет квантования по уровню).

Анализ дискретных САУ методом переменных состояния. Построение переходных процессов методом переменных состояния. Статистический учет квантования по уровню.

Тема 18. Синтез дискретных систем

Обеспечение заданной точности и запасов устойчивости. Типовые желаемые ЛЧХ дискретной системы и ее непрерывной части. Построение желаемой частотной характеристики дискретной САУ с использованием точного и приближенного способов построения ЛЧХ. Расчет непрерывных корректирующих средств. Расчет дискретных корректирующих средств и корректирующей линейной программы ЦВМ. Учет влияния квантования по уровню. Анализ возможности появления периодических режимов в цифровых САУ. Синтез систем на основе метода переменных состояния. Применение метода полиномиальных уравнений для синтеза ДСАУ.

Разработка цифровых алгоритмов управления методом пространства состояний. Разработка алгоритма управления при дискретной коррекции. Синтез цифровых систем управления с апериодическим процессом. Условие физической реализуемости. Синтез по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию. Синтез цифровых САУ с обратной связью по состоянию и динамической обратной связью по выходу.

Раздел 6. Нелинейные системы (55 часов) [2], с. 249-337

Тема 19. Основные понятия и определения

Общее понятие нелинейной системы. Классы нелинейностей. Примеры нелинейных систем. Понятие об устойчивости. Определение устойчивости. Неустойчивость и притяжение в нелинейных системах. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и диссипативность нелинейных систем. Определение устойчивости нелинейных систем с разрывными характеристиками. Неединственное состояние равновесия.

Тема 20. Методы линеаризации нелинейных систем

Статистические режимы нелинейных систем и метод линеаризации (по Тейлору) в окрестности режимной точки. Основные теоремы первого метода Ляпунова. Метод малого параметра. Гармоническая линеаризация. Метод Гольдфарба и Е.П.Попова. Логарифмический критерий устойчивости. Частотные методы расчета автоколебаний с несколькими нелинейностями, примеры. Понятие о методе статистической линеаризации.

Тема 21. Исследование нелинейных систем

Фазовые траектории для линейных систем второго порядка. Аналитическое построение траекторий нелинейной системы. Метод изоклин. Примеры с неаналитическими нелинейностями. Метод точечных преобразований.

Прямой (второй) метод Ляпунова в теории устойчивости нелинейных систем. Функции Ляпунова и их свойства. Основные теоремы устойчивости неустойчивости. Теорема Барабашина-Красовского. Дальнейшие развития прямого метода. Критерии В.М.Матросова и Т.Иодшизавы. Проблема обращения основных теорем. Векторные функции Ляпунова и метод сравнения. Задача синтеза управляемой нелинейной системы по функциям Ляпунова.

Заключение

2.2. Тематический план дисциплины

2.2.1. Тематический план для студентов очной формы обучения

		й	Виды занятий и контроля									
		ЮН	Лек	ции	Л	Р	Γ	[3			. 0	
№ п/п	№ Наименование п/п раздела, темы	Кол-во часов по оч форме обучения	Аудиторные	ДОТ	Аудиторные	тод	Аудиторные	ТОД	Самостоятельная работа	Контрольные рабо ты	Текущий контролн № теста)	Курсовая работа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	ВСЕГО	260	56	30	32	20	18		104			
1	Раздел 1. Введение. Ос- новные понятия и опреде- ления	10	2	1		2			5		№ 1	
2	Раздел 2. Общая характе- ристика автоматического управления	10	2	1		2			5		<u>№</u> 2	
3	Раздел 3. Теория линей- ных непрерывных систем	60	14	7	6	4	6		23		N <u>∘</u> 3	
3.1	Виды математического описания непрерывных систем	15	4	2	2		2		5			
3.2	Частотные характеристики динамических систем	15	4	1	2	2	1		5			
3.3	Логарифмические частот- ные характеристики типо- вых соединений звеньев	15	4	2	2	2	1		4			
3.4	Математические модели динамических систем в форме переменных со- стояния	15	2	2			2		9			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	Раздел 4. Анализ и синтез линейных САУ	60	10	6	10	5	6		23		<u>№</u> 4	
4.1	Алгебраические и частот- ные методы анализа ус- тойчивости линейных сис- тем	15	2	2	4	2	1		4			
4.2	Качество и точность про- цессов в САУ	15	2	1	2	2	1		7			
4.3	Синтез систем автомати- ческого управления	15	2	2	2		1		8			
4.4	Системы подчиненного регулирования	7	1	1	2		1		2			
4.5	Модальное управление	8	2	1		2	1		2			
5	Раздел 5. Теория дискретных САУ	65	18	8	10	4	3		22		<u>№</u> 5	
5.1	Понятия о дискретных САУ	5	2	1					2			
5.2	Математическое пред- ставление дискретных САУ	10	2	1	1	1			5			
5.3	Z-преобразования	15	3	1	3	1	1		6			
5.4	Структурные схемы и пе- редаточные функции	7	2	1	2				2			
5.5	Векторно-матричные мо- дели	5	2			1			2			
5.6	Частотные характеристики	6	2	1		1			2			
5.7	Анализ устойчивости	6	2	1	1		1		1			
5.8	Анализ качества переход- ных процессов	5	1	1	1		1		1			
5.9	Синтез дискретных систем	6	2	1	2				1			
6	Раздел 6. Нелинейные системы	55	10	7	6	3	3		26		<u>№</u> 6	
6.1	Основные понятия и опре- деления	16	2	2	2	1	1		8			
6.2	Методы линеаризации не- линейных систем	19	4	2	2	1	1		9			
6.3	Исследование нелинейных систем	20	4	3	2	1	1		9			

2.2.2. Тематический план для студентов очно-заочной формы обучения

		в	Виды занятий и контроля									
		-он	Лек	ции	Л	IP	Γ	[3		I		
№ п/п	Наименование раздела, темы	Кол-во часов по очи заочной форме обуче	Аудиторные	дот	Аудиторные	ДОТ	Аудиторные	дот	Самостоятельная ра- бота	Контрольные работь	Текущий контроль № теста)	Курсовая работа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	ВСЕГО	260	44	48	16	30	18		104			
1	Раздел 1. Введение. Ос- новные понятия и опреде- ления	10	2	3		3			2		№ 1	
2	Раздел 2. Общая характеристика автоматического управления	10	2	3		3			2		<u>№</u> 2	
3	Раздел 3. Теория линей- ных непрерывных систем	60	10	11	4	5	6		24		N <u>∘</u> 3	
3.1	Виды математического описания непрерывных систем	15	2	3	2	1	2		5			
3.2	Частотные характеристики динамических систем	15	3	2	1	2	1		6			
3.3	Логарифмические частот- ные характеристики типо- вых соединений звеньев	15	3	3	1	2	1		5			
3.4	Математические модели динамических систем в форме переменных со- стояния	15	2	3			2		8			
4	Раздел 4. Анализ и синтез линейных САУ	60	10	9	6	7	6		22		Nº4	
4.1	Алгебраические и частот- ные методы анализа ус- тойчивости линейных сис- тем	20	2	2	2	3	2		9			
4.2	Качество и точность про- цессов в САУ	15	3	3	2	2	1		4			
4.3	Синтез систем автомати- ческого управления	15	3	2	1	1	1		7			
4.4	Системы подчиненного регулирования	5	1	1	1		1		1			
4.5	Модальное управление	5	1	1		1	1		1			
5	Раздел 5. Теория дискретных САУ	65	12	12	3	7	3		28		№ 5	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5.1	Понятия о дискретных САУ	5	2	1					2			
5.2	Математическое пред- ставление дискретных САУ	10	2	2		1			5			
5.3	Z-преобразования	15	2	2	2	2	1		6			
5.4	Структурные схемы и пе- редаточные функции	8	1	2	1	1			3			
5.5	Векторно-матричные мо- дели	5	1	1		1			2			
5.6	Частотные характеристики	6	1	1		1			3			
5.7	Анализ устойчивости	6	1	1		1	1		2			
5.8	Анализ качества переход- ных процессов	5	1	1			1		2			
5.9	Синтез дискретных систем	5	1	1					3			
6	Раздел 6. Нелинейные системы	55	8	10	3	5	3		26		№6	
6.1	Основные понятия и опре- деления	15	2	2	1	1	1		8			
6.2	Методы линеаризации не- линейных систем	15	3	4	1	2	1		4			
6.3	Исследование нелинейных систем	25	3	4	1	2	1		14			

2.2.3. Тематический план для студентов заочной формы обучения

		X	Виды занятий и контроля									
		ЮН	Лек	ции	Л	P	Γ	[3		I		
№ п/п	Наименование раздела, темы	Кол-во часов по заоч форме обучения	Аудиторные	дот	Аудиторные	ДОТ	Аудиторные	дот	Самостоятельная ра- бота	Контрольные работь	Текущий контроль № теста)	Курсовая работа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	ВСЕГО	260	44	48	16	30	18		104			
1	Раздел 1. Введение. Ос- новные понятия и опреде- ления	10	2	3		3			2		№ 1	
2	Раздел 2. Общая характе- ристика автоматического управления	10	2	3		3			2		№ 2	
3	Раздел 3. Теория линей- ных непрерывных систем	60	10	11	4	5	6		24		<u>№</u> 3	
3.1	Виды математического описания непрерывных систем	15	2	3	2	1	2		5			
3.2	Частотные характеристики динамических систем	15	3	2	1	2	1		6			
3.3	Логарифмические частот- ные характеристики типо- вых соединений звеньев	15	3	3	1	2	1		5			
3.4	Математические модели динамических систем в форме переменных со- стояния	15	2	3			2		8			
4	Раздел 4. Анализ и синтез линейных САУ	60	10	9	6	7	6		22		<u>№</u> 4	
4.1	Алгебраические и частот- ные методы анализа ус- тойчивости линейных сис- тем	20	2	2	2	3	2		9			
4.2	Качество и точность про- цессов в САУ	15	3	3	2	2	1		4			
4.3	Синтез систем автомати- ческого управления	15	3	2	1	1	1		7			
4.4	Системы подчиненного регулирования	5	1	1	1		1		1			
4.5	Модальное управление	5	1	1		1	1		1			
5	Раздел 5. Теория дискретных САУ	65	12	12	3	7	3		28		№ 5	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5.1	Понятия о дискретных САУ	5	2	1					2			
5.2	Математическое пред- ставление дискретных САУ	10	2	2		1			5			
5.3	Z-преобразования	15	2	2	2	2	1		6			
5.4	Структурные схемы и пе- редаточные функции	8	1	2	1	1			3			
5.5	Векторно-матричные мо- дели	5	1	1		1			2			
5.6	Частотные характеристики	6	1	1		1			3			
5.7	Анализ устойчивости	6	1	1		1	1		2			
5.8	Анализ качества переход- ных процессов	5	1	1			1		2			
5.9	Синтез дискретных систем	5	1	1					3			
6	Раздел 6. Нелинейные системы	55	8	10	3	5	3		26		<u>№</u> 6	
6.1	Основные понятия и опре- деления	15	2	2	1	1	1		8			
6.2	Методы линеаризации не- линейных систем	15	3	4	1	2	1		4			
6.3	Исследование нелинейных систем	25	3	4	1	2	1		14			

2.3. Структурно-логическая схема дисциплины «Теория автоматического управления»



2.4. Практический блок

2.4.1. Лабораторный практикум

Номер	Наименование ла-	Число учебных часов								
раздела	бораторной работы	Очная	Очно-заочная форма	Заочная форма						
(темы)		Спец.	Спец. 220201.65	Спец. 220201.65						
		220201.65	220301.65	220301.65						
		220301.65	200101.65	200101.65						
			230101.65	230101.65						
			151001.65	151001.65						
3.1	Исследование динами- ческих свойств типо- вых звеньев САУ	8	4	4						
3.2	Исследование точности работы САУ	8	4	4						
3.3	Определение опти- мальных настроечных параметров ПИ- регулятора	4	2	2						
5.1	Исследование дискрет- ной системы автомати- ческого управления	4	2	2						
5.2	Исследование парамет- ров релейной позици- онной системы	8	4	4						
	ИТОГО	32	16	16						

2.5. Временной график изучения дисциплины

(при использовании информационно-коммуникационных технологий)

Nº	Название темы	Продолжительность изучения темы (из расчета – 4часа в день)
1	Разлед 1 Вредение Основные понятия и оп-	5 лней
1	ределения	5 днон
2	Раздел 2. Общая характеристика автома-	5 дней
	тического управления	
3	Раздел 3. Теория линейных непрерывных	13 дней
	систем	
4	Раздел 4. Анализ и синтез линейных САУ	14 дней
5	Раздел 5. Теория дискретных САУ	14 дней
6	Раздел 6. Нелинейные системы	14 дней
	ИТОГО	65 дней

2.6. Балльно - рейтинговая система

Дисциплина «Теория автоматического управления» состоит из двух частей. Изучение первой части курса осуществляется в пятом семестре и завершается сдачей экзамена, кроме специальности 230101.65, студенты которой сдают зачет. Пер-



вая часть курса содержит четыре раздела, при изучении которых следует выполнить четыре блока лабораторных работ, практические занятия. После изучения каждой темы необходимо ответить на вопросы теста текущего (промежуточного) контроля, а после завершения работы с разделом – на вопросы теста рубежного контроля. Для подготовки к рубежному тесту Вам предлагается пройти тренировочный тест. Номера соответствующих промежуточных и рубежных тестов указаны в тематических планах, а также в начале каждого раздела темы.

За каждый вид самостоятельных работ начисляется определенное число баллов:

- за правильный ответ на вопрос промежуточного теста 1 балл;
- за правильно выполненную лабораторную работу 2 балла;
- за выполненное практическое задание 2 балла;

- за каждый правильный ответ рубежного теста – 2 балла.

30 баллов – лекционные занятия (теоретический материал)

Студенты всех специальностей очно-заочной и заочной форм обучения выполняют контрольную работу.

При успешной работе с материалами первой части курса студент может получить максимум 164 балла. Для получения допуска к экзамену нужно набрать более двух третей от этой суммы.

Ответы на вопросы тренировочных тестов не оцениваются. Однако настоятельно советуем Вам отвечать на них, так как эти тесты – репетиция сдачи контрольных тестов.

Изучение второй части курса осуществляется в шестом семестре и завершается сдачей экзамена, кроме специальности 230101.65, студенты которой сдают зачет. Первая часть курса содержит два раздела, при изучении которых следует выполнить четыре блока лабораторных работ, практические занятия, курсовую работу. После изучения каждой темы необходимо ответить на вопросы теста текущего (промежуточного) контроля, а после завершения работы с разделом – на вопросы теста рубежного контроля. Для подготовки к рубежному тесту Вам предлагается пройти тренировочный тест. Номера соответствующих промежуточных и рубежных тестов указаны в тематических планах, а также в начале каждого раздела темы.

За каждый вид самостоятельных работ начисляется определенное число баллов:

- за правильный ответ на вопрос промежуточного теста - 1 балл;

- за правильно выполненную лабораторную работу 2 балла;
- за выполненное практическое задание 2 балла;
- за каждый правильный ответ рубежного теста 2 балла;
- за выполненную курсовую работу 10 баллов.

При успешной работе с материалами второй части могут получить максимум 100 баллов. Для получения допуска к экзамену достаточно набрать более двух третей от этой суммы.

Желаем успехов!

3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Библиографический список

Основной

1. Теория автоматического управления: учеб. для вузов/ С.Е. Душин [и др.]; под ред. В.Б.Яковлева. – М.: Высш. шк., 2003, 2005.

2. Нелепин, Р.А. Теория управления: учебник для вузов/Р.А. Нелепин.-СПб.: Изд-во ВМИИ, 2006.

3. Попов, Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: учеб. пособие/ Е.П. Попов. - М.: Наука, 1988

Дополнительная

4. Власов, К.П. Теория автоматического управления: учеб. пособие/К.П. Власов - Харьков: Гуманитарный центр, 2007.

5. Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: пер. с англ./Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986.



3.2. Опорный конспект по дисциплине ВВЕДЕНИЕ

Окружающий мир представляет совокупность взаимосвязанных экономических, социальных, технических и иных систем, процесс функционирования которых включает получение информации и ее анализ, выполнение основных операций любого процесса управления.



Универсальность принципов управления позво-

ляет применять их к объектам любой природы, в том числе к процессам получения, передачи и обработки информации.

Данная дисциплина позволяет формировать системное мышление и целостное видение явлений мира техники, социальной среды и т.д., дает наглядные примеры их конструктивного применения.

Применение постоянно развивающихся компьютерных программ моделирования, анализа и синтеза систем управления устраняет проблемы, связанные с исследованиями и разработками систем.

В процессе изучения дисциплины «Теория автоматического управления» вам предстоит:

- изучить теоретический материал;
- выполнить блок лабораторных работ;
- выполнить курсовой расчет;
- сдать экзамен в первом семестре и экзамен и курсовой расчет с оценкой во втором семестре.

При работе с каждым разделом дисциплины соблюдается следующая последовательность действий:

1. Изучение кратко изложенного теоретического материала по *опорному* конспекту (при необходимости получения более подробных разъяснений - обращение к глоссарию – перечню используемых терминов или рекомендуемой литературе). После каждого раздела следует ответить на вопросы для самопроверки.

2. Выполнение *лабораторных работ* в соответствии с указаниями, приведенными в «Методических указаниях к выполнению лабораторных работ».

3. Ответы на вопросы контрольных тестов. Для подготовки к контрольному тестированию Вам предлагается сначала поработать с тренировочными тестами – они являются аналогами контрольных, но время ответа на них и число попыток ответа не ограничено. К тому же приводится таблица правильных ответов на вопросы тестов – это дает возможность самостоятельно проконтролировать свои знания и оценить степень готовности к контрольному тестированию. Тренировочные тесты помещаются в п. 4.1 «Блока контроля освоения дисциплины». Контрольные варианты тестов следует получить у своего тьютора или преподавателя.

Знания, полученные Вами при изучении курса «Теория автоматического управления», пригодятся не только для получения оценки по этой дисциплине. Они станут фундаментом для успешной работы со многими специальными дисциплинами, связанными с использованием информационных технологий, а также при работе в любой выбранной Вами профессиональной области. А потому – вперед, за освоение дисциплины! Успехов!

Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



1.1. Основные понятия

Изучаемые вопросы:

• Определения в ТАУ;



Процессом управления называется совокупность операций управления, определяющих алгоритм выполнения определенной работы.

Автоматическим управлением называется процесс управления, в котором все операции управления выполняются автоматически.

Важнейшими в автоматическом управлении являются понятия объекта управления (ОУ) и управляющего устройства (устройств управления) – (УУ).

Объектом управления, называется устройство, механизм, агрегат, транспортный, технологический, энергетический или любой другой процесс, желаемое поведение которого должно быть обеспечено.

Устройствами управления называются технические устройства, выполняющие операции управления.

Совокупность объекта управления и управляющего устройства (устройств управления) называется системой автоматического управления (САУ).

При самом общем представлении САУ принято символически обозначать объект управления и управляющее устройство прямоугольниками с входящими и выходящими стрелками (рис. 1.1).



Обозначения на рис.1.1.: *G* – вектор или скалярная величина, содержащие информацию о желаемом поведении объекта управления и называемые управляющим воздействием системы.

Y – вектор или одна переменная, характеризующие действительное поведение объекта управления и называемые выходными вектором или выходной переменной системы управления.

F – вектор или одна переменная, соответствующие внешним воздействиям, обычно нежелательного свойства, и называемых возмущающим воздействием системы управления.

U – вектор или скалярная величина, характеризующие управляющее воздействие на объект управления и называемые вектором (переменной) управления.

В соответствии с принятыми обозначениями сформулируем задачу автоматического управления как формирование таких векторов или переменной управления U, при которых желаемое поведение объекта будет достигнуто и вектор (переменная) Y будут соответствовать вектору (переменной) G независимо от изменений возмущающего воздействия F.

Вопросы для самопроверки

- 1. Что изучает теория управления?
- 2. Определите понятия управление и объект управления.
- 3. Назовите виды автоматических устройств.

Раздел 2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ



2.1. Классификация и общая характеристика САУ

Изучаемые вопросы:

• Классификация САУ



Общая характеристика САУ

Принято классифицировать системы автоматического управления по ряду признаков, определяющих их отношение к тому или иному классу САУ.

Прежде всего принято разделять САУ по принципу управления. По этому признаку различают системы:

с разомкнутым циклом управления,

- с управлением по возмущениям,
- с управлением с обратной связью,
- с комбинированным принципом управления.

В системах с разомкнутым циклом управления информация о действительном поведении объекта управления не используется для целей управления (рис. 2.1).



Рис. 2.1

Системы с разомкнутым принципом управления оказываются эффективными лишь тогда, когда характеристики ОУ достаточно стабильны и возмущающее воздействие F незначительно влияет на выходную величину Y.

В системах с управлением по возмущениям в структуру разомкнутого управления добавляется еще один блок (рис. 2.2) – устройство измерения возмущений (ИВ), обеспечивающее дополнительное компенсационное воздействие на ОУ при значительных изменениях возмущающего воздействия *F*.



В системах управления с обратной связью (рис. 2.3) информация о действительном поведении объекта управления снимается с выхода ОУ, обрабатывается в устройстве обратной связи (УОС) и подается в устройство сравнения (УС), где сравнивается с информацией о желаемом поведении объекта управления.



Рис. 2.3

Преимуществом систем управления с обратной связью является более высокая точность воспроизведения желаемого поведения ОУ, большая инвариантность по отношению к возмущающим воздействиям и меньшая зависимость от изменения характеристик ОУ или УУ.

В системах комбинированного управления сочетается принцип обратной связи с принципом прямого управления по внешним воздействиям: возмущающим (рис. 2.4, а) и управляющим (рис. 2.4, б).



В схеме рис. 2.4 б, ПЗ – преобразователь управляющего (задающего) воздействия. Системы с комбинированным принципом управления обеспечивают повышенную точность воспроизведения желаемого в технике управления.

Вторым важным признаком классификации САУ является тип управления. По типу управления различают шесть основных классов систем управления:

- системы стабилизации;
- системы программного управления;
- следящие системы;
- системы оптимального управления;
- системы экстремального управления;
- системы адаптивного управления.

Задача систем стабилизации заключается в поддерживании на заданном уровне выходной величины ОУ в условиях изменения возмущающих воздейст-

вий. Системы стабилизации широко используются во многих технологических процессах для поддержания на заданных уровнях технологических величин (температура, давление, расход, концентрация, уровень и т. д.).

Задача систем программного управления (СПУ) состоит в достижении высокой точности воспроизведения управляющих воздействий, которые изменяются по заданному закону. Типичным представителем систем программного управления являются системы УЧПУ (числового программного управления), широко используемые для управления металлообрабатывающими станками и робототехническими комплексами.

В следящих системах также основной является задача наиболее точного воспроизведения управляющих воздействий. Однако, управляющее воздействие в таких системах изменяется по произвольному закону. Примерами следящих систем являются промышленные регистрирующие и самопишущие приборы, системы синхронной связи, системы наведения.

Системы оптимального управления реализуют управление по экстремуму обобщенного показателя качества работы ОУ, такого как производительность, быстродействие, экономичность. Типовой системой оптимального управления в промышленности является система управления процессом каталитического риформинга – одного из ведущих процессов в нефтеперерабатывающей промышленности (производство бензина).

Системы экстремального управления применяются в тех случаях, когда показатель качества (некоторая функция координат системы) имеет экстремум, задача системы экстремального управления – отыскать и поддерживать режим работы объекта управления, при котором обеспечивается экстремум показателя качества.

Системы адаптивного управления должны обеспечивать высокое качество управления в условиях изменения внешних воздействий или внутренних характеристик объекта управления. Примерами адаптивных систем могут служить адаптивный автопилот, адаптивные регуляторы в электромеханических системах, адаптивные системы управления космическими ракетами.

Третьим существенным признаком классификации САУ является характер сигналов управления, используемых в системах управления. По этому признаку все системы разделяются на: непрерывные, релейные, дискретные.

Непрерывной системой автоматического управления называется такая система, в которых характеристики ОУ являются непрерывными функциями своих координат, а все сигналы управления и внешние сигналы, действующие на систему, описываются непрерывными функциями времени. Дискретной системой называется такая САУ, в которой имеет место прерывистый характер передачи информации управления. Такой характер сигналов управления может быть обусловлен включением в систему импульсных или цифровых устройств. В связи с этими все дискретные системы разделяются на две большие группы:

- импульсные САУ;

цифровые САУ.

Среди линейных моделей различают:

 – линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (стационарные САУ);

 – линейные дифференциальные уравнения с непрерывными во времени коэффициентами (нестационарные САУ);

 – дифференциальные уравнения в частных производных (системы с распределенными параметрами);

- уравнения с трансцендентными функциями (системы с запаздыванием);

– уравнения, связывающие вероятностные характеристики сигналов управления (стохастические САУ).

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите принципы управления и поясните их.

2. Что представляет собой закон управления?

3. Каково назначение регулятора в системе?

4. По каким признакам классифицируются системы управления?

5. Дайте классификацию систем по виду задающего воздействия.

6. Назовите необходимые и достаточные условия линейности систем.

Что представляет собой система управления? Перечислите основные элементы системы автоматического управления

Раздел 3. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ



3.1. Виды математических моделей САУ

Изучаемые вопросы:

- Математические модели;
- Преобразование структурных схем;
- Частотные характеристики;
- Типовые звенья;
- Логарифмическо частотные характеристики
- Математические модели в форме переменных состояния

Целью математического описания САУ является составление той или иной математической модели, используемой в дальнейшем для анализа и синтеза САУ. Любая математическая модель является, приближением к действительному состоянию взаимодействия отдельных информационных параметров объекта или всей системы в целом и отражает наиболее существенные взаимосвязи между переменными величинами. Так большинство переменных величин объектов и систем управления подвергается ограничению естественным или искусственным путем. Множество зависимостей между информационными параметрами являются нелинейными и должны быть представлены нелинейными математическими моделями. Однако в рамках настоящего пособия рассматриваются линейные математические модели, так как многие режимы функционирования САУ характеризуются незначительными изменениями переменных величин, в пределах которых зависимости между величинами могут считаться линейными. Системы, работающие в полных диапазонах изменений переменных, а также системы, содержащие элементы с явно выраженными нелинейными характеристиками (например, ре-



лейными), являются существенно нелинейными системами и рассматриваются в курсе «Нелинейные системы управления».

Различают следующие виды математических моделей САУ:

- дифференциальные и разностные уравнения систем управления и их элементов;
- 2) векторно-матричные модели в пространстве состояний;
- 3) передаточные функции элементов и систем управления;
- 4) структурные схемы систем управления;
- 5) направленные графы систем управления;
- 6) временные характеристики САУ;
- 7) частотные характеристики САУ.

Эти же виды математических моделей в той или иной мере используются и для описания нелинейных САУ.

Дифференциально-разностные уравнения САУ

Дифференциальные (в частных случаях, алгебраические) уравнения непрерывных систем и разностные уравнения дискретных систем являются основной первичной формой математического описания любой САУ. Они могут использоваться самостоятельно для выполнения задач анализа и синтеза или служить основой для создания других форм математического описания.

Дифференциальные и алгебраические уравнения непрерывных САУ составляются на основании изучения и осознания основных физических, химических и информационных процессов, происходящих в объекте управления и системе в целом. Часто для записи уравнений используются уже известные законы, устанавливающие связь между технологическими переменными величинами.

Рассмотрим, в качестве примера, составление уравнений для двигателя постоянного тока независимого возбуждения, управляемого изменением напряжения, приложенного к якорю. Модель двигателя (рис.2.1) включает якорную цепь, содержащую сопротивление $R_{\rm s}$ и индуктивность $L_{\rm s}$ якоря с противоэдс якоря *E*. Питание цепи якоря подается от источника напряжением *U*. Вал двигателя, вращающийся с угловой скоростью ω , соединен с рабочим органом PO, создающим момент сопротивления на валу двигателя.



Рис. 3. 1

Уравнение равновесия напряжений электрической цепи якоря двигателя:

$$U - E = i_{\mathcal{R}}R_{\mathcal{R}} + L_{\mathcal{R}}\frac{di_{\mathcal{R}}}{dt}$$
(3.1)

На основании закона электромагнитной индукции противоэдс двигателя:

$$E = C_{\rm e} \Phi \omega, \tag{3.2}$$

где $c_{\rm e}$ – конструктивный коэффициент; Φ – поток возбуждения, принимаемый постоянным; Φ = const.

В соответствии с законом Ньютона для вращательного движения уравнение движения вала двигателя:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_g - M_c, \tag{3.3}$$

где *J* – момент инерции движущихся частей двигателя и рабочего органа, приведенных к валу двигателя;

$$M_g = C_M \Phi i_{\mathfrak{R}},\tag{3.4}$$

где C_M – конструктивный коэффициент; M_c - момент сопротивления на валу двигателя. Таким образом, уравнение (3.1 – 3.4) образуют математическую модель двигателя постоянного тока. Два из них (3.1 и 3.3) – дифференциальные уравнения, два другие (3.2 и 3.4) – алгебраические. Все уравнения линейные, так как зависимости $E = f(\omega)$ и $M_g = f(i_R)$ суть прямые линии ($C_e \Phi$ и $C_M \Phi$ = const), а коэффициенты дифференциальных уравнений (J, R_R, L_R, M_e) постоянные.

Преобразование Лапласа

Несмотря на неограниченные возможности компьютерных технологий по решению систем дифференциальных и разностных уравнений преобразование Лапласа остается по-прежнему широко используемым при решении задач анализа и синтеза САУ.

Непрерывным преобразованием Лапласа непрерывной временной функции f(t) называется следующее преобразование

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

где $s = \alpha + j\omega$, α и ω - постоянные, $j = \sqrt{-1}$. Преобразуемая функция f(t) часто называется оригиналом, а F(s) – изображением функции f(t). К функции f(t) предъявляется требование, чтобы она была однозначной и удовлетворяла условию f(t) = 0 при t < 0.

Приведем в качестве примеров непрерывного преобразования изображения единичной ступенчатой функции f(t) = 1(t).

$$L\{f(t)\} = L\{l(t)\} = \int_{0}^{\infty} l(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}.$$

Основные свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности.

Непрерывное преобразование Лапласа являются линейным, т. е. изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации их изображений.

Так если
$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$$
, то

$$L\{f(t)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s) \,.$$

2. Изображение смещенной функции (теорема сдвига)

Сдвигу функции оригинала на τ , т. е. $f_1(t) = f(t - \tau)$ соответствует умножение непрерывного изображения на $e^{-s\tau}$:

$$L\{f(t-\tau)\}=e^{-s\tau}L\{f(t)\}=e^{-s\tau}F(s).$$

3. Изображение производной (конечной разности) *п* -порядка

Если
$$L\{f(t)\} = F(s)$$
, то $L\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n F(s)$, при $f(0) = 0$ и всех $\frac{df^k}{dt^k} = 0$,

k = 1, 2, ..., n-1. Другими словами взятию производной n-го порядка соответствует при нулевых начальных условиях умножение изображения на s^n .

4. Изображение интеграла (конечной суммы) функции-оригинала

Свойства изменения изображений функции после ее интегрирования или взятия конечной суммы в дискретном варианте является "обратными" по отношению к свойствам дифференцирования или взятия конечных разностей:

$$L\{\int f(t)dt\} = \frac{1}{s}F(s),$$
 где $F(s) = L\{f(t)\},$

Резюмируя свойства 3 и 4 отметим, что *s* – оператор дифференцирования в непрерывной области; 1/*s* – оператор интегрирования в непрерывной области.

5. Свойство изображения свертываемых функций (теорема свертки)

Сверткой двух непрерывных называется функция, значения которой вычис-

ляются согласно $f(t) = \int_{0}^{t} f_{1}(\tau) f_{2}(t-\tau) d\tau$ для непрерывного времени.

Формулировка свойства об изображении свертки для непрерывного времени:

- изображение свертки равно произведению изображений свертываемых функций.

Если
$$L\{f_1(t)\} = F_1(s)$$
 и $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$, то
$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s).$$

6. Определение начального значения функции оригинала по известному изображению

Зная изображение F(s) можно сравнительно просто вычислить начальное и конечное значения функции-оригинала.

Начальное значение непрерывной функции

$$f(t) = \limsup_{t \to 0} sF(s).$$

6. Конечное значение функции-оригинала

В непрерывном времени $f(t) = \lim_{t \to \infty} sF(s)$.

Преобразование дифференциальных и разностных уравнений.

Пусть непрерывная система описывается уравнением

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) =$$

$$=b_0\frac{d^mg(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}g(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_mg(t)+c_0\frac{d^ef(t)}{dt^e}+c_1\frac{d^{e-1}f(t)}{dt^{e-1}}+\ldots+c_ef(t),$$

где y(t), g(t), f(t) – выходная управляемая величина, управляющее и возмущающее воздействие соответственно; $a_0, ..., a_n$; $b_0, ..., b_m$; $c_0, ..., c_e$ – постоянные коэффи-

циенты. Предположим, что система работает при нулевых начальных условиях, т.

е. при
$$t = 0$$
 имеем $\frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$, $i = 0, 1, ..., n-1$; $\frac{d^j g(t)}{dt^j} = 0$, $j = 0, 1, ..., m-1$;

 $\frac{d^k f(t)}{dtk} = 0, \ k = 0, \ 1, \ ..., \ e - 1.$ Подвергнем заданное дифференциальное уравне-

ние преобразованию Лапласа, используя свойства линейности и изображения производной,

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_n Y(s) =$$

= $b_0 s^m G(s) + b_1 s^m G(s) + \dots + b_m G(s) + c_0 s^e F(s) + c_1 s^{e-1} F(s) + \dots + c_e F(s),$

где Y(s), G(s), F(s) – изображения по Лапласу функций y(t), g(t), f(t). Перепишем полученное уравнение в более сжатой форме

$$\begin{aligned} &(a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)Y(s) = \\ &= (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)G(s) + (c_0s^e + c_1s^{e-1} + \dots + c_e)F(s), \\ &A(s)Y(s) = B(s)G(s) + C(s)F(s). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное уравнение с исходным, приходим к правилу преобразования по Лапласу любого дифференциального уравнения:

чтобы получить преобразованное по Лапласу уравнение, необходимо операторы дифференцирования $s = \frac{d}{dt}$ заменить комплексными операторами $s = \alpha + j\omega$,

а все временные функции заменить их изображением.

Отметим, что преобразование по Лапласу уравнение является алгебраическим, что в корне облегчает все математические операции при его использовании.

Теперь возьмем отношения изображений присутствующих в уравнении величин, принимая одну из них (управление G(s) или возмущение F(s)) равной нулю:

$$\frac{Y(s)}{G(s)}\Big|_{F(s)=0} = \frac{B(s)}{A(s)}; \ \frac{Y(s)}{F(s)}\Big|_{G(s)=0} = \frac{C(s)}{A(s)}.$$

Полученные отношения представляют собой передаточные функции системы по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W_g(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{G(s)}; \quad Wf(s) = \frac{C(s)}{A(s)} = \frac{Y(s)}{F(s)}.$$

Передаточной функцией системы (элемента системы) называется отношение изображений по Лапласу выходной и входной величин при нулевых начальных условиях. Понятие передаточной функции является одним из фундаментальных в теории автоматического управления и широко используется на различных стадиях анализа и синтеза систем управления.

3.2. Структурные схемы САУ

Структурной схемой САУ называется графическая форма представления математической модели системы в виде соединения отдельных звеньев, каждое из которых задано каким-либо математическим оператором преобразования входного сигнала в выходной. Операторы преобразования могут быть заданы символами преобразования во временной области или в области изображений (передаточные функции) или с помощью статических и динамических характеристик. Звенья представляются на структурных схемах с помощью прямоугольников. Соединение их осуществляется стрелками, указывающими направления передачи сигналов управления.

Прохождение сигналов управления против направления, указанного стрелками, невозможно. Различные варианты представления звеньев структурной схемы показаны на рис. 3.2.



Рис. 3.2

Отметим, что звенья, выполняющие математические операции «умножение» и «деление», изображаются также прямоугольниками. Звенья же, выполняющие алгебраические операции «сложение» и «вычитание», изображаются кружками с подходящими и отходящими стрелками. Причем, отсутствие у подходящих стрелок каких-либо математических знаков означает суммирование сигналов. Присутствие знаков у стрелки означает, что этот сигнал вычитается из сигнала, соответствующего другой стрелке. Кроме общих структурных схем широко используются детализированные структурные схемы, состоящие только из безинерционных масштабных звеньев и идеальных интегрирующих звеньев с полностью вскрытыми связями между ними.

Детализированная структурная схема (ДСС) составляется из исходной общей схемы путем преобразования звеньев с так называемыми «сложными» передаточными функциями.

«Детализация» звена со «сложной» передаточной функцией осуществляется в следующей последовательности:

1) записывается операторное уравнение звена по исходной передаточной функции.

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{x_1(s)}{x_2(s)}, m \le n.$$

$$x_2(s)[a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n] = x_1(s)[b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m];$$

 Уравнение разрешается относительно старшей производной выходной величины x₂:

$$a_0s^n x_2 = x_1[b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m] - [a_1s^{n-1} + \dots + a_n]x_2;$$

 Обе части уравнения делятся на коэффициент при x₂ в левой части с целью получить выражение для x₂

$$x_{2} = x_{1}\left[\frac{b_{0}}{a_{0}}s^{m-n} + \frac{b_{1}}{a_{0}}s^{m-n-1} + \dots + \frac{b_{m}}{a_{0}}s^{-n}\right] - \left[\frac{a_{1}}{a_{0}}s^{-1} + \frac{a_{2}}{a_{0}}s^{-2} + \dots + \frac{a_{n}}{a_{0}}s^{-n}\right]x_{2}.$$

Пользуясь указанной последовательностью удается легко построить ДСС для звеньев с передаточными функциями невысокого порядка (n ≤ 2).

Приведем несколько примеров.

Пример1: Построить ДСС звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{ks}{Ts+1}.$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{ks}{Ts+1}; \ x_2Ts + x_2 = ksx_1; \ x_2Ts = ksx_1 - x_2$$

$$x_2 = \frac{ks}{Ts}x_1 - \frac{1}{Ts}x_2 = \frac{K}{T}x_1 - \frac{1}{Ts}x_2.$$

$$\xrightarrow{x_1} \overbrace{T}^{K} \overbrace{T}^{I} \xrightarrow{I}^{I} \overbrace{TS}^{I}$$
Пример 2: Передаточная функция исходного звена

$$W(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}; \quad T_2 s x_2 + x_2 = T_1 s x_1 + x_1; \quad T_2 s x_2 = T_1 s x_1 + x_1 - x_2;$$
$$x_2 = \frac{T_1 s}{T_2 s} x_1 + \frac{1}{T_2 s} (x_1 - x_2);$$

Окончательно $x_2 = \frac{T_1}{T_2} x_1 + \frac{1}{T_2 s} (x_1 - x_2).$



Пример 3:

Составить ДСС стандартного звена 2-го порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\varepsilon T s + 1}.$$



В случае исходной передаточной функции с n > 2 целесообразно пользоваться процедурой, называемой непосредственной декомпозицией. Суть ее заключается в том, что вводится фиктивная переменная x(s) и на нее умножается числитель и знаменатель передаточной функции:

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} \frac{x(s)}{x(s)} = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}$$

Приравнивание числителя и знаменателя дает

$$x_2(s) = (b_0 s^m + \dots + b_m) x(s), \tag{3.5}$$

$$x_1(s) = (a_0 s^n + \dots + a_n) x(s)$$
(3.6)

Последнее выражение используется для определения x(s) путем записи его относительно старшей производной с последующим делением на коэффициент при старшей производной: $a_0s^nx(s) = x_1(s) - a_1s^{n-1}x(s) - ... - a_nx(s), \quad x(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}$

=
$$\frac{1}{a_0 s^n} [x_1(s) - a_1 s^{n-1} x(s) - ... - a_n x(s)]$$
. После определения $x(s)$ строится схема

вычисления *x*₂(*s*) согласно первого выражения (3.5.). Общая схема построения ДСС «сложного» звена представлена на рис. 3.3.



Рис. 3.3

В заключении отметим, что ДСС непрерывных систем нашли широкое применение для составления уравнений состояния, а также для составления и расчета параметров модели при аналоговом моделировании.

Пусть передаточная функция дискретного фильтра (регулятора) задана в виде:

$$W(z) = \frac{x_2(z)}{x_1(z)} = \frac{b_0 z^{-m} + b_1 z^{m+1} + b_2 z^{-m+2} + \dots + b_m}{a_0 z^{-k} + a_1 z^{-k+1} + a_2 z^{-k+2} + \dots + a_k},$$
где *m* и *k* – целые числа, чаще

всего m = k; Коэффициенты b_m и a_k не равны нулю.

Структурная схема программирования, реализующая полученные разностные уравнения, представлена на рис. 3.4. В схеме элементы задержки на один такт квантования обозначены как «Зад». Порядки числителя и знаменателя передаточной функции приняты равными m = k.



Рис. 3.4

3.3. Преобразование структурных схем

Преобразование структурных схем линейных непрерывных систем управления базируется на выполнении двух важнейших принципов линейных преобразований: 1) аддитивности или суперпозиции (наложения) и 2) коммутативности (перестановки местами).

Преобразование структурных схем формулируется в виде правил преобразований, поэтому далее будем рассмотрено совокупность таких правил.

3.3.1. Последовательное соединение звеньев



<u>Правило:</u> Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

3.3.2. Параллельные соединения звеньев



<u>Правило:</u> Передаточная функция параллельного соединения непрерывных звеньев равна сумме их передаточных функций.

3.3.3. Соединение с обратной связью



Сигнал на выходе элемента сравнения:

$$E(s) = X(s) \mp W_2(s)Y(s)$$

Выходной сигнал соединения:
 $Y(s) = W_1(s)E(s) = W_1(s)X(s) \mp W_1(s)W_2(s)Y(s) =$
 $= \frac{W_1(s)X(s)}{1 \pm W_1(s)W_2(s)};$

Передаточная функция всего соединения: $\Phi_x(S) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_2(s)}$.

Частный случай: обратная связь единичная; тогда $\Phi_{\chi}(s) = \frac{W(s)}{1 \pm W(s)}$.

Часто требуется знать передаточную функцию по ошибке:

3.3.4. Перестановка местами звеньев структурной схемы

- Перестановка местами динамических звеньев

Правило: В любой последовательной цепи непрерывных динамических звеньев их можно менять местами в произвольном порядке



- Перестановка местами узлов суммирования

Узлы суммирования, также как и динамические звенья, можно менять местами в произвольном порядке



3.3.5. Перестановка местами узлов суммирования и динамических звеньев

Правило: При переносе узла суммирования через динамическое звено необходимо включить в подходящее к узлу ветви звенья с передаточной функцией звена (рис. 3.5.), если перенос осуществляется по направлению передачи сигналов



Рис. 3.5

управления, и звенья с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, если перенос осуществляется против направления передачи сигналов управления (рис. 3.6.).

Иногда необходимо выполнить перенос динамического звена через сумми-



рующий узел. Соответствующее правило будет инвереным по отношению к правилу, сформулированному выше.

3.3.6. Перестановка местами узлов разветвления и других звеньев структурной схемы

Правило 1: при переносе узла разветвления сигналов через динамическое звено необходимо в отходящие от узла ветви добавить звенья с передаточной функцией звена, если перенос выполняется против направления передачи сигналов управления (рис. 3.7), и звенья с обратной передаточной функцией, если перенос происходит по направлению передачи сигналов управления (рис. 3.8)



Рис. 3.7

Рис. 3.8

Правило 2: При переносе узла разветвления сигналов через узел суммирования необходимо в отходящие от узла ветви включить дополнительные узлы суммирования с подобным порядком суммирования сигналов, если перенос выполняется против направления передачи сигналов управления (рис. 3.9), или с обратным порядком, если перенос выполняется по направлению передачи сигналов



управления (рис. 3.10)

3.3.7. Инверсия направления прямого пути

Правило: В любом непрерывном прямом пути можно поменять направление передачи сигналов управления, поменяв на обратные передаточные функции звеньев пути и поменяв на обратные знаки суммирования внешних сигналов (рис. 3.11).



3.3.8. Инверсия замкнутого контура

Правило: В любом замкнутом непрерывном контуре можно поменять местами прямой и обратный каналы, заменив их передаточные функции на обратные и заменив на обратные знаки суммирования внешних сигналов, кроме основного узла суммирования.

Это правило получается после двукратного применения правила инверсии пути к прямому и обратному каналам контура. Рис. 3.12. иллюстрирует результат инвертирования контура.



Рис. 3.12

3.4. Ориентированные графы непрерывных САУ

Наряду со структурными схемами для графического изображения моделей САУ широко используются ориентированные графы, которые в ряде случаев благодаря своим наглядности и прозрачности позволяют легче, чем структурные схемы, провести необходимые преобразования, значительно упрощающие решение задач анализа и синтеза САУ.

Ориентированным графом называется множество точек, называемых вершинами и множества самонепересекающихся ориентированных кривых, называемых дугами, которые подчиняются следующим трем правилам:

- 1) каждая незамкнутая дуга содержит только две вершины;
- 2) каждая замкнутая дуга содержит только одну вершину;
- 3) дуги не имеют общих точек, кроме вершин.

Ориентированный граф САУ имеет кроме того следующие свойства:

1) каждая дуга соответствует звену модели САУ и характеризуется оператором изображаемого его звена;

2) каждая вершина соответствует какой-либо переменной структурной схемы.

Граф системы управления может быть построен по структурной схеме. При переходе от структурной схемы к ориентированному графу необходимо следовать следующим правилам:

1) знаки суммирования сигналов в элементах суммирования учитываются в операторах соответствующих дуг;

2) каждый элемент суммирования заменяется вершиной, которой ставится в соответствие выходная переменная звена;

3) каждое звено структурной схемы заменяется дугой с оператором звена;

4) каждой переменной внешних воздействий соответствует своя вершина.

Так структурной схеме (рис. 3.13, а) соответствует граф, показанный на рис. 3.13, б.



Рис. 3.13

При построение графа, эквивалентного структурной схеме дискретной системы, дополнительно к четырем выше сформулированным правилам пользуется специфическим правилом: дискретные элементы изображаются как и на структурной схеме ключами с учетом, что передаточные функции формирующих звеньев объединены с операторами других непрерывных звеньев (рис. 3.14, где $W_1(s)=W_{\phi 3}(s)W(s)$).



Рис. 3.14

Ориентированные графы могут быть преобразованы с использованием следующих правил:

1) параллельные дуги можно заменить одной дугой с передачей равной сумме передач исходных дуг;

2) путь, не содержащий не принадлежащих ему дуг, можно заменить одной дугой с передачей равной произведению передач отдельных дуг этого пути.

Для упрощения сложного графа и вычисления по нему передачи между двумя любыми вершинами используется правило Мэйсона, выражаемое следующей формулой:

$$W_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i \Delta_i}{\Delta}.$$

Здесь W_i – передача *i*-го пути от вершины *x* к вершине *y*, равная произведению передач дуг, входящих в этот путь; *m* - число таких путей; Δ - определитель графа, вычисляемый по формуле:

$$\Delta = 1 - \sum W_{0j} + \sum W_{0j}W_{0l} - \sum W_{0j}W_{0k}W_{ol} + \dots$$

где W_{0j} , W_{ok} , W_{ol} – передачи *j*-го, *k*-го или *l*-го контуров, равные произведению передач входящих в них дуг; в первой сумме суммируются передачи всех контуров, во второй сумме – произведения передач несоприкасающихся (не имеющих общих вершин) контуров; в третьей сумме суммируются произведения трех передач трех несоприкасающихся контуров и так далее;

 Δ_{I} – определитель подграфа, остающегося от исходного графа после удаления дуг и вершин *i*-го пути, включая дуги, подходящие к этим вершинам (другими словами Δ_{I} – определитель той части графа, которая не касается с рассматриваемого *i*-го пути).

В качестве примера рассмотрим использование формулы Мэйсона для графа, изображенного на рис. 3.15.



Представленный граф содержит:

1) два пути от вершин *G* к вершине *Y*

 $W_{\Pi 1} = W_1 W_3 W_5 W_7, \ W_{\Pi 2} = W_5 W_7 W_9;$

2) пять простых контуров:

 $W_{01} = -W_1W_2, W_{02} = -W_3W_4, W_{03} = -W_5W_6, W_{04} = -W_7, W_{05} = -W_1W_3W_5W_7W_8$

3) четыре пары несоприкасающихся контуров:

$$W_{01}W_{03}, W_{01}W_{04}, W_{02}W_{04}, W_{03}W_{04};$$

4) одну тройку несоприкасающихся контуров

$$W_{01}W_{03}W_{04};$$

5) определитель подграфа первого пути $\Delta_1 = 1$, так как нет контуров, несоприкасающихся с первым путем;

6) определитель подграфа второго пути: $\Delta_2 = 1 + W_1 W_2$;

определитель всего графа

$$\Delta = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04} + W_{05}) + W_{04} + W_{05} +$$

+ $(W_{01}W_{03} + W_{01}W_{04} + W_{02}W_{04} + W_{03}W_{04}) - W_{01}W_{03}W_{04}.$

Передача всего графа от вершин *G* к вершине *Y*:

$$W_{g,y} = \frac{W_{n1} + W_{n2}\Delta_2}{\Delta}$$

3.5. Описание систем управления моделями пространства состояний

3.5.1. Уравнения состояния САУ

Пространство состояний САУ это бесконечная совокупность временных моментов состояния системы, описанная конечной совокупностью переменных состояния.

Число переменных состояния обычно принимается равным порядку общего дифференцированного уравнения системы, т.е. числу дифференцированных уравнений 1-го порядка.

Уравнения состояния записываются обычно в нормальной форме Коши и имеют вид:

$$\frac{ax_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \ldots + b_{im}u_m, i = 1, 2, \ldots, n.$$

В левой части уравнения состояния всегда производная переменной состояния, а в правой части сумма всех переменных состояния и внешних воздействий со своими коэффициентами. Полное описание в пространстве состояния будет представлять систему из n дифференцированных уравнений 1-го порядка в форме Коши.

Существует три способа записи уравнений состояния подобной формы:

1) запись уравнения в форме Коши на этапе первичного поэлементного описания системы управления; например, уравнение напряжений цепи якоря двигателя постоянного тока

$$\Delta i_{\mathfrak{g}} r_{\mathfrak{gu}} + L_{\mathfrak{gu}} \frac{d\Delta i_{\mathfrak{g}}}{dt} = \Delta u - \Delta e_{g},$$

где $r_{\rm яц}$ и $L_{\rm яц}$ – сопротивление и индуктивность якорной цепи соответственно, Δu – изменение напряжения, приложенного к якорной цепи, Δe_g – изменения противоэдс двигателя, $i_{\rm я}$ - ток якорной цепи, может быть записано в нормализованной форме.

$$\frac{d\Delta i_{\mathfrak{R}}}{dt} = -\frac{r_{\mathfrak{RII}}}{L_{\mathfrak{RII}}}\Delta i_{\mathfrak{R}} - \frac{1}{L_{\mathfrak{RII}}}\Delta e_{g} + \frac{1}{L_{\mathfrak{RII}}}\Delta u$$

2) Запись уравнений состояний по передаточным функциям звеньев; например для передаточной функции $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts+1}$ можно записать уравнение TsY(s) + Y(s) = kU(s) и после перехода во временную область $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$, и

уравнение состояния $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{k}{T}u(t) - \frac{1}{T}y(t).$

В случае сложной передаточной функции порядка n > 1 прибегают к разложению ее на сумму слагаемых 1-го порядка, либо к представлению в виде произведения сомножителей 1-го порядка.

3) Универсальным способом записи уравнений состояния является их составление на основе детализированной структурной схемы системы. Процесс записи уравнений включает в себя 2 этапа:

- выбор переменных состояния; в качестве переменных состояния выбираются выходные переменные интегрирующих звеньев ДСС;

- запись уравнений для входных переменных интегрирующих звеньев. Для иллюстрации процесса записи уравнений состояния по ДСС покажем систему нормальных уравнений для ДСС, представленной на рис. 3.16.

В кружках на схеме показаны переменные состояния.



Рис. 3.16

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{T_1} \left(-\left(\frac{k_5}{T_5} x_2 - x_5\right) + g - x_3 - k_3(x_3 - f)\right),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{T_1} \left(-x_2 + k_2(x_1 + x_4 - x_6 - k_6 \frac{T_{61}}{T_{62}} (x_2 - f))\right), \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{k_3}{T_3} (x_2 - f),$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{k_4}{T_4} \left(g - x_3 - k_3(x_2 - f) - (x_5 + \frac{k_5}{T_5} x_2)\right), \quad \frac{dx_5}{dt} = \frac{1}{T_5} \left(-x_5 + \frac{k_5}{T_5} x_2 \right),$$

$$\frac{dx_6}{dt} = \frac{1}{T_{62}} \left(k_6(x_2 - f) - x_6 - k_6 \frac{T_{61}}{T_{62}} (x_2 - f)\right).$$

3.5.2. Векторно-матричное описание непрерывной системы

Обобщая записанную в примере систему уравнений состояния, запишем ее для системы порядка *n*.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m,$$

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + b_{bi2}u_2 + \dots + b_{im}u_m,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nn}u_m.$$

Эту систему можно записать в векторно-матричной форме:

$$Y = AX + BU, \tag{3.7}$$

где X = X(t) – действительный *n*-мерный вектор-столбец, компоненты которого переменные состояния. Поэтому он носит название вектора состояния.

U = u(t) - действительный *m*-мерный вектор-столбец, содержащий в качестве своих элементов входные внешние воздействия (управляющие и возмущающие), он называется вектором входа.

А – матрица коэффициентов системы размерностью (*n* x *n*), называемая матрицей системы или матрицей состояния.

В – матрица коэффициентов системы при внешних воздействиях и поэтому называемая матрицей входа; размерность матрицы В – (*n* x *m*).

Если матрицы A и B постоянные, то система называется стационарной; если матрицы A и B есть функции времени, то система называется нестационарной или системой с переменными коэффициентами.

Основное матричное уравнение (3.7.) обычно дополняется уравнением для вектора выходных переменных:

$$Y = CX + DU, \qquad (3.8.)$$

где С — матрица выхода системы, размерность которой зависит от размерности векторов X и Y; в одномерной системе, где y есть скалярная переменная, матрица С есть строка размерностью n;

D – матрица связи с внешними воздействиями, ее размерность определяется размерностью векторов *U* и *Y*.

Для матричной формы описания в пространстве состояний часто используется структурное изображение, причем в матричных структурных схемах сигналы, описываемые векторами, представляются двойными стрелками.

Так уравнению (3.7.) соответствует структурная схема (рис. 3.17, а), а схема, соответствующая уравнениям (3.7.) и (3.8.) совместно, показана на рис. 3.17, б.



Рис. 3.17

Векторная связь через матрицу D редко встречается в обычных линейных системах с постоянными коэффициентами. Гораздо чаще используется структура с разделением управляющих и возмущающих внешних воздействий. В этом случае матрица B разделяется на две: B_u и B_f , и структурная схема приобретает вид, показанный на рис. 3.18, а.



Для одномерной системы управления сигналы U, f и *у* являются скалярными величинами. Поэтому структурная схема одномерной системы будет иметь вид (рис.3.18, б). Здесь B_u и B_f вектор-столбцы, а матрица С вектор-строка.

Уравнения состояния непрерывной части системы:

$$x_{1} = \frac{1}{T_{1}}(u - x_{2}), \ x_{2} = \frac{1}{T_{2}}x_{1}.$$

Матрица системы: A = $\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{T_{1}} \\ \frac{1}{T_{2}} & 0 \end{vmatrix}$. Матрица входа B = $\begin{vmatrix} \frac{1}{T_{1}} \\ 0 \end{vmatrix}$, матрица выхода C = [0 1].

Определяем переходную матрицу $\Phi(t) = L^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}.$

$$SI-A = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} & s \end{vmatrix}; (SI-A)^{T} = \begin{vmatrix} s & -\frac{1}{T_2} \\ \frac{1}{T_1} & s \end{vmatrix}$$
$$(SI-A)^{1} = \frac{Ad_{ij}(sI-A)^{T}}{\det(sI-A)} = \frac{\begin{vmatrix} s & -\frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} & s \end{vmatrix}}{s^2 + \frac{1}{T_1T_2}}.$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^{2} + \frac{1}{T_{1}T_{2}}}\right\} = \cos\frac{t}{\sqrt{T_{1}T_{2}}}; L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{T_{2}}}{s^{2} + \frac{1}{T_{1}T_{2}}}\right\} = \frac{\sqrt{T_{1}T_{2}}}{T_{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{T_{1}T_{2}}};$$

 $L^{-1}\left\{\frac{-1/T_1}{s^2+\frac{1}{T_1T_2}}\right\}$ =- $\frac{\sqrt{T_1T_2}}{T_1}\sin\frac{t}{\sqrt{T_1T_2}}$. Таким образом, дискретная матрица системы:

$$A^* = \Phi(T) \begin{vmatrix} \cos\frac{T}{\sqrt{T_1 T_2}} & -\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \sin\frac{T}{\sqrt{T_1 T_2}} \\ \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \sin\frac{T}{\sqrt{T_1 T_2}} & \cos\frac{T}{\sqrt{T_1 T_2}} \end{vmatrix}$$

3.5.3. Преобразование Лапласа матричного уравнения системы управления

Возьмем основное матричное уравнение системы: $\hat{X}(t) = AX(t) + BU(t)$.

Рассмотрим сначала однородное матричное уравнение системы при U(t) = 0. $\hat{X}(t) = AX(t)$. Подвергнем его преобразованию Лапласа с учетом начальных условий, т.е. наличия вектора X(0) SX(s) - X(0) = AX(s).

Объединяя члены, содержащие изображение вектора X(s), получим SX(s) - AX(s) = X(0) или (SI - A)X(s) = X(0), откуда $X(s) = (SI - A)^{-1}X(0)$, где I -единичная матрица. Матрица $(SI - A)^{-1}$ называется резольвентой матрицы А. Она определяется следующим образом:

$$(SI - A)^{-1} = \frac{Ad_{ij}(SI - A)^{T}}{\det(SI - A)} = \frac{Ad_{ji}(SI - A)}{\det(SI - A)}.$$

Здесь det(SI - A) – определитель матрицы (SI - A); $Ad_{ij}(SI - A)^T$ – квадратная матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов A_{ij} матрицы (SI - A)^T; $Ad_{ji}(SI - A)$ – матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов A_{ji} матрицы (SI - A).

Матрица (SI–A) называется характеристической. Ее определитель det(SI - A) = D(s) называется характеристическим полиномом. Уравнение det(SI-A)=0 называется характеристическим уравнением.

Рассмотрим неоднородное матричное уравнение системы $\hat{X}(t) = AX(t) + BU(t)$, Y(t) = CX(t). Подвергая преобразованию Лапласа, получим (принимая начальные условия X(0) = 0):

 $SX(s) = AX(s) + bU(s), X(s) = (SI - A)^{-1}BU(s), Y(s) = C(SI - A)^{-1}BU(s) = H(s)U(s),$ где $H(s) = C(SI - A)^{-1}B$ называется матричной передаточной функцией системы.

Она вычисляется следующим образом: $H(s) = \frac{CAd_{ij}(SI - A)^T B}{det(SI - A)}$.

Отметим, что знаменатель H(s) это характеристический полином D(s), что корни характеристического уравнения D(s)=0 являются одновременно полюсами передаточной функции системы H(s).

3.6. Временные характеристики систем и их элементов

Временными характеристиками систем управления или их элементов называются реакции систем или элементов на входные сигналы, описываемые типовыми временными функциями. Их можно получить двумя способами:

1) экспериментальным, когда регистрируется выходная величина системы или элемента при подаче на их вход того или иного типового внешнего воздействия;

2) аналитическим, когда в правую часть дифференциального уравнения системы или элемента подставляется математическое выражение входного воздействия и решают уравнения при нулевых начальных условиях, т.е. получают аналитическое выражение временной характеристики, которое затем представляют в виде графика.

Временные характеристики играют важную роль при решении задач анализа и синтеза систем управления, поэтому знание их совершенно необходимо как при проектировании, так и при эксплуатации систем управления. Различают две важнейшие временные характеристики систем управления или их элементов

1) импульсная переходная характеристика (ИПХ) или функция веса;

2) переходная характеристика (ПХ).

3.6.1. Импульсные переходные характеристики

Импульсной переходной характеристикой непрерывной системы называется реакция системы на импульсный сигнал, описываемый единичной δ - функцией, при нулевых начальных условиях.

Определение единичной δ - функции:

$$\delta(t) = \begin{vmatrix} \infty, nput = 0 \\ 0, nput \neq 0 \end{vmatrix} \quad \text{if } \begin{split} & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{split}$$

Изображение по Лапласу δ -функции $L\{\delta(t)\} = 1$. Изображение $L\{w(t)\} = W(s)L\{\delta(t)\} = W(s)$, поэтому ИПХ может быть найдена как $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$.

С помощью ИПХ может быть определена выходная величина системы при произ-

вольном входном воздействием: $Y(t) = \int_{0}^{t} w(t)u(t-\tau)d\tau$.

3.6.2. Переходные характеристики

Переходной характеристикой непрерывной системы или ее элемента называется реакция системы или элемента на ступенчатый сигнал, описываемый единичной ступенчатой функцией при нулевых начальных условиях (рис. 3.19)



Переходная характеристика может быть получена экспериментальным путем или аналитическим способом $h(t) = L^{-1}{H(s)},$

где $H(s) = W(s)L\{1(t)\} = W(s)\frac{1}{s}$, W(s) - передаточная функция системы или элемента. Таким образом, $h(t) = L^{-1}\{\frac{W(s)}{s}\}$.

3.7. Частотные характеристики непрерывных систем автоматического управления

3.7.1. Общие положения

Существует два пути получения частотных характеристик: 1) экспериментально-физический, 2) теоретический.

Первый путь состоит в том, что на систему подается синусоидальный сигнал постоянной амплитуды и переменной частоты (рис. 3.20). На выходе системы в установившемся g(t) Рис. 3.20 Рис. 3.20 ный сигнал той же частоты, но другой амплиту-

ды и с фазовым сдвигом по отношению к входному сигналу.

Итак, $g(t) = A_1 \sin \omega t$ в непрерывном времени. Установившаяся реакция на выходе системы $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$. Тогда отношение $\frac{A_2}{A_1} = A(\omega)$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) системы, а зависимость $\varphi(\omega)$ - фазочастотной характеристикой системы (ФЧХ).

Второй путь заключается в использовании преобразований Фурье сигналов на входе и выходе системы. Последние определяются по преобразованиям Лапласа путем замены $S = j\omega$. Если такую замену сделать в передаточной функции системы, придем к понятию комплексной передаточной функции (КПФ) системы

$$W(s)\Big|_{s=j\omega} = W(j\omega);$$

Зависимость модуля КПФ от частоты называется АЧХ системы

$$|W(j\omega)| = A(\omega);$$

Зависимость аргумента КПФ представляет собой ФЧХ системы

$$ArgW(j\omega) = \varphi(\omega)$$
.

Зависимости $\text{Re}W(j\omega)$ и $\text{Im}W(j\omega)$ называются вещественно-частотной (ВЧ) и мнимой (МЧ) характеристиками системы соответственно. ВЧХ и АЧХ совместно образуют амплитудно-фазовую характеристику системы (АФХ). Ее выражение следует из выражений ВЧ и МЧ характеристик

 $W(j\omega) = \text{Re}W(j\omega) + \text{Im}W(j\omega) = U + jV.$ АФХ является важнейшей характеристикой системы и часто снимается экспери-

ментальным путем.

3.7.2. Построение частотных характеристик

Рассмотрим в качестве примера построение частотных характеристик непрерывного идеального интегрирующего элемента с передаточной функцией W(s) = k/s.

КПФ непрерывного интегрирующего звена

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \frac{k}{j\omega}.$$
 $\omega = \infty$

АФХ непрерывного интегрирующего звена

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{k}{j\omega - j} = -j\frac{k}{\omega};$$



значит $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = k/\omega$. График АФХ представлен на рисунке. Он представляет собой прямую линию, совпадающую с отрицательной A^{\bigstar} мнимой полуосью.

АЧХ интегрирующего звена $A(\omega) = k/\omega$ представляет собой гиперболу. Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) 0 $U(\omega) = 0$. Мнимая частотная характеристика (МЧХ) $V(\omega) =$

 $-k/\omega$ и представляет собой гиперболу в четвертом квадранте. Фазочастотная характеристика $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(V(\omega)/U(\omega)) = \operatorname{arctg}(-k/\omega \cdot 0) = \operatorname{arctg}(-\infty)$, т. е. $\varphi(\omega) = -\pi/2$ и не зависит от частоты.

Выражение АЧХ может быть найдено как $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{kT}{2}\sqrt{1 + ctg^2\omega T}$. График АЧХ имеет вид гиперболы.

Построение графиков АЧХ и ФЧХ $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2})$ пред-

ставляет собой непростую операцию. Выражения характеристик значительно упрощаются, если от действительных значений частот и амплитуд перейти к их логарифмам. Поступая таким образом, приходим к так называемым логарифмическим амплитудно-частотным и логарифмическим фазо-частотным характеристикам (ЛАЧХ и ЛФЧХ соответственно), удобным в инженерных расчетах и поэтому получившим всеобщее признание и широкое распространение.

3.7.3. Логарифмические частотные характеристики

При построении логарифмических амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик (ЛАФЧХ) частота по оси абсцисс откладывается в логарифмиче-

ском масштабе, т. е. на оси ω наносятся отметки, соответствующие lg ω , но около отметок указываются действительные значения ω (рис. 3.21).





Начало координат может быть помещено в любой точке оси ω в зависимости от того, в каком интервале частот находится соответствующий диапазон частот системы. Необходимо помнить, что точка $\omega = 0$ лежит в $-\infty$ и никогда не отмечается на графиках ЛАФЧХ. Равномерной единицей на оси частот является декада – любой отрезок, на котором значение частоты увеличивается в десять раз. Значения частоты откладываются в радианах в секунду (с⁻¹).

По оси ординат при построении ЛАЧХ откладывается величина 20 $\lg A(\omega) =$ 20 lg $/W(i\omega)/$, единицей измерения для которой является L. дБ 40 децибел (дБ). Обычно логарифмическую амплитуду обо-30 значают через $L = 20 \lg A = 20 \lg W(j\omega)$, Ось ординат ЛАЧХ показана на рис. 3.22. Начало оси ординат 20 L = 0 соответствует значению A = 1, т. е. равенству ам-10 плитуд входного и выходного сигналов системы. Поэто-0 ω му верхняя полуплоскость ЛАЧХ соответствует значени-Рис. 3.22 ям A > 1 (усиление амплитуды), а нижняя полуплоскость - значениям A < 1 (ослабление амплитуды).

При построении логарифмической фазочастотной характеристики (ЛФЧХ) частота ω откладывается на оси абсцисс по-прежнему в логарифмическом масштабе, а значения углов фазового сдвига наносятся на оси ординат в обычном масштабе в угловых градусах. Возможный вид совместно построенных ЛАЧХ и ЛФЧХ показан на рис. 3.23.



Рис. 3.23

В качестве примера построим ЛАФЧХ непрерывного интегрирующего звена $W(j\omega) = k/j\omega$.

ЛАЧХ $L_u(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k/j\omega = 20 \lg k - 20 \lg \omega$. Характеристика $L_u(\omega)$ состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое 20 lgk графически представляет прямую, проходящую параллельно оси абсцисс на расстоянии 20 lgk. Второе



Рис. 3.24

• слагаемое графически соответствует прямой с наклоном -20 дБ/дек u проходящую через точку $\omega = 1, L = 0.$

Фазочастотная характеристика $\phi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^{\circ}$. Характеристики ЛАЧХ и ЛФЧХ показаны на рис. 3.24.

Аналогично строятся ЛАФЧХ других типовых звеньев и целых систем.

Пусть исходная система имеет пере-

даточную функцию
$$W(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$$
. Она

соответствует последовательному соединению двух типовых звеньев: интегрирующего W(s) = k/s и апериодического 1-го порядка $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$. Покажем, как

строятся ЛАФЧХ такой системы. Логарифмические характеристики интегрирующего звена нам уже известны. Поэтому построим сначала ЛАФЧХ апериодического звена 1-го порядка, а затем суммируем характеристики обоих звеньев для получения общих ЛАФЧХ. Для апериодического звена 1-го порядка

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{Tj\omega + 1} \right| = 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}.$$

Так как 20 lg1 = 0, то $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$. $\varphi_a(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\operatorname{arctg} T \omega$.

Для построения ЛАЧХ $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$. определим асимптоты этой характеристики:

- a) при $\omega \rightarrow 0 L(\omega) \cong -20 \text{ lg1} = 0;$
- б) при $\omega \rightarrow \infty L(\omega) \cong -20 \lg T \omega$.

Это значит, что на низких частотах $L_a(\omega)$ будет совпадать с осью частот, а начиная с частоты $\omega = 1/T L_a(\omega) = -20 \text{ lg}T\omega$, т. е. прямая с наклоном -20 дБ/дек. Совместное построение ЛАФЧХ обоих звеньев и суммарные ЛАФЧХ всей системы показаны на рис. 3.25.



Рис. 3.25

Суммарные ЛАФЧХ системы построены в соответствии с выражениями:

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{j\omega(Tj\omega+1)} \right| = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T^2 \omega^2 + 1};$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_u(\omega) + \varphi_a(\omega) = -\pi/2 - \operatorname{arctg} T\omega.$$

Последняя характеристика $\phi_a(\omega) = - \arctan T \omega$ представляет собой плавную кривую, симметричную относительно частоты $\omega = 1/T$.

Графики $L_a(\lambda)$ и $\phi_a(\lambda)$ показаны на рис. 3.26.



Как и для интегрирующего звена, так и для апериодического звена 1-го порядка наблюдается совпадение ЛАФЧХ в области низких частот и существенное различие в области высоких частот для непрерывного режимов работы.

3.8. Типовые звенья

Динамическим звеном называют устройство любого физического вида и конструктивного оформления, представленное определенным дифференциальным уравнением.

В соответствии с определением классификация динамических звеньев производится по виду дифференциального уравнения, а именно, по его порядку. Так как одними и теми же дифференциальными уравнениями могут описываться устройства любого типа (электрические, электромеханические, гидравлические, тепловые), то такое предположение позволяет использовать для проектирования различных устройств одинаковые подходы.

Любую систему можно представить в виде соединения типовых динамических звеньев. Число таких звеньев невелико и определяется типом нулей и полюсов.

Как следует из представления модели в форме пространства состояний, для реализации любой физически осуществимой передаточной функции достаточно двух типов звеньев: интеграторов и усилителей. Если степень числителя передаточной функции *m* превышает степень знаменателя *n*, то необходимо звено дифференцирующего типа.

В теории управления состав типовых звеньев несколько расширен, исходя из соображения удобства, необходимы звенья, моделирующие часто встречающиеся случаи, а также позволяющие представление передаточных функций общего вида последовательным и параллельным соединением типовых звеньев.

Большинство систем может быть представлено совокупностью относительно звеньев с передаточными функциями невысокого порядка. Такие звенья называются типовыми.

Типовым называется такое звено, которое описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. К таким звеньям относятся:

- безынерционное звено звено нулевого порядка,
- апериодическое звено звено первого порядка,
- интегрирующее звено звено первого порядка,
- дифференциальное звено звено первого порядка,
- колебательное звено звено второго порядка.

3.8.1. Безынерционное звено

Уравнение движения для безинерционного звена имеет вид

$$Y = KX$$
.

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

W(s) = R

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Изображение переходной функции определяется как

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}) = \mathbb{X}(\mathbf{s}) \cdot \mathbb{W}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}} \times \mathbb{K}.$$

Выполняя обратное преобразование изображения переходной характеристики **(**;), получаем:

h(t) = K l(t)

Выполняя аналогичные преобразования над изображением весовой функции, получаем выражение для определения весовой функции **«**().

$\Psi(t) = K \cdot \delta(t)$

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

₩(joo) = K

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика звена представляется точкой на комплексной плоскости.

60

Логарифмическая частотная характеристика представляется прямой параллельной оси частот. Это следует из выражения для определения логарифмической частотной характеристики вида:

 $L(\phi) = 20 lg(K)$

3.8.2. Апериодическое звено

Уравнение движения для безинерционного звена имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \frac{1}{\mathrm{T}} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Изображение переходной функции определяется как

$$h(s) = X(s) \cdot W(s) = \frac{1}{s} \times \frac{K}{1+T s}$$

Корни характеристического уравнения $D(s) = s^2T + s = 0$ определяются как

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = \frac{1}{T}$$

Выполняя обратное преобразование изображения переходной характеристики **к**(я) получаем:

$$h(t) = \frac{K}{2Tp + 1} \bigg|_{p=0} e^{0t} + \frac{K}{2Tp + 1} \bigg|_{p=-1/T} e^{-t/T} = K \bigg(1 - e^{-t/T} \bigg).$$

Выполняя аналогичные преобразования над изображением весовой функции

получаем выражение для определения весовой функции **w(!)**.

$$w(t) = \frac{K}{T} \Big|_{p=-1/T} e^{-1/T} = \frac{K}{T} e^{-1/T}$$

Переходная и весовая характеристики звена приведены на рис. 3.27.



Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1+j\cdot\omega T}$$

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика звена определяется как:

$$A(w) = \frac{K}{\sqrt{1 + (wT)^2}}$$

Вещественная Р(•) и мнимая (•) частотные характеристики звена определяются как

$$P(\omega) = \frac{K}{l + (\omega T)^2}$$
$$Q(\omega) = -\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

АФЧХ звена определяется как

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:

$$L(\varpi) = 20 \lg \left(\frac{K}{1 + (\varpi T)^2} \right)$$
$$\varphi(\varpi) = \arctan(-\varpi T).$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ воспользуемся выражением вида:

$$L(\varpi) = \begin{cases} 20 \lg(K) & \text{при } \varpi << \frac{1}{T} \\ 20 \lg(K) - 20 \lg(\varpi T) & \text{при } \varpi >> \frac{1}{T} \end{cases}$$

На рис. 3.28 приведены амплитудно-фазовая и логарифмическая частотные характеристики безинерционного звена.



Рис. 3.28

3.8.3. Интегрирующее звено

Уравнение движения для интегрирующего звена имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = K \times X$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{K}{s}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика звена определяется как

$$\mathbf{h}(\mathbf{t}) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{s}^2} \right\} = \mathbf{K}\mathbf{t}.$$

Весовая характеристика определяется как

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{s}}\right\} = \mathbf{K}.$$

Эти характеристики интегрирующего звена приведены на рис. 3.29.



Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика звена определяется как:

$$\mathbb{A}(\Phi) = \frac{\mathbb{K}}{\Phi}$$

Вещественная **Р**(**b**) и мнимая **Q**(**b**) частотные характеристики звена определяются как

$$P(\boldsymbol{\varpi}) = 0$$
$$Q(\boldsymbol{\varpi}) = -\frac{K}{\boldsymbol{\varpi}}$$

Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:



Рис. 3.30

Для построения асимптотической ЛАЧХ воспользуемся выражением вида: L(@) = 20 (К) - 20 (О).

Амплитудно-фазовая и логарифмическая частотные характеристики звена показаны на рис. 3.30.

3.8.4. Дифференцирующее звено

Уравнение движения для дифференцирующего звена имеет вид

$$Y = K \frac{dX}{dt}$$

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$W(s) = K \cdot s$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Переходная характеристика дифференцирующего звена определяется как

$$h(t) = L^{-1}{K} = K\delta(t)$$

На рис. 3.31. приведена переходная характеристика дифференцирующего звена.



Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

₩(jø) = jøK

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика звена определяется как:

A(@) = K@

Вещественная Р(•) и мнимая О(•) частотные характеристики звена определяются как



Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:

$L(\omega) = 20 \lg(R\omega)$

Для построения асимптотической ЛАЧХ воспользуемся выражением вида:

$$L(\omega) = 20 \lg(K) + 20 \lg(\omega)$$

Амплитудно-фазовая и логарифмическая частотные характеристики звена показаны на рис. 3.32.

3.8.5. Колебательное звено

Уравнение движения для колебательного звена имеет вид

$$T^{2}\frac{d^{2}Y}{dt^{2}} + 2\zeta T\frac{dY}{dt} + Y = KX,$$

где T-постоянная времени звена,

^с— коэффициент демпфирования.

Выполняя над этим уравнением преобразование Лапласа, получаем выражение для передаточной функции звена следующего вида:

$$W(s) = \frac{K}{1 + 2\zeta T s + T^2 s^2}$$

Для нахождения временных характеристик звена определим его реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Корни характеристического уравнения звена определяются как:

$$q_{1,2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - t}}{2}$$

Для колебательного звена характерно различное распределение корней при разных комбинациях его параметров. В общем случае выражение переходная характеристика определяется выражением вида:



Временные характеристики колебательного звена определяются распределением корней его характеристического полинома. На рис. 3.33 приведены переходные характеристики колебательного звена при действительно и комплексносопряженных корней характеристического полинома.

Для построения частотных характеристик звена воспользуемся выражением для его комплексной передаточной функцией вида:

$$W(j\omega) = \frac{K}{l + j\omega 2\zeta T - \omega^2 T^2}$$

Исходя из этого, амплитудно-частотная характеристика колебательного звена определяется как:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 T^2\right)^2 + (2\varsigma T \omega)^2}}$$

Вещественная **Р**(**•**) и мнимая **Q**(**•**) частотные характеристики звена определяются как

$$P(\omega) = \frac{K(1-\omega^2 T^2)}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}$$
$$Q(\omega) = -\frac{K}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}$$

Выражение для расчета ЛАЧХ принимает вид:

 $L(\varpi) = 20\lg(A(\varpi))$

Для построения асимптотической ЛАЧХ воспользуемся выражением вида:

$$L(\varpi) = \begin{cases} 20 \lg(K) & \text{при } \varpi << \frac{1}{T} \\ 20 \lg(K) - 40 \lg(\varpi T) & \text{при } \varpi << \frac{1}{T} \end{cases}$$

Амплитудно-фазовая и логарифмическая частотные характеристики звена показаны на рис. 3.34.



Рис. 3.34

3.9. Пример составления математического описания

Система регулирования скорости двигателя, постоянного тока, функциональная схема которой показана на рис. 3.35, включает в себя: объект управления, двигатель постоянного тока независимого возбуждения (Д); исполнительный орган – преобразователь (П); регулятор, реализующий пропорциональноинтегральный (ПИ) закон регулирования и датчик скорости – тахогенератор (ТГ). Все четыре перечисленные элементы соединены в систему управления с отрицательной обратной связью по скорости.



Рис. 3.35

Первичная форма описания (дифференциальные и алгебраические уравнения)

Уравнения двигателя (см. п. 2.2.):

$$U_{\rm g} - E = i_{\rm g} R_{\rm g} + L_{\rm g} (di_{\rm g}/dt), \qquad (3.9)$$

$$E = c_e \Phi \omega, \tag{3.10}$$

$$M_{\rm A} = c_{\rm M} \Phi i_{\rm g} \tag{3.11}$$

$$I(d\omega/dt) = M_{\rm A} - M_{\rm c} \tag{3.12}$$

Уравнение преобразователя

$$U_{\rm II} = U_{\rm g} + i_{\rm g} R_{\rm II} + L_{\rm II} (di_{\rm g}/dt) \tag{3.13}$$

Уравнение тахогенератора

$$U_{\rm TT} = k_{\rm TT} \omega. \tag{3.14}$$

Уравнение регулятора

$$U_{\rm p} = k_{\rm p}(U_{\rm 3} - U_{\rm TF}) + k_{\rm i} \int (U_{\rm 3} - U_{\rm TF}) dt, \qquad (3.15)$$

где U_n , R_n и L_n – напряжение, сопротивление и индуктивность преобразователя; U_3 – задающее скорость напряжение; k_{nr} – коэффициент передачи тахогенератора; k_p и k_i – коэффициенты пропорциональной и интегральной составляющих регулятора.

Передаточные функции элементов

Передаточная функция якорной цепи двигателя. Объединяя (3.9) и (3.13), получим $U_{\Pi} = E + i_{\mathfrak{g}}(R_{\Pi} + R_{\mathfrak{g}}) + (L_{\Pi} + L_{\mathfrak{g}}) (di_{\mathfrak{g}}/dt) = E + i_{\mathfrak{g}} R_{\mathfrak{gu}}(1 + T_{\mathfrak{gu}}p),$ где $R_{\mathfrak{gu}} = R_{\Pi} + R_{\mathfrak{g}}; T_{\mathfrak{gu}} = L_{\mathfrak{gu}}/R_{\mathfrak{gu}}; L_{\mathfrak{gu}} = L_{\Pi} + L_{\mathfrak{g}}; p = d/dt.$ Преобразуем обе части по Лапласу

$$U_{\rm II}(s) = E(s) + I_{\rm s}(s)R_{\rm su}(1 + T_{\rm su} s).$$

Составляем передаточную функцию якорной цепи

$$W_{\rm SII}(s) = \frac{I_{\rm S}(s)}{U_{\rm II}(s) - E(s)} = \frac{1/R_{\rm SII}}{1 + T_{\rm SII}s}.$$

Передаточная функция механической части двигателя. Преобразуем по Лапласу (3.12) и получаем

$$Js\omega = M_{\rm I}(s) - M_{\rm c}(s),$$

Откуда передаточная функция механической части

$$W_{\rm M}(s) = \frac{\omega(s)}{M_{\rm A}(s) - M_{\rm c}(s)} = \frac{1}{Js}.$$

Передаточная функция противо ЭДС двигателя

$$W_E(s) = \frac{E(s)}{\omega(s)} = c_e \Phi = \text{const}.$$

Передаточная функция преобразователя

$$W_{\Pi}(s) = \frac{U_{\Pi}(s)}{U_{p}(s)} = k_{\Pi} = \text{const}.$$

Передаточная функция регулятора

$$W_{\rm p}(s) = \frac{U_{\rm p}}{U_3(s) - U_{\rm TF}(s)} = k_{\rm p} + \frac{k_I}{s}.$$
$$U_{\rm n} = U_{\rm g} + i_{\rm g} R_{\rm n} + L_{\rm n} (di_{\rm g}/dt), \qquad (3.16)$$

Уравнение тахогенератора

$$U_{\rm TT} = k_{\rm TT}\omega, \qquad (3.17)$$

Уравнение регулятора

$$U_{\rm p} = k_{\rm p}(U_3 - U_{\rm TF}) + k_{\rm i} \int (U_3 - U_{\rm TF}) dt, \qquad (3.18)$$

где U_n , R_n и L_n – напряжение, сопротивление и индуктивность преобразователя; U_3 – задающее скорость напряжение; k_{rr} – коэффициент передачи тахогенератора; k_p и k_i – коэффициенты пропорциональности и интегральной составляющей регулятора.

Структурная схема системы

На основании записанных выражений передаточных функций отдельных элементов составляем общую структурную схему системы (рис. 3.36).



Рис. 3.36

По структурной схеме (рис. 3.36) составляем граф системы (рис. 3.37).



Рис. 3.37

По графу с помощью правила Мейсона Определяем передаточную функцию двигателя по управляющему воздействию:

$$\begin{split} W_{\rm H}(s) &= \frac{\omega(s)}{U_{\rm \Pi}(s)} = \frac{W_{\rm HI}(s)W_{\rm MI}(s)W_{\rm M}(s)}{1 + W_{\rm HI}(s)W_{\rm MI}(s)W_{\rm M}(s)W_{\rm E}(s)} = \\ &= \left(\frac{1/R_{\rm HI}}{1 + T_{\rm HI}s}C_{\rm M}\Phi \frac{1}{Js}\right) / \left(1 + \frac{1/R_{\rm HI}}{1 + T_{\rm HI}s}C_{\rm M}C_{\rm E}\Phi^2 \frac{1}{Js}\right) = \\ &= \frac{1/R_{\rm HI}C_{\rm M}\Phi}{(1 + T_{\rm HI}s)Js\frac{C_{\rm M}C_{\rm E}\Phi^2}{R_{\rm HI}}} = \frac{1/R_{\rm HI}C_{\rm M}\Phi}{\frac{C_{\rm M}C_{\rm E}\Phi^2}{R_{\rm HI}}\left[(1 + T_{\rm HI}s)T_{\rm HI}s + 1\right]} = \frac{k_u}{T_{\rm HI}T_{\rm HI}s^2 + T_{\rm HI}s + 1}, \end{split}$$

где $k_{\mu} = 1/c_e \Phi$ – коэффициент передачи двигателя по напряжению; $T_{_{\rm ЭМ}} = JR_{_{\rm ЯЦ}}/c_e c_{_M} \Phi^2$ – электромеханическая постоянная времени двигателя.

Таким образом, по управлению напряжением на якоре двигатель постоянного тока может быть представлен моделью звена второго порядка.

Аналогичным образом можно получить выражение передаточной функции двигателя по моменту сопротивлений *M*_c.

Вопросы для самопроверки

- 1. Каково назначение математического описания систем?
- 2. Что такое динамика системы?
- 3. Чем отличается математическое описание динамики системы от описания ее статики?
- 4. Что представляет собой условие физической реализуемости системы?
- 5. Каким образом линеаризуются дифференциальные уравнения?
- 6. Назовите формы записи линеаризованных уравнений.
- 7. Каким образом перейти к первой форме записи дифференциального уравнения звена? Как в этом случае называются коэффициенты?
- 8. Как перейти от дифференциального уравнения к операторному?
- 9. Дайте определение передаточной функции.
- 10. Как по дифференциальному уравнению звена найти его передаточную

функцию?

- 11. Что такое динамическое звено и его характеристика?
- 12. Дайте определение основных характеристик.
- 13. Какие частотные характеристики используются для исследования систем?
- 14. Почему ЛЧХ нашли большое применение в инженерной практике?
- 15. По каким признакам классифицируются типовые динамические звенья?
- 16. Перечислите группы основных типов звеньев.
- 17. Что представляет собой структурная схема системы управления?
- 18. Какие способы соединений звеньев используются в системах?
- 19. Как находятся передаточные функции смешанных соединений звеньев?
- 20. Каким образом строятся логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи звеньев? Постройте ЛЧХ типовых звеньев.

Раздел 4. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ



4.1. Устойчивость линейных непрерывных систем управления

Изучаемые вопросы:

- Алгебраические критерии устойчивости;
- Частотные критерии устойчивости;
- Оценка устойчивости;
- Классификация методов синтеза;
- Синтез желаемой ЛАЧХ;
- Синтез корректирующих устройств;
- Модальное управление.



Устойчивость систем автоматического управления является важнейшей характеристикой их работоспособности. Неустойчивая система является неработоспособной. Обеспечение устойчивой работы проектируемой или создаваемой системы управления является первоочередной задачей разработчика этой системы.

Под устойчивостью линейной системы понимается свойство затухания переходных процессов во всех элементах системы с течением времени.

Если представить реакцию системы на входной сигнал как сумму вынужденной (установившейся) составляющей и переходной (свободной) составляющей

$$y(t) = y_{y}(t) + y_{cB}(t),$$

$$y(n,\sigma) = y_{y}(n,\sigma) + y_{cB}(n,\sigma)$$

то условие устойчивости формируется следующим образом

$$\lim_{t \to \infty} y_{CB}(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} y_{CB}(n,\sigma) = 0.$$

Если $\lim_{t \to \infty} y_{cB}(t) = \infty$ или $\lim_{t \to \infty} y_{cB}(n,\sigma) = \infty$, то система неустойчива. Дискретная

система может (редко) иметь так называемую высокочастотную неустойчивость, когда $\lim y_{CB}(n,\sigma)=0$, а $\lim y_{CB}(n,\sigma)=\infty$ или постоянной величине. $n \to \infty$ $\sigma=0$ $\sigma \neq 0$

4.1.1. Общее условие устойчивости замкнутых непрерывных систем

Из анализа переходных составляющих выходной величины системы для различных корней характеристического уравнения системы следует, что условия устойчивости, сформулированные выше, выполняются, если все корни имеют от-



тя рицательные вещественные части. В частном случае вещественных корней они должны быть отрицательными. Только в этом случае все переходные составляющие будут стремиться с течением времени к нулю. Таким образом, для непрерывных систем общим условием устойчивости является нахождение всех корней характеристического уравнения замкнутой системы в левой полуплоскости плоскости корней (рис. 4.1). Если хотя бы один корень окажется в пра-

вой полуплоскости, система будет неустойчивой. Мнимая ось плоскости *s* являет-
ся границей устойчивости. Причем, если $s_i = 0$, граница устойчивости называется апериодической. Если $s_{1,2} = \pm j\omega$ (чисто мнимые корни, равноудаленные от начала координат), то граница устойчивости называется колебательной, так как система в этом случае совершает незатухающие колебания, постоянной амплитуды и частоты, равной ω .

Если $s_i < 0$, т. е. Вещественный отрицательный корень, то ему соответствующий $z_i = e^{s_i^T}$ дает $/z_i / < 1$. Если $s_i = \alpha_i + j\omega_i$, где $\alpha_i < 0$, то $z_i = e^{(\alpha_i + j\omega)T} = e^{\alpha_i T} e^{j\omega_i T}$. Причем опять $/z_i / < 1$.

4.1.2. Критерии устойчивости

Вычисление корней уравнения, особенно высокой степени, затруднительно. Поэтому были разработаны критерии, позволяющие делать заключение об устойчивости системы без определения корней характеристического уравнения.

Различают два вида критериев устойчивости:

1) алгебраические;

2) частотные.

Критерии первого вида формируют ограничения на коэффициенты характеристического уравнения. Критерии второго вида базируются на анализе прохождения частотных характеристик замкнутой или разомкнутой системы.

4.1.2.1. Алгебраические критерии устойчивости

Среди алгебраических критериев непрерывных систем наибольшее применение получили критерии Гурвица и Рауса. Рассмотрим их в указанной последовательности.

Критерий Гурвица

Из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ составляется таблица, называемая матрицей Гурвица по следующему правилу:

1) по диагонали сверху вниз записываются все коэффициенты, начиная с *a*₁ до *a*_n в порядке возрастания индексов;

2) столбцы дополняются вверх коэффициентами с возрастающими индексами, вниз коэффициентами с убывающими индексами; 3) на месте коэффициентов с индексами больше n и меньше нуля проставляются нули.

Сам критерий формируется следующим образом: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ были положительными *п* главных диагональных определителя матрицы Гурвица.

Главные определители матрицы Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$
 и так далее.

Частные случаи.

1. Система 1-го порядка, характеристическое уравнение которой $a_0s + a_1 = 0$, устойчива, если $a_0 > 0$ и $a_1 > 0$, т. е. Если оба коэффициента характеристического уравнения положительны.

2. Система 2-го порядка (характеристическое уравнение $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$) устойчива, если $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_1a_2 > 0$, т. е. Если все три коэффициента положительны.

3. Положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы любого порядка.

4. Наличие хотя бы одного отрицательного коэффициента является признаком неустойчивого состояния системы.

5. Равенство нулю свободного коэффициента $a_n = 0$, означает, что система находится на границе устойчивости.

6. Равенство нулю любого другого коэффициента свидетельствует либо о неустойчивости системы, либо о нахождении ее на границе устойчивости.

Критерий Гурвица удобен не только для проверки устойчивости замкнутой системы. С его помощью легко выясняется влияние того или иного параметра

системы на ее устойчивость, а также легко определяются границы значений параметра, в которых система остается устойчивой.

Критерий Рауса

При использовании критерия Рауса для проверки устойчивости замкнутой системы составляется таблица Рауса (табл. 4.1). Она содержит n + 1 строк и число столбцов, равное числу четных коэффициентов характеристического уравнения. В первой строке записываются коэффициенты с четными индексами, начиная с a_0 , во второй – коэффициенты с нечетными индексами, начиная с a_1 . Любой из остальных элементов таблицы определяется по выражению $C_{i,j} = C_{i-2,j+1} - r_i C_{i-1,j+1}$, где $r_i = C_{i-2,1}/C_{i-1,1}$; *i* – номер строки, а *j* – номер столбца таблица Рауса.

Критерий устойчивости Рауса формируется следующим образом.

Для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы элементы первого столбца таблицы Рауса были положительны.

Таблица 4.1

Коэффици-		Номер столбца			
енты <i>r_i</i>	i	1	2	3	•••
-	1	$C_{11} = a_0$	$C_{12} = a_2$	$C_{13} = a_4$	
-	2	$C_{21} = a_1$	$C_{22} = a_3$	$C_{23} = a_5$	•••
$r_3 = C_{11}/C_{21}$	3	$C_{31} = C_{12} - r_3 C_{22}$	$C_{32} = C_{13} - r_3 C_{23}$	$C_{33} = C_{14} - r_3 C_{24}$	
$r_4 = C_{21}/C_{31}$	4	$C_{41} = C_{22} - r_4 C_{32}$	$C_{42} = C_{23} - r_4 C_{33}$	$C_{43} = C_{24} - r_4 C_{34}$	
$r_5 = C_{31}/C_{41}$	5	$C_{51} = C_{32} - r_5 C_{42}$	$C_{52} = C_{33} - r_5 C_{43}$	$C_{53} = C_{34} - r_5 C_{44}$	
		•••			
$r_i = C_{i-2,1} / C_{i-1,1}$	i	$C_{i1} = C_{i-2,2} - r_i C_{i-2,2}$	$C_{i2} = C_{i-2,3} - r_i C_{i-1,3}$	$C_{i3} = C_{i-2,4} - r_i C_{i-1,4}$	•••
•••	•••	•••	•••	•••	•••
$r_{n+1} =$	<i>n</i> +1	$C_{n+1,1} = C_{n-1,2}$ -			
$= C_{n-1,1}/\mathcal{C}_{n,1}$		$-r_{n+1}C_{n,2}$	Не составляются		

При наличии отрицательных элементов в 1-ом столбце система будет неустойчивой. Число таких элементов равно числу корней характеристического уравнения, находящихся в правой полуплоскости плоскости *s*.

Если один из элементов первого столбца равен нулю, а остальные элементы положительны, то система будет находиться на границе устойчивости колебательного типа (характеристическое уравнение будет иметь пару чисто мнимых корней). Если равен нулю (n + 1)-элемент или равны нулю k последних элементов 1го столбца, система также будет находиться на границе устойчивости, а характеристическое уравнение будет иметь один или k нулевых корней.

Таблица и критерий Рауса положены в основу алгоритма и программы проверки устойчивости в ряде компьютерных пакетов анализа моделей различных систем.

4.1.2.2. Частотные критерии устойчивости

Среди частотных критериев устойчивости, используемых в практике анализа устойчивости непрерывных и дискретных систем автоматического управления, наибольшее признание получили критерий годографа характеристического полинома замкнутой системы (известный в отечественной литературе как критерий Михайлова) и критерий Найквиста, обеспечивающий определение устойчивости по виду частотных характеристик разомкнутой системы.

В основу названных выше критериев положено следствие из известного в теории функции комплексной переменной принципа аргумента. Оно устанавливает соответствие между числом корней в левой и правой полуплоскости и суммарным приращением аргумента вектора характеристического полинома замкнутой системы, при изменении частоты в диапазоне $0 \le \omega \le +\infty$. Рассмотрим это соответствие.

Характеристическое уравнение замкнутой непрерывной системы

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где левая часть уравнения D(s) называется характеристическим полиномом. Его можно представить в соответствии с теоремой Безу следующим образом D(s) = $a_0(s - s_1) (s - s_2) \dots (s - s_i) \dots (s - s_n)$, где $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ – корни характеристического уравнения D(s) = 0; $s_i = \alpha_i + j\omega_i$. На комплексной плоскости каждый



корень может быть представлен вектором (рис. 4.2). Длина вектора $|s_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2}$, угол поворота от положительной вещественной полуоси равен аргументу Args_i = arctg(ω_i/α_i). Отдельные сомножители D(s) вида (s – s_i) могут быть преда ставлены векторами, проведенными из точек s_i в точки s.

Положим $s = j\omega$, тогда вектор $(s - s_i) = (j\omega - s_i)$ будет скользить своим концом по мнимой оси при изменении частоты $+\infty \le \omega \le \infty$.

Приращение аргумента $D(s) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \operatorname{Arg}(j\omega - s_i)$, причем корень s_i , распо-- $\infty \le \omega \le \infty$

ложенный в левой полуплоскости, обеспечивает приращение аргумента $+\pi$ (рис. 4.3, а), а корень, находящийся в правой полуплоскости, дает $\Delta \text{Args}_i = -\pi$ (рис. 4.3, б).



Рис. 4.3

Если общее число корней характеристического уравнения n, а в правой полуплоскости находится m корней, то суммарное приращение аргумента D(s)

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \operatorname{Arg}(j\omega - s_i) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi$$

Если изменять частоту только в положительном диапазоне $0 \le \omega \le \infty$, то суммарное приращение аргумента D(s) будет в 2 раза меньше

$$\Delta \mathrm{Arg}D(s) = (n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

Полученное соотношение положено в основу частотных критериев устойчивости непрерывных систем.

Критерий годографа характеристического полинома

На основании полученного в предыдущем параграфе соотношения для непрерывных систем и полагая, что в правой полуплоскости нет ни одного корня

$$(m = 0)$$
, находим, что $\Delta \operatorname{ArgD}(s) = n \frac{\pi}{2}$.
 $s = j\omega$
 $0 \le \omega \le \infty$

Отсюда вытекает следующая формулировка критерия.

Для устойчивости замкнутой непрерывной системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в диапазоне $0 \le \omega \le \infty$ годограф характеристического полинома начинался на положительной вещественной оси и обошел в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно *n* квадрантов, нигде не обращаясь в нуль и нигде не пересекаясь сам с собой.

Годографы устойчивых систем показаны на рис. 4.4, а, для неустойчивых систем на рис. 4.4, б.



Рис. 4.4

Если систем находится на границе устойчивости, то годограф *D*(*j*ω) проходит через начало координат.

Положим *m* = 0 в соотношении, записанном для дискретных систем, получим

$$\Delta \operatorname{Arg} D(e^{j\omega T}) = n\pi,$$

$$0 \le \omega \le \frac{\pi}{T}$$

откуда следует следующая формулировка критерия.

Для устойчивости замкнутой дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в диапазоне $0 \le \omega \le \pi/T$ годограф характеристического полинома обошел в положительном направлении 2n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль и не пересекаясь сам с собой.

Годографы устойчивых дискретных систем второго и четвертого порядка показаны на рис. 4.5.

Как и отмечалось ранее, крайние точки годографов $D(e^{j^0})$ и $D(e^{j^{\pi}})$ являются вещественными и находятся на вещественной оси.



Критерий Найквиста

Критерий Найквиста позволяет оценивать устойчивость замкнутой системы автоматического управления по частотным характеристикам разомкнутой системы. В качестве частотных характеристик используется амплитудно-фазовая (АФХ) характеристика и ЛАФЧХ разомкнутой системы.

Рассмотрим сначала критерий Найквиста на базе АФХ разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \le n.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)},$$

где A(s) + B(s) = D(s) -характеристический полином замкнутой системы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{D(s)}{A(s)}.$$

Заметим, что числитель $\varphi(s)$ равен D(s) характеристическому полиному замкнутой системы, а знаменатель A(s) – характеристический полином разомкнутой системы. Заметим также, что степени числителя и знаменателя равны, так как $m \leq n$.

Предположим, что разомкнутая система устойчива, т. е. все корни A(s) = 0 лежат в левой полуплоскости. Для того, чтобы и замкнутая система была устойчивой, необходимо, чтобы все корни D(s) = 0 находились также в левой полуплоскости.

Положим $s = j\omega$ и будем изменять ω от 0 до ∞ . Согласно принципа аргумента

$$\Delta \operatorname{Arg} \varphi(j\omega) = \Delta \operatorname{Arg} D(j\omega) - \Delta \operatorname{Arg} A(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2} = 0.$$

Это значит, что годограф вспомогательной функции $\varphi(j\omega)$ при $0 \le \omega \le \infty$ не будет охватывать начало координат (рис. 4.6, а). Заметим, что комплексная передаточная функция разомкнутой системы отличается от $\varphi(j\omega)$ на единицу

$$W(j\omega) = \varphi(j\omega) - 1.$$

Поэтому вместо $\phi(j\omega)$ можно рассматривать $W(j\omega)$, но в координатах, где мнимая ось перенесена на (-1) (рис. 4.6, б).



Отсюда следует формулировка критерия Найквиста для случая устойчивой разомкнутой системы.

Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы не охватывала критическую точку с координатами (-1, *j*0).

На рис. 4.7 показаны различные случаи прохождения АФХ разомкнутой



системы относительно критической точки (-1, j0).

Штриховыми линиями показаны АФХ при уменьшении коэффициента усиления разомкнутых систем:

случай а) – абсолютно устойчивая система;

случай б) – система на границе устойчивости;

случай в) – условно устойчивая система, которая при уменьшении коэффициента усиления может стать неустойчивой;

случай г) – неустойчивая система.

Для астатических систем (v > 0) применение критерия Найквиста имеет свою особенность. Дело в том, что АФХ таких систем в области низких, частот приближаются к одной из осей комплексной плоскости. Поэтому для определения устойчивости по критерию Найквиста необходимо предварительно дополнять



Рис. 4.8

АФХ дугами $-\nu \pi/2$ окружности бесконечно большого радиуса (рис. 4.8).

Теперь предположим, что разомкнутая система не устойчива, т. е. *l* корней характеристического уравнения находятся в правой полуплоскости.

Тогда при изменении частоты от 0 до ∞ суммарное приращение аргумента будет

$$\Delta \operatorname{Arg}[1 + W(j\omega)] = \Delta \operatorname{Arg}D(j\omega) - \Delta \operatorname{Arg}A(j\omega) = n\frac{\pi}{2} - (n-l)\frac{\pi}{2} = \frac{l}{2}\pi$$

Отсюда формулировка критерия Найквиста.

Если разомкнутая система неустойчива, то для того, чтобы была устойчивой замкнутая система, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы охватывала критическую точку в положительном направлении l^2 раз, где l – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы в правой полуплоскости.

На рис. 4.9 показана АФХ разомкнутой системы, имеющая два корня в правой полуплоскости. Система, имеющая такую АФХ, будет устойчивой в замкнутом состоянии.

При сложной форме АФХ определить число охватов критической точки (-1, *j*0) затруднительно. В этом случае удобнее считать число переходов



АФХ через отрезок (-∞, -1) отрицательной вещественной оси. Переход сверху

вниз считается положительным, снизу вверх – отрицательным. Если A Φ X начинается на отрезке ($-\infty$, -1) при $\omega = 0$ и заканчивается на нем при $\omega = \infty$, то считается, что она совершает $\frac{1}{2}$ перехода.

Формулировка критерия Найквиста по числу переходов будет следующей.

Если разомкнутая система неустойчива, то для того, чтобы разность между числами положительных и отрицательных переходов АФХ разомкнутой системы через отрезок вещественной оси ($-\infty$, -1) была равна l^{2} , где l – число корней ра-



Рис. 4.10

зомкнутой системы в правой полуплоскости.

Так система, АФХ которой показана на рис. 4.10, будет устойчивой, если число корней в $\omega = \infty \omega = 0 U$ правой полуплоскости l = 2.

Рассмотрим теперь, как будет формироваться критерий Найквиста с использованием логарифми-ческих амплитудно-частотных фазочастотных ха-

рактеристик. Прежде всего установим, где будет расположена критическая точка



Рис. 4.11

с координатами (-1, *j*0) в плоскости АФХ разомкнутой системы. Отметим, что критической точке (-1, *j*0) соответствует точка, в которой модуль вектора АФХ / $W(j\omega)$ / = 1, а угол сдвига φ = Arg $W(j\omega) = -180^{\circ}$. В плоскости ЛАФЧХ этой точке соответствует частота, на которой $L(\omega) = 20$ $\lg/W(j\omega)$ / = 0, т. е. график $L(\omega)$ пересекает ось

частот, и $\phi(\omega) = -180^\circ$, т. е. график $\phi(\omega)$ пересекает линию (-180°). Таким образом, если замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, то ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы пересекают линии $L(\omega) = 0$ и $\phi(\omega) = -180^\circ$ одновременно, на одной и той же частоте (рис. 4.12).

Если же система устойчива в разомкнутом и замкнутом состояниях, то ее АФХ проходит справа от критической точки, т. е. $/W(j\omega)/_{\omega=-\pi} < 1$.

Отсюда следует первая формулировка критерия Найквиста по ЛАФЧХ разомкнутой системы: если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно,



Рис. 4.12

чтобы ЛАЧХ системы пересекала ось частот раньше, чем ЛФЧХ пересечет линию $\phi = -180^{\circ}$.

Иллюстрация взаимного расположения ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы, устойчивой в замкнутом состоянии, показана на рис. 4.13.

При сложной форме АФХ и ЛАФЧХ может иметь место неоднократное пересечение 0 линии $\varphi = -180^{\circ}$ характеристикой $\varphi(\omega)$ на участке частот, где $L(\omega) > 0$, т. е. до точки пересечения $L(\omega)$ оси частот. То же явление может наблюдаться и в плоскости ЛАФЧХ системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии. В этом



случае проще делать заключение о том, устойчива система или нет в замкнутом состоянии по числу, переходов графика $\phi(\omega)$ через линию $\phi = -180^{\circ}$ левее точки пересечения графиком $L(\omega)$ оси частот. Формулировка критерия Найквиста в этом случае следующая: для –устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при положительных значениях ЛАЧХ разность между числом положительных и отрицательных переходов ФЧХ через линию $\phi = -180^{\circ}$ равнялась l/2, где l – число корней, расположенных в правой полуплоскости. Положительным считается переход ФЧХ линии $\phi = -180^{\circ}$ снизу вверх, отрицательным – сверху вниз. Рис. 4.14 иллюстрирует это положение, сформулированное выше. Характе-



ристика φ₁(ω) соответствует системе, устойчивой в разомкнутом состоянии и находящейся на границе устойчивости в замкнутом состоянии. Характеристика φ₂(ω) принадлежит системе устойчивой в разомкнутом и замкнутом состояниях. И, наконец, φ₃(ω) свидетельствует о неустойчивости в разомкнутом состоянии и устойчивости в замкнутом, если число неустойчивых корней l = 2.

Сформулированные выше правила определения (не) устойчивости замкнутой системы по ЛАФЧХ разомкнутой системы полностью применимы и для дискретных систем. Особенностью является лишь то, что ЛФЧХ дискретных систем строятся в функции псевдочастоты λ , а в случае формулировки устойчивости для

неустойчивой в разомкнутом состоянии дискретной системы *l* означает число корней, по модулю больше единицы, т. е. находящихся вне круга единичного радиуса.

4.2. Анализ точности и качества процессов управления

4.2.1. Оценка точности САУ в установившихся режимах

4.2.1.1. Точность САУ в режиме стабилизации

Среди типовых режимов работы САУ простейшим, но и широко используемым в технике и технологии режимом является работа при постоянной величине управляющего воздействия или просто стабилизация. Основная задача системы стабилизации – поддержание регулируемой величины на заданном постоянном уровне в условиях существования возмущающих воздействий.

В этом параграфе мы оценим ошибки системы в режиме стабилизации, когда и управляющее и возмущающее воздействия имеют ступенчатую форму. В качестве объекта исследования при-

мем одноконтурную систему с возмущающим воздействием f, приложен- $g \longrightarrow W_1($ ным в середине прямого какнала системы (рис. 4.15). Рассмотрим три варианта состава звеньев в прямом канале системы:



1) все звенья являются позиционными;

2) в составе $W_2(s)$ есть хотя бы одно интегрирующее звено;

3) в составе $W_1(s)$ есть хотя бы одно интегрирующее звено.

Позиционными будем называть звенья безинерционные $W_i(s) = k_i$ или динамические звенья 1-го и 2-го порядка, свободные члены передаточных функций которых равны единице. Например, $W_i(s) = k_i / (T_i \ s \ + \ 1), W_i(s) =$ $= k_i (T_i \ s \ + \ 1), W_i(s) = k_i / (T_i^2 \ s^2 + 2\varepsilon T_i \ s \ + \ 1)$ и их комбинации $W_i(s) = k_i \frac{Q_i(s)}{P_i(s)}$, где Q_i

(s) и $P_i(s)$ полиномы со свободными членами равными единице.

<u>Итак, первый вариант</u> – все звенья прямого канала позиционные. Канал обратной связи во всех случаях будет приниматься позиционным. Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \prod_{i=1}^{n} k_i \frac{Q_i(s)}{P_i(s)} = kW'(s),$$

где $k = k_1 k_2 \dots k_n$ – общий коэффициент передачи разомкнутой системы; W'(s) – рациональная дробь при *s* = 0 равная единице.

Пусть на систему действует только управляющее воздействие g(t) = $= g_0 1(t)$ ступенчатой формы. Тогда установившееся значение ошибки от управляющего воздействия

$$e_g(t) = \lim_{s \to 0} sE_g(s),$$

 $t \to \infty$ где $E_g(s) = G(s)\Phi_g(s) = \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+W(s)} = \frac{g_0}{s} \frac{1}{1+kW(s)}.$

Окончательно

$$e_{g}(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{g_{0}}{s} \frac{1}{1 + kW'(s)} = \frac{g_{0}}{1 + k}.$$

Таким образом, система, состоящая только из позиционных звеньев, отрабатывает ступенчатое управляющее воздействие с ошибкой, пропорциональной величине воздействия g_0 и обратно пропорциональной (с точностью до единицы) общему коэффициенту передачи разомкнутой системы.

Пусть теперь на систему действует возмущение ступенчатой формы f(t) = $f_0 1(t)$. Установившееся значение ошибки от возмущения

$$e_f(t) = \lim_{s \to 0} s E_f(s),$$

$$t \to \infty$$

где $E_f(s) = F(s)\Phi_f(s)$. Здесь $E_f(s) = f_0/s$, $\Phi_f = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1+kW'(s)} = \frac{k_2W_2'(s)k_3W_3'(s)}{1+kW'(s)}$. Под-

ставляя в общую формулу, имеем

$$e_{f}(t) = \lim_{s \to 0} \frac{f_{0}}{s} \frac{k_{2}W_{2}'(s)k_{3}W_{3}'(s)}{1 + kW'(s)} = f_{0}\frac{k_{2}k_{3}}{1 + k}.$$

Итак, система, состоящая только из позиционных звеньев, имеет ошибки, о определяемые как управляющим, так и возмущающим воздействием. Обе составляющие ошибки обратно пропорциональны (с точностью до единицы) общему коэффициенту передачи разомкнутой системы k. Чем больше k, тем



Рис. 4.16

меньше ошибки. Увеличение k в рассматриваемой системе возможно только до определенного значения, называемого критическим, при котором система будет находиться на границе устойчивости (рис. 4.16).

<u>Второй вариант</u>: в составе звеньев, описываемых передаточной функцией $W_2(s)$, есть интегрирующее звено

$$W_2(s) = \frac{k_2}{s} \frac{Q_2(s)}{P_2(s)},$$

где $Q_2(s) = P_2(s) = 1.$ $s \to 0$ $s \to 0$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k}{s}W'(s),$$

где W'(s) = 1.

 $s \rightarrow 0$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия

$$\Phi_g(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{s}W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия

$$\Phi_{f}(s) = \frac{W_{2}(s)W_{3}(s)}{1+W(s)} = \frac{\frac{k_{2}}{s}\frac{Q_{2}(s)}{P_{2}(s)}k_{3}W_{3}'(s)}{1+\frac{k}{s}W'(s)} = \frac{k_{2}k_{3}W_{2}'(s)W_{3}'(s)}{s+kW'(s)}.$$

Ошибка установившегося режима по управляющему воздействию

$$e_g(t) = \lim_{s \to 0} sE_g(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{g_0}{s} \frac{s}{s+kW'(s)} = 0$$

Ошибка установившегося режима по возмущающему воздействию

$$e_f(t) = \lim_{s \to 0} sE_f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{f_0}{s} \frac{k_2 W_2(s) k_3 W_3(s)}{1 + k W'(s)} = f_0 \frac{k_2 k_3}{1 + k} = \frac{f_0}{k_1}$$

Таким образом, система, имеющая в прямом канале интегрирующее звено, расположенное после точки приложения возмущающего воздействия, обеспечивает отсутствие ошибки от ступенчатого управляющего воздействия и имеет постоянную ошибку, обусловленную ступенчатым возмущающим воздействием. <u>Третий вариант:</u> интегрирующее звено включено в группу звеньев, описываемых передаточной функцией $W_1(s)$, т. е. $W_1(s) = \frac{k_1}{s} \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}$, где $Q_1(s) = P_1(s) = 1$.

Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{k}{s}W'(s).$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия

$$\Phi_g(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{s}W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия

$$\Phi_{f} = \frac{W_{2}(s)W_{3}(s)}{1+kW(s)} = \frac{k_{2}W_{2}'(s)k_{3}W_{2}'(s)}{1+k_{s}'W'(s)} = \frac{sk_{2}W_{2}'(s)k_{3}W_{3}'(s)}{s+kW'(s)}.$$

Ошибка установившегося режима по управляющему воздействию ступенчатой формы

$$e_g(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{g_0}{s} \frac{s}{s + kW'(s)} = 0$$

Ошибка установившегося режима по возмущающему воздействию ступенчатой формы

$$e_{f}(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{f_{0}}{s} \frac{sk_{2}W_{2}'(s)k_{3}W_{3}'(s)}{s + kW'(s)} = 0.$$

Таким образом, система, содержащая интегрирующее звено в прямом канале, расположенное до точки приложения возмущающего воздействия, не имеет ошибок как от управляющего, так и от возмущающего воздействий ступенчатой формы.

Система, имеющая интегрирующее звено в прямом канале, называется астатической системой 1-го порядка.

Астатическая система 1-го порядка воспроизводит ступенчатое управляющее воздействие без ошибки в установившемся режиме и полностью подавляет ступенчатое возмущающее воздействие, если оно действует в прямом канале после интегрирующего звена.

Вот почему интегральный или пропорционально-интегральные регуляторы ставятся всегда вначале прямого канала сразу после узла сравнения.

4.2.1.2. Установившиеся ошибки при отработке медленно меняющихся внешних воздействий (коэффициенты ошибок)

Под медленно меняющимися внешними воздействиями мы будем понимать сигналы, описываемые степенными временными рядами

$$g(t) = (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_l t^l)\mathbf{1}(t).$$

В эту группу воздействий входят почто все типовые воздействия, принятые в ТАУ для анализа и синтеза систем управления. В частности, первое слагаемое $g(t) = g_0 1(t)$ – ступенчатое воздействие; второе слагаемое $g(t) = g_0 t l(t)$ – скоростное (линейное) воздействие; третье слагаемое $g(t) = g_0 t^2 l(t)$ – параболическое (квадратичное) воздействие.

Для установившейся ошибки воспроизведения медленно меняющихся воздействий было получено специальное выражение, имеющее для непрерывных систем следующую форму

$$e_{g}(t) = C_{0}g(t) + C_{1}\frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2}C_{2}\frac{d^{2}g(t)}{dt^{2}} + \dots + C_{i}\frac{1}{i!}\frac{d^{i}g(t)}{dt^{i}}$$

где C₀, C₁, C₂, ..., C_i – коэффициенты ошибок, определяемые по выражению

$$C_i = \left[\frac{d^i \Phi_{eg}(s)}{ds^i}\right]_{s=0}$$

Так $C_0 = \left[\Phi_{eg}(s) \right]_{s=0}; \quad C_1 = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0}, \quad \text{где } \Phi_{eg}(s) - \text{передаточная функция}$

замкнутой системы по ошибке от воздействия g(t). На практике значения коэффициентов ошибок для l > 2 определяют по формулам, приведенным в справочнике. Для i = 0, 1, 2 коэффициенты можно определять непосредственно по вышеприведенным формулам.

Используя выражение для установившейся ошибки через коэффициенты ошибок, найдем значение коэффициентов ошибок при отработке непрерывной системой типовых воздействий: $g(t) = g_0(t)$; $g(t) = g_0t$; $g(t) = g_0t^2$.

1. <u>Система статическая</u> (порядок астатизма v = 0), воздействие ступенчатое $g(t) = g_0 1(t)$.

Установившаяся ошибка при отработке ступенчатого воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) = C_0 g_0.$$

$$t \to \infty$$

Заметим, что другие слагаемые выражения ошибки, содержащие производ-

ные от g(t) по времени будут равны нулю, так как $\frac{d^i g(t)}{dt^i} = 0$ при i > 0.

Коэффициент ошибки

$$C_0 = \left[\Phi_{eg}(s) \right]_{s=0} = \left[\frac{1}{1 + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{1 + k},$$

так как W'(s) = 1 и значение установившейся ошибки $e_g(t) = \frac{1}{1+k}g_0$. Итак, $t \to \infty$

$$C_0 = \frac{1}{1+k}.$$

2. <u>Система астатическая 1-го порядка</u> (v = 1).

Воздействие линейное $g(t) = g_0 t l(t)$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{s}W'(s)} = \frac{s}{s + kW'(s)}.$$

Установившаяся ошибка при отработке линейного воздействия

$$e_{g}(t) = C_{0}g(t) + C_{1}\frac{dg(t)}{dt} = C_{0}g_{0}t + C_{1}g_{0}.$$

$$C_{0} = \left[\Phi_{eg}(s)\right]_{s=0} = \left[\frac{s}{s+kW'(s)}\right]_{s=0} = 0,$$

$$C_{1} = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds}\right]_{s=0} = \left[\frac{d}{ds}\frac{s}{s+kW'(s)}\right]_{s=0} = \frac{1}{k}$$

$$C_{1} = \frac{1}{k}$$

Установившееся значение ошибки $e_g(t) = \frac{g_0}{k}$. Ошибка при отработке ли $t \to \infty$

нейного внешнего воздействия называется скоростной ошибкой. Она пропорциональна скорости изменения воздействия g_0 и обратно пропорциональна общему коэффициенту усиления разомкнутой астатической системы 1-го порядка, который называется добротностью системы по скорости.

3. <u>Система астатическая 2-го порядка</u> (v = 2).

Воздействие параболическое $g(t) = g_0 t^2$.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_{eg}(s) = \frac{1}{1 + \frac{k}{s^2}W'(s)} = \frac{s^2}{s^2 + kW'(s)}.$$

Установившаяся ошибка при отработке параболического воздействия

$$e_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = C_0 g_0 t^2 + 2g_0 t C_1 + C_2 g_0.$$

Коэффициенты ошибок

$$C_{0} = \left[\Phi_{eg}(s) \right]_{s=0} = \left[\frac{s^{2}}{s^{2} + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$C_{1} = \left[\frac{d\Phi_{eg}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \left[\frac{d}{ds} \frac{s^{2}}{s^{2} + kW'(s)} \right]_{s=0} = 0;$$

$$C_{2} = \left[\frac{d^{2}\Phi_{eg}(s)}{ds^{2}} \right]_{s=0} = \left[\frac{d^{2}}{ds^{2}} \frac{s^{2}}{s^{2} + kW'(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{k};$$

$$C_{2} = \frac{1}{k}.$$

Установившееся значение ошибки $e_g(t) = \frac{g_0}{k}$.

Ошибка при отработке параболического внешнего воздействия называбется ошибкой по ускорению. Она пропорциональна ускорению внешнего воздействия g_0 и обратно пропорциональна общему коэффициенту передачи разомкнутой астатической системы 2-го порядка, который называется добротностью системы по ускорению.

4.2.1.3. Анализ влияния порядка астатизма системы на установившиеся ошибки при отработке типовых степенных воздействий

Обобщая приведенный анализ установившихся ошибок в системах различного порядка астатизма при отработке ступенчатых и медленно меняющихся воздействий, получим общие выражения установившихся ошибок в функции порядка астатизма и степени внешнего воздействия. Пусть управляющее воздействие имеет форму $g(t) = \frac{g_0}{m!} t^m$, и изображения

по Лапласу $G(s) = \frac{g_0}{s^{m+1}}, m = 0, 1, 2,...$

Изображение ошибки при таком воздействии

$$E_g(s) = G(s)\Phi_{eg}(s) = \frac{g_0}{s^{m+1}}\frac{1}{1+W(s)}$$

Установившееся значение ошибки

$$e_g(t) = \lim_{s \to 0} sE_g(s) = \lim_{s \to 0} g_0 \frac{1}{s^m [1 + W(s)]}.$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s^{\nu}} W'(s),$$

где k – общий коэффициент передачи системы; v - порядок астатизма системы; W'(s) – передаточная функция, не содержащая нулевых полюсов.

Тогда установившееся значение ошибки

$$e_g(t) = \lim_{s \to 0} \frac{g_0 s^{\nu - m}}{s^{\nu} + kW'(s)}.$$

Отсюда видно, что $e_g(t) = 0$ только при v > m, т. е. порядок астатизма системы v $t \to \infty$

должен быть боше степени *т* воздействия.

При v = m установившаяся ошибка имеет постоянную величину $e(t) = \frac{g_0}{k}$,

что означает, что системы с астатизмом 1-го и 2-го порядка будут иметь постоянные ошибки при отработке линейного и квадратичного воздействий соответственно.

При v = m = 0 $e(t) = \frac{g_0}{1+k}$. Это ошибка системы с v = 0 при отработке сту-

пенчатого воздействия.

И, наконец, при v < m $e(t) = \infty$. Так система, не имеющая интеграторов, бу $t \rightarrow \infty$

дет иметь бесконечную ошибку уже при воздействии $g(t) = g_0 t$, т. е. при m = 1.

Сделанные выводы полностью справедливы и для дискретно непрерывной системы подобной структуры (одноконтурной). В табл. 4.2 сведены установив-

шиеся ошибки систем (непрерывных и дискретно непрерывных) различного порядка астатизма при отработке внешних воздействий степенной формы.

Порядок	Внешнее воздействие					
астатизма	Ступенчатое	Линейное	Квадратичное			
системы	$g(t) = g_0 1(t)$	$g(t) = g_0 t 1(t)$	$g(t) = g_0 t^2 1(t)$			
v = 0	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} \right\} = \frac{g_0}{1+k} $	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} \right\} = \infty $	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} \right\} = \infty $			
v = 1	$ \begin{cases} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{cases} = 0 $	$ \begin{cases} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{cases} = \frac{g_0}{k} $	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} \right\} = \infty $			
v = 2	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} \end{array} = 0 $	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} \right\} = 0 $	$ \begin{array}{c} e(t) \\ t \to \infty \\ e(n) \\ n \to \infty \end{array} = \infty $			

Таблица 4.2

Из таблицы можно извлечь следующие выводы:

1) Система с астатизмом v = 0 (статическая система) не способна воспроизводить линейные и квадратичные сигналы и поэтому не используются как следящая или программного управления;

2) Система с астатизмом 1-го порядка (v = 1) способна работать как СПУ;

3) Система с астатизмом 2-го порядка (v = 2) обеспечивает точное воспроизведение ступенчатых и линейных сигналов и может отрабатывать квадратичные воздействия с постоянной ошибкой; может работать в режиме слежения.

Что касается установившейся ошибки от возмущающего воздействия степенной формы, то ее значение зависит не только от соотношения порядка астатизма системы и степени воздействия, но и от распределения интегрирующих звеньев между регулятором и объектом управления, т. е. зависит от точки приложения возмущающего воздействия в системе.

Пусть регулятор содержит l_p , а объект управления l_0 интеграторов. Тогда порядок астатизма системы $v = l_p + l_0$.

ПФ замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия (рис. 3.22)

$$\Phi_{ef}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)} = \frac{\frac{k_0}{s^{l_0}} W_2'(s)}{1 + \frac{k}{s^{v}} W'(s)}$$

где $W(s) = W_1(s)$ $W_2(s)$ $W_3(s)$; причем $W_1(s) = \frac{k_p}{s^{l_p}} W_1'(s)$, $W_2(s) = \frac{k_0}{s^{l_0}} W_2'(s)$,

 $W_3(s) = k_3 W'_3(s); W'_1(s), W'_2(s), W'_3(s)$ – передаточные функции, не имеющие нулевых полюсов.

Тогда
$$\Phi_{ef}(s) = \frac{k_0 s^{\nu - l_0} W'_2(s)}{s^{\nu} + k W'(s)} = \frac{k_0 s^{l_0} W'_2(s)}{s^{\nu} + k W'(s)}$$

Установившееся значение ошибки от возмущающего воздействия степенной формы $f(t) = \frac{f_0}{k!} t^k$, $F(s) = \frac{f_0}{s^{k+1}}$.

$$e_{f}(t) = \lim_{s \to 0} sE_{f}(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{f_{0}}{s^{k+1}} \frac{k_{0}s^{l_{p}}W_{2}'(s)}{s^{\nu} + kW'(s)} = f_{0}k_{0} \lim_{s \to 0} \frac{s^{l_{p}-k}W_{2}'(s)}{s^{\nu} + kW'(s)}.$$

Полученное выражение позволяет сделать следующие выводы:

 установившееся значение ошибки от возмущающего воздействия определяется соотношением числа интеграторов в регуляторе и степени воздействия и не зависит от числа интеграторов объекта управления;

2. отсутствие интеграторов в регуляторе вызывает ошибку e_f (∞) = $= f_0 k_0 / (1 + k)$ при k = 0, v = 0; $e_f (∞) = f_0 / k_p$ при k = 0, $v \neq 0$; $e_f = ∞$ при $k \ge 1$;

3. наличие интеграторов в регуляторе позволяет иметь $e_f(\infty) = 0$ при $l_p > k$; $e_f(\infty) = f_0/k_p$ при $l_p = k$; $e_f(\infty) = \infty$ при $l_p < k$.

Таким образом, размещения интеграторов в регуляторе до точки приложения возмущения позволяет свести к нулю ошибки установившегося режима, выбирая число интеграторов больше степени возмущающего воздействия.

Эти выводы справедливы и для дискретно непрерывной системы, в которой возмущающие воздействия приложены после регулятора.

4.2.2. Оценка качества работы САУ в переходных режимах 4.2.2.1. Показатели качества переходных процессов

Для оценки качества переходных процессов в системах автоматического управления используются различные показатели, которые могут быть подразделены на четыре группы: 1) показатели переходной характеристики замкнутой системы; 2) частотные показатели качества; 3) корневые показатели; 4) интегральные оценки качества переходных процессов.

Показатели переходной характеристики непосредственно связаны с требованиями автоматизируемых процессов и поэтому называются прямыми показате-



лями качества. К ним относятся (рис. 4.17): максимальное значение переходной характеристики h_{max} , время достижения максимального значения t_{max} , пере $h_{\text{max}} - h_{\text{v}}$

регулирование $\sigma = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{y}}}{h_{\text{y}}} 100\%$; установившееся

значение h_y ; время первого согласования (время подъема) t_1 ; время регулирования t_p – время от начала переходной характеристики до момента ее входа в зону

 $(0.95 - 1.05)h_y$, после которого она остается в этой зоне. Величина зоны может быть иной, например $\pm 0.01 h_y$, но в этом случае ее величина специально оговаривается.

Такие же показатели определяются по переходной характеристике дискретно непрерывной или дискретной САУ. Разница состоит лишь в том, определение происходит по дискретным значениям переходной характеристики. При достаточно малом периоде квантования свойства дискретно непрерывной системы близки к свойствам непрерывной системы, поэтому дискретные значения переходной характеристики с большой долей уверенности могут быть соединены в плавную кривую.

В ряде случаев получение переходной характеристики экспериментальным путем затруднительно как для непрерывной, так и для дискретной системы. Поэтому вместо прямых показателей качества используют косвенные показатели качества переходных процессов: частотные и корневые. Частотные показатели качества могут быть получены как экспериментальным, так и теоретическим путем. Они подразделяются на две группы:

1) показатели, определяемые по ЛАФЧХ разомкнутой системы (рис. 4.18): частота среза ω_{cp} , запас устойчивости по фазе $\Delta \phi$ и запас устойчивости по модулю ΔL ; наиболее информативны первые два показателя: частота среза ω_c служит оценкой быстродействия замкнутой системы, запас по фазе $\Delta \phi$ тесно связан со степенью колебательности переходной характеристики; показатели, определяемые по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы (рис. 4.19).

Показатель колебательности $M = \frac{A_{3 \max}}{A_3 0}$ связан также со степенью колебательности замкнутой системы. Считаются удовлетворительными значения показателя колебательности в пределах $1.1 \le M \le 1.5.$





Резонансная частота системы ω_p характеризует частоту колебаний, пропускаемую системой с наибольшим усилением.

Полоса пропускания $\omega_{\rm n}$ – частота, на которой $A_3(\omega)$ снижается на 3 дБ от начального значения $A_3(0)$.

Те же самые частотные показатели используются для оценки поведения в переходных режимах дискретно непрерывных систем. Как было



Рис. 4.19

показано ранее, логарифмические АЧХ и ФЧХ дискретных систем мало отличаются от ЛАФЧХ непрерывных систем, особенно в области низких частот. Поэтому по ЛАФЧХ дискретной системы легко определяются: частота среза λ_c , запасы устойчивости по фазе $\Delta \phi$ и по модулю ΔL .



Показатель колебательности определяется так же по АЧХ замкнутой дискретной системы (рис. 4.20) $M = \frac{\Phi_{\text{max}}}{\Phi(0)}$.

Для того, чтобы дискретно непрерывная система автоматического управления работала → удовлетворительно, в частности, для того, чтобы ⁽⁰⁾ перерегулирование переходной характеристики было в пределах σ =15 – 30%, показатель колеба-

тельности и запас устойчивости должны иметь те же значения, что и в непрерывных системах:

$$M = 1.2 - 1.5; \Delta \varphi = 30^{\circ} - 50^{\circ}; \Delta L = (8 - 12) \text{дБ}.$$

Корневые оценки качества переходных процессов замкнутой непрерывной



Рис. 4.21

системы включает в себя следующие показатели (рис. 4.21): 1) показатель быстродействия (степень устойчивости) η - определяется как расстояние от мнимой оси до ближайших вещественного или пары сопряженных комплексных корней; 2) колебательность $\mu = /tg\psi/_{max}$ определяется как максимальный угол наклона к вещественной оси луча, проведенного из начала координат к одному из пары сопряженных комплексных корней; увеличение μ прямо пропорционально

связано с перерегулированием σ и числом колебаний за время регулирования t_p ;

3) показатель затухания є является характеристикой степени затухания переходных процессов и определяется как расстояние от мнимой оси до самых дальних вещественного или пары сопряженных комплексных корней.

Для дискретных и дискретно непрерывных систем корневые оценки используются редко и поэтому они здесь не рассматриваются.

Четвертая группа показателей качества – интегральные оценки широко используются для анализа и синтеза как непрерывных, так и дискретных систем. Для последних они носят название "суммарных" и представляют собой дискретный аналог оценок непрерывных систем. Различают простую интегральную (суммарную) и улучшенную интегральную (суммарную) оценки.

Простая оценка (ИКО) определяется как

$$I_0 = \int_0^\infty e^2(t) dt$$
или $I_{\Sigma} = \sum_0^\infty e^2(n)$,

где e(t) или e(n) – ошибка переходного процесса. Улучшенные оценки определяются следующим образом:

$$I_{1} = \int_{0}^{\infty} e^{2}(t)dt + a_{1}\int_{0}^{\infty} e^{2}(t)dt; \quad I_{1\Sigma} = \sum_{0}^{\infty} e^{2}(n) + a_{1}\sum_{0}^{\infty} (\Delta e)^{2}(n).$$

Чаще используются улучшенные оценки, так как минимуму простой ИКО соответствует слабо затухающий переходный процесс.

4.2.2.2 Связь частотных показателей с основными прямыми показателями качества

Установить связь между частотными показателями (ω_{cp} , ΔL , $\Delta \phi$, М, ω_p) и прямыми показателями качества по переходной характеристике (h_{max} , t_{max} , σ , t_p) в общем случае невозможно, так как такая связь существует в конкретной форме для конкретной системы. Если речь идет о качественных показателях математической модели системы, то проблемы установления связи между различными показателями качества не существует. Имеющиеся в настоящее время компьютерные программы по моделированию как непрерывных, так и дискретных САУ, позволяют быстро и с достаточной точностью определить значения всех известных показателей качества. Совсем по-другому ставится задача оценки показателей качества в процессе анализа и настройки существующей реальной САУ автоматизируемого объекта, на котором недопустимы эксперименты по снятию переходных характеристик. В связи с широким использованием в задачах анализа САУ частотных характеристик, особенно, логарифмических, которые часто могут быть получены экспериментальным путем, целесообразно иметь в распоряжении спра-

вочный материал в виде номограмм для определения основных показателей качества по параметрам ЛАЧХ разомкнутой системы.

Установлена форма типовой лога- 0 рифмической характеристики (рис. 4.22). Она характеризуется следующими параметрами: ω_{cp} – частота среза ЛАЧХ разомкнутой системы; ω_1/ω_{cp} и ω_3/ω_{cp} – относи-



Рис. 4.22

тельные границы нижнечастотного и высокочастотного участков ЛАЧХ; μ_1 – усиление (в дБ) на частоте ω_1 ; -40, -60 дБ/дек – наклоны на участках ($\omega_1 - \omega_2$) и ($\omega_3 - \infty$).

Номограммы позволяют по заданным выше параметрам ЛАЧХ определить: М – показатель колебательности; ω_p – резонансная частота; h_{max} – максимальное значение переходной характеристики; t_{max} – время, соответствующее h_{max} , ω_t – круговая частота колебаний переходной характеристики, t_p –время регулирования. Вид номограмм для $\omega_3/\omega_{cp} = 1$ и наклонам от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (–40 дБ/дек) показан на рис. 4.23.



Рис. 4.23

4.3. Синтез систем автоматического управления

4.3.1. Задачи и классификация методов синтеза

Под синтезом САУ понимается выбор структуры и параметров системы управления, которые в соответствии с заданными техническими условиями обеспечивают наилучшие показатели по запасу устойчивости, по качеству переходных режимов и точности работы в установившихся режимах.

В результате синтеза САУ решается одна из двух задач: 1) выбор структуры и параметров системы, если задано описание только объекта управления; 2) выбор количества и типа усилительных и корректирующих устройств, если заданы описания не только объекта управления, но и исполнительного органа системы управления, датчиков обратных связей и устройств сравнения. Параллельно с решением задач, перечисленных выше, рассматриваются и решаются вопросы, связанные с обеспечением надежности систем, весовых и стоимостных характеристик, экономичности и других подобных ограничений. Однако, решение подобного рода задач выходит за рамки теории автоматического управления и рассматривается в других технических дисциплинах.

Следует отметить, что выполнение основных задач синтеза САУ: выбора структуры и параметров всей системы или ее части – представляет собой многовариантную и полностью неформализованную процедуру, что усложняет работу проектировщика, но в тоже время делает эту работу более творческой и привлекательной.

В настоящее время известно множество методов синтеза линейных непрерывных и дискретных систем управления, которые различаются по:

1) математическому аппарату описания объекта и систем управления;

2) критериям качества работы САУ в установившихся и переходных режимах;

3) инструментальным средствам решения задач синтеза САУ.

По используемому типу математической модели системы методы синтеза разделяются на:

1) методы, использующие описание в виде дифференциальных уравнений в обычной или матричной форме;

2) методы, использующие представление систем с помощью передаточных функций;

3) методы, базирующиеся на частотных характеристиках элементов и систем управления.

По второму признаку методы синтеза разделяются, главным образом, по критериям качества в переходных режимах, так как определение параметров усилительных и регулирующих устройств, обеспечивающих заданные показатели точности работы в установившихся режимах, практически не отличается в различных методах синтеза. Таким образом, существуют следующие методы синтеза, использующие различные критерии качества в переходных режимах:

 метод В.В. Солодовникова, в котором критерием качества являются показатели переходной характеристики замкнутой скорректированной системы;

– метод В.А. Бесекерского, использующий в качестве критерия показатель колебательности замкнутой скорректированной системы;

 метод подчиненного управления, в котором настройки регуляторов рассчитываются по формулам, обеспечивающим приближение к единице амплитудно-частотной характеристики по управлению замкнутой синтезированной системы; метод модального управления, обеспечивающий достижение заданного распределения корней характеристического уравнения замкнутой синтезируемой системы управления.

Следует заметить, что в рамках настоящей работы не упоминаются и не рассматриваются такие методы синтеза, как методы оптимального, экстремального и адаптивного управления, а также методы синтеза, например, по минимуму СКО (средне квадратичной ошибки), используемые для построения и расчета стохастических систем управления. Необходимые сведения по таким методам можно найти в специальных монографиях и пособиях по различным разделам теории автоматического управления.

Отметим также, что первые два из перечисленных выше методов (Солодовникова и Бесекерского) считаются частотными, так как используют для синтеза понятие желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы. Метод подчиненного управления оперирует с передаточными функциями, хотя часто для разъяснения и для большего понимания существа настройки оказывается необходимым привлечение аппарата частотных характеристик. Наконец, метод модального управления строится на использовании векторно-матричного описания синтезируемой системы.

4.3.2. Синтез желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы

В частотных методах синтеза по заданным показателям качества в переходных режимах (по переходной характеристике или по показателю колебательности) основным этапом синтеза является построение желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы.

Желаемой мы будем называть такую ЛАЧХ, достижение которой в системе обеспечит заданные в технических требованиях показатели по точности отработки оговоренных управляющих воздействий в установившихся и переходных режимах, а также степень подавления наиболее характерных для систем возмущающих воздействий.

Отметим, что использование для синтеза САУ только ЛАЧХ без ФЧХ предполагает, что синтезируемая система является так называемой минимальнофазовой, т. е. 1) в системе отсутствуют звенья, передаточные функции которых имеют нули и полюса в правой полуплоскости; 2) для системы существует однозначная связь межу ЛАЧХ и ФЧХ.

У ЛАЧХ разомкнутой системы, в том числе и у желаемой ЛАЧХ, принято различать три основные частотные области (рис. 4.24): область низких частот

(НЧ) $0 \le \omega \le \omega_1$, область средних частот (СЧ) $\omega_2 \le \omega \le \omega_3$ и область высоких частот (ВЧ) $\omega_3 \le \omega \le \infty$.



Рис. 4.24

Как показали исследования, вид ЛАЧХ в области низких частот полностью определяет точность работы системы управления в установившихся режимах. Установившимися считаются режимы как при постоянном значении управляющего сигнала, так и при изменении его с постоянной скоростью или ускорением.

Участок средних частот является определяющим для формы переходного процесса в системе, вызванного изменением параметра управляющего сигнала или приложением возмущающего воздействия. Для того чтобы обеспечить приемлемую по перерегулированию и по степени затухания переходную характеристику системы, участок средних частот должен иметь наклон –20 дБ/дек. Противоположность среднечастотного участка ЛАЧХ определяет степень затухания переходного процесса. Чем шире этот участок, тем более демпфирована система, меньше перерегулирование и время затухания переходного процесса.

Наконец, участок высоких частот определяет степень подавления высокочастотных возмущений, действующих в системе, и с этой точки зрения значение ЛАЧХ в этой области должно быть как можно меньше.

Переходные участки между областями, как правило, имеют наклон –40 дБ/дек, но иногда приходится допускать наклон –60 дБ/дек.

4.3.2.1. Синтез желаемой ЛАЧХ в области низких частот

Как было отмечено выше, вид ЛАЧХ в области низких частот определяет точность замкнутой системы в установившихся режимах. Это значит, что для определения параметров нижнечастотного участка желаемой ЛАЧХ: наклона характеристики и коэффициента передачи разомкнутой системы на контрольной частоте, - могут быть использованы результаты анализа установившихся ошибок при отработке различных типовых воздействий. Учитывая, что проведенный анализ дал совпадающие результаты по точности в установившихся режимах для непрерывных и дискретно непрерывных систем (см. табл. 4.2), и что ошибки установившихся режимов дискретно непрерывных систем не зависят от периода квантования, а определяются только параметрами непрерывных частей систем и типом входного управляющего сигнала, методика синтеза –желаемой ЛАЧХ в области низких частот может быть рассмотрена применительно к непрерывным системам и может быть перенесена практически без изменений на дискретно непрерывные системы.

Будем рассматривать порядок определения параметров нижнечастотного участка желаемой ЛАЧХ для систем различного порядка астатизма и различных управляющих и возмущающих воздействий.

Статическая система (с астатизмом равным нулю)

Статические системы в соответствии с результатами табл. 4.2 могут работать только со ступенчатыми управляющими сигналами и выдерживать только ступенчатые возмущения, поэтому параметры нижечастотной части желаемой ЛАЧХ должны определяться по ошибкам таких систем при отработке управляющих воздействий ступенчатой формы и ступенчатых возмущающих воздействий.

Пусть задана ошибка при ступенчатом управлении $g(t) = g_0 1(t)$ равная $e_{\text{ДОП}}$ или в относительной форме $\Delta e_{\text{ДОП}} = e_{\text{ДОП}}/g_0$. Тогда, приравнивая допустимую ошибку ошибке установившегося режима

$$e_{\text{ДОП}} = g_0 \Delta e_{\text{ДОП}} = \frac{g_0}{1+k},$$

имеем $e_{\text{ДОП}} = 1/(1+k)$, откуда необходимый коэффициент разомкнутой системы

L

$$k_{\rm H} \ge \frac{1}{\Delta e_{\rm ДО\Pi}} - 1. \tag{4.1}$$

0 $20 \, \text{lg}_{k_{\text{H}}}$ Нижнечастотный участок желаемой ЛАЧХ должен представлять прямую, параллельную оси частот (рис. 4.25) и удаленную от оси частот на 20 $\text{lg}_{k_{\text{H}}}$.

Следует заметить, что, если статическая система работает в режиме стабилизации с диапазоном $D = g_{0\text{max}}/g_{0\text{min}}$ стабилизируемых значений, то необходимо использовать для расчета k_{H} относительную ошибку $\Delta e_{\text{ДОП}} = e_{\text{ДОП}}/g_{0\text{min}}$.

Теперь пусть задана относительная ошибка при отработке ступенчатого возмущающего воздействия $f(t) = f_0 1(t) \Delta e_{f ДОП} = e_{f ДОП} / y(\infty)$.

Приравняем е_{fДОП} ошибке системы от возмущения

$$e_{f \not \square O \Pi} = \Delta e_{f \not \square O \Pi} y(\infty) = e_f(\infty) = \frac{k_f f_0}{1+k}.$$

Кроме того примем $y(\infty) = g_0 \frac{k}{1+k}$, что учитывает ошибку от управляющего сигнала. Тогда

$$\Delta e_{f \not \square O \Pi} g_0 \frac{k}{1+k} = \frac{k_f f_0}{1+k},$$

откуда

$$k_{\rm H} \ge k_f f_0 / \Delta e_{f\rm HO\Pi} g_0 \tag{4.2}$$

В этом случае 20 $lgk_{\rm H}$ будет учитывать ошибки от управляющего и возмущающего воздействий, и, значит, нижнечастотный участок желаемой ЛАЧХ в виде прямой, удаленной от оси частот на 20 $lgk_{\rm H}$, будет построен с учетом необходимой точности при отработке и управляющего и возмущающего воздействий ступенчатой формы.

Как и ранее, при расчете $k_{\rm H}$ по (4.2) следует использовать $g_0 = g_{0\rm min}$, если синтезируемая система будет работать в определенном диапазоне стабилизирующих значений $D = g_{0\rm max}/g_{0\rm min}$.

Астатическая система первого порядка

Это наиболее распространенный тип систем управления, так как астатические системы первого порядка могут работать как следящие системы, системы программного управления, системы стабилизации.

Поэтому целесообразно рассмотреть методику син-*g, у* теза нижечастотного участка желаемой ЛАЧХ для различных типов управляющих воздействий.

1. <u>Управляющее воздействие линейной фор-</u> <u>мы g(t) = Vt</u>. Ошибка установившегося режима (рис. 4.26) $e(\infty)$ не должна превышать допустимую $e_{\text{ДОП}} \ge e(\infty)$.



Известно, что $e(\infty) = V/k$, где V – скорость изменения управляющего воздействия; k – общий коэффициент передачи разомкнутой системы, называемый добротностью по скорости. Тогда необходимое значение k для того, чтобы ошибка $e_{\text{ДОП}} \le e(\infty)$

$$k_{\rm H} \ge {\rm V}/e_{\rm ДО\Pi} \tag{4.3}$$

L Нижнечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ будет представлять собой прямую линию с наклоном (-20 дБ/дек) и проходящую через точку с координатами $\omega = 1 \text{ c}^{-1}, L = 20 \text{ lg}k_{\text{H}}$) - рис. 4.27. Рис. 4.27 $g(t) = G_{\text{max}} \sin \omega_g t$.

Ошибка установившегося режима $e(\infty)$ не должна превышать допустимого значения $e(\infty) \le e_{\text{ДОП}}$.

При синусоидальном управляющем сигнале ошибка также будет изменяться по синусоидальному закону

$$e_g(t) = E_{\max} \sin(\omega_g t + \psi),$$

где максимальное значение ошибки

$$E_{\max} = G_{\max} \left| \frac{1}{1 + W(j\omega_g)} \right|.$$

Полагая, что значение комплексной передаточной функции на частоте воздействия $W(j\omega_g) >> 1$, получим

$$E_{\max} \cong \frac{G_{\max}}{W(j\omega_g)} \tag{4.4}$$

Приравнивая *E*_{max} и *е*_{ДОП}, имеем

$$e_{\text{ДОП}} = \frac{G_{\text{max}}}{W(j\omega_g)},$$

с откуда $|W(j\omega_g)| \ge G_{\max} / e_{\text{ДОП}}$. Тогда нижнечастотная асимптоо дБ/дек та ЛАЧХ это прямая линия с наклоном (-20 дБ/дек), проходяищая через точку с координатами ($\omega = \omega_g$, $L = 20 \lg(G_{\max}/e_{\text{ДОП}}) -$ рис. 4.28. 3. <u>Управляющее воздействие g(t) произвольной формы</u>. Рис. 4.28 Об управляющем воздействии известно, что максимальная скорость его изменения $(\frac{dg(t)}{dt})_{\max} = V_{\max}$ и максимальное ускорение $(\frac{d^2g(t)}{dt^2})_{\max} = a_{\max}$.

Так как форма управляющего сигнала не задана для решения задачи синтеза нижнечастотной асимптоты желаемой ЛАЧХ вводится в рассмотрение эквива-

лентное синусоидальное воздействие, максимальные скорость и ускорение которого равны V_{max} и a_{max} соответственно: $g_{\mathfrak{I}}(t) = G_{\mathfrak{I}} \sin \omega_{\mathfrak{I}} t$.

Для определения $G_{\mathfrak{H}}$ и $\omega_{\mathfrak{H}}$ находим $(\frac{dg_{\mathfrak{H}}(t)}{dt})_{\max}$ и $(\frac{d^2g_{\mathfrak{H}}(t)}{dt^2})_{\max}$ и приравни-

ваем их V_{\max} и a_{\max} .

$$\frac{dg_{\mathfrak{Z}}(t)}{dt} = G_{\mathfrak{Z}}\omega_{\mathfrak{Z}}\cos\omega_{\mathfrak{Z}}t; \quad (\frac{dg_{\mathfrak{Z}}(t)}{dt})_{\max} = G_{\mathfrak{Z}}\omega_{\mathfrak{Z}} = V_{\max}$$
(4.5)

$$\frac{d^2 g_{\mathfrak{Z}}(t)}{dt^2} = -G_{\mathfrak{Z}} \omega_{\mathfrak{Z}}^2 \sin \omega_{\mathfrak{Z}} t; \quad (\frac{d^2 g_{\mathfrak{Z}}(t)}{dt^2})_{\max} = G_{\mathfrak{Z}} \omega_{\mathfrak{Z}}^2 = a_{\max}$$
(4.6)

Делим (4.6) на (4.5) и получаем

$$\omega_3 = a_{\max} / V_{\max} \tag{4.7}$$

Подставляем (4.7) в (4.5), получаем

$$G_{9} = V_{\max}^{2} / a_{\max}$$

$$(4.8)$$

Определив параметры эквивалентного воздействия, находим максимальную ошибку, вызываемую этим воздействием, используя выражение (4.4)

$$E_{\max} \cong \frac{G_{\mathfrak{Z}}}{|W(j\omega_{\mathfrak{Z}})|}.$$

Приравниваем максимальную и допустимую ошибки $e_{\text{ДОП}} = E_{\text{max}}$, откуда

$$\left|W(j\omega_{\mathfrak{H}})\right| = \frac{G_{\mathfrak{H}}}{e_{\mathcal{I}}O\Pi} = \frac{V_{\max}^2}{a_{\max}e_{\mathcal{I}}O\Pi}.$$
(4.9)

Значит нижнечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ (рис. 4.29) должна пройти через контрольную точку с координатами ($\omega = \omega_{2} = a_{max}/V_{max}$; L = $20 \lg(V_{\max}^2 / a_{\max} e_{\text{ДОП}})).$ ⊌=a_{max}/V_{max} Если в контрольной точке асимптота претерпевает о (-20)дБ/дек) излом с наклона на наклон Рис. 4.29 (-40 дБ/дек), то ордината контрольной точки рассчитывается по формуле

$$L(\omega_{\mathfrak{H}}) = 20 \lg \frac{\sqrt{2} V_{\max}^2}{a_{\max} e_{\mathcal{I}O\Pi}}$$
(4.10)

 $(\sqrt{2}$ - учитывает отличие действительной ЛАЧХ от асимптотической).

4.3.2.2. Синтез желаемой ЛАЧХ в области средних частот

Как отмечалось выше, желаемая ЛАЧХ в области средних частот должна иметь наклон (-20 дБ/дек). Поэтому задачей синтеза желаемой ЛАЧХ в области средних частот является определение местоположения участка с наклоном (-20 дБ/дек), задаваемое, например, с помощью частоты среза ω_{cp} и его протяженность.

Известны три метода определения ω_{cp} и протяженности участка с наклоном (-20 дБ/дек): метод В.В. Солодовникова, метод В.А. Бесекерского и метод А.А. Вавилова.

В методе В.В. Солодовникова частота среза ω_{cp} определяется по номограмме Солодовникова (рис. 4.30), для которой входными данными являются: t_p – время регулирования (до входа в зону ±5% h_{ycr}) и σ_{max} , % - максимальное перерегулирование переходной характеристики. Из номограммы определяется частота





среза ω_{cp} и значение P_{max} типовой вещественной характеристики замкнутой системы (рис. 4.31).

Пример определения, показанный штриховыми стрелками, дает: для заданных $\sigma_{\text{max}} = 34\%$ и времени регулирования $t_p = 0.5$ с значение $\omega_{cp} = 4.33\pi/0.5 = 27.26 \text{ c}^{-1}$ и значение $P_{\text{max}} = 1.33$. Протяженность участка с наклоном (-20 дБ/дек) определяется значением L_{γ} (рис. 4.31). Значение L_{γ} определяется из графика $L_{\gamma} = f(P_{\text{max}}) - ($ рис. 4.33) по найденному выше значению P_{max} .

Так для найденного из примера $P_{\text{max}} = 1.33$ по графику (4.33) находим $L_{\gamma} = 12.5$ дБ.



В методе Бесекерского по принятой величине показателя колебательности М рассчитываются значения частот, ограничивающих среднечастотный участок желаемой ЛАЧХ и задающих его местоположение (рис. 4.34).



Рис. 4.34

Слева от частоты среза участок ЛАЧХ с наклоном (-20 дБ/дек) ограничивается точкой пересечения с низкочастотной асимптотой, имеющей наклон (-40 дБ/дек) на частоте $\omega_1 = 1/T_1$, где $T_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M}{M-1}}$

Справа от частоты среза, среднечастотный участок ограничивается частотой $\omega_2 = 1/T_2$, где

$$T_1 = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{M(M-1)}{M+1}}$$

После частоты ω_2 наклон желаемой ЛАЧХ может быть любым, но не положительным. Ограничением наклона в области высоких частот служит нулевой, при котором ЛАЧХ будет проходить параллельно оси частот на расстоянии $L_{\rm B} = 20 \, \log(M/(M+1))$.

Наконец, метод А.А. Вавилова предлагает использовать для построения среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ специальные номограммы синтеза по критерию максимального быстродействия при заданном значении максимальной динамической ошибки (рис. 4.35). Метод используется для синтеза сложных сис-

тем с высоким порядком астатизма и оптимизирует переходные процессы по ошибке при степенных воздействиях.



Желаемая ЛАЧХ дискретно-непрерывных систем в области низких частот $0 \le \lambda \le \lambda_{cp}$ совпадают с желаемыми ЛАЧХ (наклон ЛАЧХ и коэффициент передачи на контрольной частоте) определяется исходя из требований к точности в установившемся режиме.

В области средних частот желаемые ЛАЧХ дискретно-непрерывных систем имеют наклон (–20 дБ/дек). Параметры ЛАЧХ в этой области определяют запас устойчивости, системы, вид и время затухания переходного процесса. Частота среза λ_{cp} и протяженность участка с наклоном (–20 дБ/дек) определяются или по заданным σ_{max} и t_p или по заданному показателю колебательности М. Заданный показатель будет достигаться, если выполняются условия:

1.
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{T_j} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{T_i} \le \lambda_{cp} \frac{M-1}{M}$$
; для $\lambda \le \lambda_{cp}$; (4.11)

2.
$$\frac{T}{2} + T_{\Sigma} \leq \frac{1}{\omega_{cp}} \frac{M}{M+1}$$
, для $\lambda > \lambda_{cp}$, (4.12)

4.4. Синтез корректирующих устройств

4.4.1. Схемы включения и классификация корректирующих устройств

Корректирующим устройством, в общем случае, называется дополнительная часть системы, вводимая для улучшения ее динамических свойств.

Существует три способа включения корректирующих устройств в основную систему:

- последовательно в прямой канал передачи (рис. 4.36, a);
- в виде положительной или обратной связи, охватывающей часть элементов прямого канала (рис. 4.36, б);

- в виде параллельной прямой связи, включаемой параллельно участку прямого канала (рис. 4.36, в).



Рис. 4.36

В соответствии со способом включения корректирующего устройства называются последовательными, параллельными обратными и параллельными прямыми.

В соответствии с физической природой сигналов в системе управления корректирующие устройства могут быть механическими, гидравлическими, пневматическими, электрическими, электронными и, как разновидность электронных, программными, реализованными на интегральных схемах или микроконтроллерах.

Наконец, корректирующие устройства могут быть пассивными и активными в зависимости от того, использует ли корректирующее устройство энергию внешнего источника или не использует. Примерами пассивных корректирующих устройств являются электрические четырехполюсники, компонентами которых служат резисторы и конденсаторы. Примером активных корректирующих устройств являются операционные усилители и программно реализуемые корректирующие алгоритмы.

4.4.2. Определение передаточной функции последовательного корректирующего звена

Если известны передаточные функции скорректированной разомкнутой системы ($W_{ck}(s)$) и некорректированной системы ($W_{Hk}(s)$), то передаточная функция корректирующего устройства определяется просто как

$$W_{\rm Ky}(s) = \frac{W_{\rm CK}(s)}{W_{\rm HK}(s)}.$$

Если желаемая передаточная функция неизвестна, и синтез корректирующего устройства выполняется совместно с синтезом желаемой ЛАЧХ, то определить ЛАЧХ корректирующего устройства можно графически (рис. 4.37)

$$L_{\rm ky}(\omega) = L_{\rm k}(\omega) - L_{\rm hk}(\omega),$$

соблюдая условие получения наиболее простой реализуемой характеристики и передаточной функции корректирующего устройства.



Рис. 4.37

Согласно определенной ЛАЧХ корректирующего устройства *L*_{ку} на рис. 4.37 передаточная функция

$$W_{\rm Ky}(s) = \frac{k}{s} \frac{(1/\omega_1 + 1)(1/\omega_2 + 1)}{(1/\omega_3 + 1)},$$

где *k* определяется по $L_{\kappa v}(\omega)$ на частоте $\omega = 1c^{-1}$.

4.4.3. Определение передаточной функции корректирующего устройства в виде отрицательной местной обратной связи

Часто корректирующие устройства, включаемые в цепь обратной связи части некорректируемой системы, называют параллельными, подчеркивая их отличие от последовательных корректирующих устройств.

Параллельными корректирующими звеньями охватывают, как правило, звенья исходной системы, имеющие большие коэффициенты усиления и частично нелинейные характеристики. Включение параллельного корректирующего устройства сглаживает нелинейность характеристик и повышает степень стабильности контура. Обозначим через $W_{\text{охв}}(s)$ передаточную функцию звеньев, охваченных местной обратной связью и через $W_{\text{но}}(s)$ переда-



го контура

$$W(s) = \frac{W_{\rm H0}W_{\rm OXB}(s)}{1 + W_{\rm OXB}(s)W_{\rm KY}(s)}$$
(4.13)

Принимая равенство $W_{m}(s) = W(s)$, получим

$$W_{\rm Ky}(s) = \frac{1}{W_{\rm OXB}(s)} \left[\frac{W_{\rm HO}(s)W_{\rm OXB}(s)}{W_{\rm K}(s)} - 1 \right]$$
(4.14)

Если принять во внимание соображение, высказанное выше, о свойствах звеньев, охваченных местной обратной связью, т. е. / $W_{\text{охв}}(j\omega)W_{\text{ку}}(j\omega)$ / >> 1, что практически выполняется, то передаточная функция корректирующего устройства может быть принята равной

$$W_{\rm Ky}(s) \cong \frac{W_{\rm HO}(s)}{W_{\rm K}(s)}.$$
(4.15)

Если формирование $W_{\pi}(s)$ выполняется графически с помощью желаемой ЛАЧХ, то определение передаточной функции корректирующего устройства проще выполнить также графически через ЛАЧХ (рис. 4.37).

$$L_{\rm ky}(\omega) = L_{\rm HO}(\omega) - L_{\rm w}(\omega),$$

В соответствии с характеристикой $L_{\rm ky}(\omega)$, полученной на рис. 4.39 графически, передаточная функция

$$W_{\rm Ky}(s) = \frac{(\frac{1}{\omega_2} + 1)(\frac{1}{\omega_3} + 1)}{(\frac{1}{\omega_1} + 1)(\frac{1}{\omega_4} + 1)}.$$



Рис. 4.39

4.5. Синтез последовательных корректирующих устройств (регуляторов) в системах подчиненного регулирования

Системой подчиненного управления (СПУ) называется система автоматического управления, состоящая из нескольких вложенных друг в друга замкнутых контуров, настроенных так, что внутренний контур подчиняется внешнему контуру, который вырабатывает сигнал управления для внутреннего контура и управляет им. Классическая структура СПУ показана на рис. 4.40. Она включает в себя три контура, каждый из которых содержит свой собственный регулятор и датчик регулируемой величины.



Рис. 4.40

Таким образом, основными принципами построения СПУ являются:

 – декомпозиция объекта управления на несколько (на рис. 4.40) на три управляемых частей с контролем и управлением выходной величины каждой части;

 последовательная коррекция свойств каждого контура с помощью включаемых в начало прямого канала каждого контура регуляторов; основным назначением регулятора является компенсация основных инерционностей контура;

– подчиненность внутренних контуров внешним.

Структура и параметры последовательных корректирующих устройств (регуляторов) выбираются исходя из определенных критериев. Сам процесс выбора структуры и параметров регулятора в контуре системы подчиненного управления получил название способа настройки контура. В настоящее время для настройки контуров СПУ используются, главным образом, два основных способа настройки:

- настройка на "оптимум по модулю" (OM);
- настройка на "симметричный оптимум" (CO).

4.5.1. Настройка на "оптимум по модулю"

Настройка контура на ОМ обеспечивает характеристики, замкнутого контура, подобные характеристикам устойчивого колебательного звена второго поряд-

ка с коэффициентом демпфирования $\varepsilon = 0.707$ и быстродействием, определяемым суммарной малой постоянной времени контура.

Передаточная функция замкнутого контура, настроенного на ОМ

$$\Phi(s) = \frac{1}{k_{\pi}} \frac{1}{2T_{\mu}s(T_{\mu}s+1)+1},$$

где $k_{\rm d}$ – коэффициент передачи датчика обратной связи контура; T_{μ} - суммарная малая постоянная контура, равная сумме малых постоянных времени части объекта управления, входящей в контур и датчика обратной связи.

Передаточная функция разомкнутого контура, настроенного на ОМ

$$W(s) = \frac{1}{2T_{\mu}s(T_{\mu}s+1)}$$

соответствует системе с астатизмом первого порядка. ЛАФЧХ разомкнутого и замкнутого контуров представлены на рис. 4.41.



Переходная характеристика контура, настроенного на ОМ, будет иметь вид, показанный на рис. 4.42.



Рис. 4.42

Она характеризуется перерегулированием $\sigma = 4.3\%$ и временем первого согласования $t_1 = 4.7T_{\mu}$.

Рассмотрим, каким должны быть тип и параметры регуляторов при настройке на ОМ контуров с различными передаточными функциями объектов управления. Объектом управления в контуре считаются все элементы контура, включая датчик обратной связи, кроме регулятора.

1. Позиционный объект с одной главной инерционностью

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_0 s + 1)(T_{\mu} s + 1)},$$

где k_0 – коэффициент передачи объекта (равный произведению коэффициентов всех элементов, входящих в объект); T_0 – основная постоянная времени объекта, характеризующая главную инерционность объекта.

Желаемая передаточная функция разомкнутого контура при настойке на ОМ

$$W_{\rm OM}(s) = \frac{1}{2T_{\mu}s(T_{\mu}s+1)}$$

Учитывая, что регулятор включен последовательно с объектом, имеем

$$W_{\rm p}(s) = \frac{W_{\rm OM}(s)}{W_0(s)} = \frac{1}{2T_{\mu}s(T_{\mu}s+1)} \frac{(T_0s+1)(T_{\mu}s+1)}{k_0} =$$
$$= \frac{T_0}{2T_{\mu}k_0} \frac{T_0s+1}{T_0s} = k_{\rm p} \frac{T_{\rm p}s+1}{T_{\rm p}s} = k_{\rm p} (1+\frac{1}{T_{\rm p}s}).$$

Получили передаточную функцию регулятора, реализующего пропорциональноинтегральный (ПИ) закон регулирования, у которого коэффициент $k_p = \frac{T_0}{2T_\mu k_0}$, а постоянная времени $T_p = T_0$.

2. Объект интегрального типа

$$W_0(s) = \frac{k_0}{T_0 s(T_\mu s + 1)}$$

Передаточная функция регулятора

$$W_{\rm p}(s) = \frac{W_{\rm OM}(s)}{W_0(s)} = \frac{1}{2T_{\mu}s(T_{\mu}s+1)} \frac{T_0s(T_{\mu}s+1)}{k_0} = \frac{T_0}{2T_{\mu}k_0} = k_{\rm p}.$$

Видим, что необходим пропорциональный (П) регулятор с коэффициентом $k_p = \frac{T_0}{2T_\mu k_0}$. Заметим, что выражение коэффициента k_p совпадают с таковым предыдущего пункта.

3. Позиционный объект с двумя преобладающими постоянными времени.

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_{01}s + 1)(T_{02}s + 1)(T_{\mu}s + 1)}$$

Действуя аналогично п. п. 1 и 2, находим передаточную функцию регулятора

$$W_{\rm p}(s) = \frac{W_{\rm OM}(s)}{W_0(s)} = \frac{1}{2T_{\mu}s(T_{\mu}s+1)} \frac{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)(T_{\mu}s+1)}{k_0} = \frac{T_{01}}{2T_{\mu}k_0} \frac{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}{T_{01}s} = k_{\rm p} \frac{(T_{\rm p1}s+1)(T_{\rm p2}s+1)}{T_{\rm p1}s}.$$

Необходим регулятор с передаточной функцией

$$W_{\rm p}(s) = k_{\rm p} \frac{(T_{\rm p1}s+1)(T_{\rm p2}s+1)}{T_{\rm p1}s},$$

где $k_{\rm p} = \frac{T_{01}}{2T_{\mu}k_0}$; $T_{\rm p1} = T_{01}$, $T_{\rm p2} = T_{02}$.

Такой регулятор называется пропорциоанльно-интегрально-дифференциальным (ПИД), который имеет три параметра настройки (k_p , T_{p1} , T_{p2}).

4.5.2. Настройка на "симметричный оптимум"



Рис. 4.43

Настройка на СО обеспечивает более <u>40,05</u> быстрые процессы в контуре по сравнению с контуром, настроенным на ОМ. Переходная характеристика контура, настроенного на СО (рис. 4.43) характеризуется временем первого согласования $t_1 = 3.1T_{\mu}$ и перерегулированием $\sigma = 43\%$.

Такая переходная характеристика будет иметь

место, если ЛАЧХ разомкнутого контура будет иметь вид, показанный на рис. 4.44.



Рис. 4.44

Эта ЛАЧХ совершенно симметрична относительно оси частот и частоты среза ω_c , поэтому способ настройки, обеспечивающий такую ЛАЧХ, получил название "симметричный оптимум".

Передаточная функция разомкнутого контура, соответствующая ЛАЧХ (рис. 4.44), имеет вид:

$$W_{\rm CO}(s) = \frac{4T_{\mu}s + 1}{8T_{\mu}^2 s^2 (T_{\mu}s + 1)}$$

В замкнутом состоянии контур, настроенный на СО, имеет передаточную функцию

$$\Phi_{\rm CO}(s) = \frac{4T_{\mu}s + 1}{8T_{\mu}^3s^3 + 8T_{\mu}^2s^2 + 4T_{\mu}s + 1}.$$

Определим тип и параметры регуляторов при настройке на СО контуров с различными объектами.

1. Объект интегрального типа

$$W_0(s) = \frac{k_0}{T_0 s(T_{\mu} s + 1)}.$$

Желаемая передаточная функция

$$W_{\rm sc}(s) = W_{\rm CO}(s) = \frac{4T_{\mu}s + 1}{8T_{\mu}^2 s^2 (T_{\mu}s + 1)}$$

Передаточная функция регулятора

$$W_{\rm p}(s) = \frac{W_{\rm m}(s)}{W_0(s)} = \frac{W_{\rm CO}(s)}{W_0(s)} = \frac{4T_{\mu}s + 1}{8T_{\mu}^2 s^2 (T_{\mu}s + 1)} \frac{T_0 s(T_{\mu}s + 1)}{k_0} =$$
$$= \frac{T_0}{2T_{\mu}k_0} \frac{4T_{\mu}s + 1}{4T_{\mu}s} = k_{\rm p} \frac{T_{\rm p}s + 1}{T_{\rm p}s}.$$

Для того чтобы контур был настроен на CO, необходим ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$W_{\rm p}(s) = k_{\rm p} \frac{T_{\rm p}s + 1}{T_{\rm p}s}$$

где $k_{\rm p} = \frac{T_0}{2T_{\mu}k_0}; T_{\rm p} = 4T_{\mu}.$

Видим, что коэффициент регулятора рассчитывается по такой же формуле, как и при настройке на ОМ, но постоянная времени другая, меньше чем T_0 $(T_0 > 4T_{\mu})$.

2. Объект позиционный с одной преобладающей постоянной времени

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_0 s + 1)(T_\mu s + 1)}, \quad (T_0 >> 4T_\mu).$$

Для определения типа и параметров регулятора построим ЛАЧХ контура и регулятора (рис. 4.45).



Итак, необходим ПИ-регулятор с передаточной функцией $W_{\rm p}(s) = k_{\rm p} \frac{T_{\rm p}s + 1}{T_{\rm p}s}$, где $k_{\rm p} = \frac{T_0}{2T_{\mu}k_0}$, $T_{\rm p} = 4T_{\mu}$. Но желаемая характеристика $L_{\rm x}(\omega)$ на

частоте $\omega = 1/T_0$ претерпевает излом и теряет свойства характеристики системы с астатизмом второго порядка. Переходный процесс при $T_0 >> 4T_{\mu}$, близок к стандартному для настройки на ОМ.

4.5.3. Модальное управление при полностью измеряемом векторе состояния объекта управления

Модальным называется управление, имеющее целью придать корням характеристического уравнения замкнутой системы (собственным числам или "модам" матрицы системы) желаемые значения и их расположение на *s*-плоскости.

При наличии полной информации о векторе состояния объкта управления система модального управления содержит *n* обратных связей по каждому из *n* переменных состояния. Причем, каждая обратная связь является пропорциональной с некоторым значением k_i , i = 1, 2, ..., n выбираются так, чтобы характеристический полином замкнутой системы соответствовал выбранной стандартной форме H(s), задающей желаемые значения корней характеристического уравнения и их расположение на *s*-плоскости. Структурная схема системы модального управления ния показана на рис. 4.46.

Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t),$$
 (4.16)



Рис. 4.46

где *х* – *n*-мерный вектор состояния; *U* – управляющее воздействие объекта управления; *A* и *B* – матрицы объекта и входа соответственно.

Уравнение замкнутой системы получим, полагая

$$U(t) = g(t) - kx(t), (4.17)$$

где *k* – вектор-строка коэффициентов обратных связей. Подставляя (4.26) в (4.25), получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bkx(t) + Bg(t) = (A - Bk)x(t) + Bg(t),$$
(4.18)

Преобразуем по Лапласу матричное уравнение (4.27):

$$sX(s) = AX(s) - BkX(s) + BG(s),$$

откуда вектор состояния

$$x(s) = (sI - A + Bk)^{-1}BG(s).$$

Выходная величина системы x_n определяется из уравнения выхода Y(s) = Cx(s), где C – матрица строка выхода.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = c(sI - A + Bk)B = \frac{CAd(sI - A + Bk)^T B}{\det(sI - A + Bk)}.$$

Знаменатель передаточной функции является характеристическим полиномом. Приравнивая его стандартной форме, получаем уравнение

> $\det(sI - A + Bk) = H(s).$ (4.19)

Если раскрыть обе части (4.19) по степеням *s*, затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях *s*, получится система уравнений, решая которую можно найти элементы матрицы k.

Пример. Пусть объект задан структурной схемой (рис. 4.47).



Рис. 4.47

Уравнение состояния объекта управления:

$$\dot{x}_1 = bU - x_1; \ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_3; \ \dot{x}_3 = x_2,$$

откуда матрицы объекта и входа

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Система уравнения объектом содержит обратные связи по всем трем переменным состояния: x_1, x_2, x_3 . Таким образом $k = [k_1, k_2, k_3]$ должна быть найдена.

Вычисляем det(sI - A + Bk).

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ +1 & s & 2 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}; \quad Bk = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$sI - A + Bk = \begin{bmatrix} s + 1 + k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & s & 2 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}.$$
$$det(sI - A + Bk) = (s + 1 + k_1)(s^2 + 2) - k_2s - k_3 =$$
$$= s^3 + (1 + k_1)s^2 + (2 - k_2)s + 2(1 + k_1) - k_3.$$
(4.20)

Примем в качестве стандартной формы биноминальную форму

$$H(s) = s^{3} + 3\omega_{0}s^{2} + 3\omega_{0}^{2}s + \omega_{0}^{3}.$$
 (4.21)

Применяем коэффициенты (4.20) и (4.21) при одинаковых степенях *s*:

$$1 + k_1 = 3\omega_0$$
, откуда $k_1 = 3\omega_0 - 1$;
 $2 - k_2 = 3\omega_0^2$, откуда $k_2 = 2 - 3\omega_0^2$;
 $2 + 2k_1 - k_3 = \omega_0^3$, откуда $k_3 = 2 + 2(3\omega_0 - 1) - \omega_0^3 = 6\omega_0 - \omega_0^3$.

Пусть $\omega_0 = 10 \text{ c}^{-1}$, тогда согласно рис.4.24 время регулирования не превысит 1 с. Коэффициенты матрицы *k*:

$$k_1 = 3\omega_0 - 1 = 29; k_2 = 2 - 3\omega_0^2 = -298; k_3 = 6\omega_0 - \omega_0^3 = -940$$

4.5.4. Модальное управление при неполной информации о векторе состояния объекта управления

При невозможности измерить и использовать для управления все переменные состояния, возможность свободного расположения корней замкнутой системы на комплексной плоскости отсутствует. Существует два подхода к решению возникающей проблемы.

1. Организуется управление или по неполному вектору состояния или по выходной величине. В этих случаях попытки достичь желаемого расположения корней замкнутой системы приводят к уравнениям связи между коэффициентами или неравенством, ограничивающим значения коэффициентов. Несмотря на невозможность свободного выбора расположения корней и их значений в ряде случаев удается получить достаточно удовлетворительное качество управления.

2. В систему вводится так называемый наблюдатель состояния, представляющий собой модель объекта управления, который по измеренным переменным выхода объекта восстанавливает с определенной точностью вектор состояния объекта управления. По оценкам вектора состояния далее организуется управление с помощью *k*-матрицы обратных связей, такие как это делалось в системе управления при полностью измеряемом векторе состояния объекта управления. Более подробно о синтезе систем с наблюдателями состояния в непрерывных.

Вопросы для самопроверки

- 1. Дайте определение устойчивости системы с физической и математической точек зрения.
- 2. Какой характер имеет переходный процесс в устойчивой и неустойчивой системах?
- 3. Сформулируйте необходимое условие устойчивости.
- 4. Что такое критерии устойчивости?
- 5. Что такое граница устойчивости? Каким образом при этом расположены корни характеристического уравнения системы на плоскости комплексного переменного?
- 6. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.
- 7. Каким образом по критерию Гурвица определяются границы устойчивости?
- 8. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.
- 9. Что такое запасы устойчивости? Каким образом они определяются по АФЧХ разомкнутой системы?
- 10.Как определяются запасы устойчивости по ЛЧХ?
- 11. Дайте понятие качества работы системы управления. Чем оно определяется?
- 12. Что представляют собой критерии качества?
- 13.Как производится оценка точности работы систем?
- 14. Чему равны первые два коэффициента ошибок в системах с астатизмом первого и второго порядков?
- 15.Определите показатели качества переходного процесса и частотные показатели, поясните их физический смысл.
- 16.Поясните связь частотных показателей качества работы системы с частотными характеристиками разомкнутой цепи.
- 17. Что представляют собой корневые оценки качества?
- 18.В чем удобство и недостатки интегральных критериев качества?
- 19.Каким образом экспериментальным путем можно оценить качество работы системы?
- 20.Какова роль моделирования систем управления?
- 21.Перечислите общие методы повышения точности систем управления. Поясните их.
- 22. Дайте понятие астатических системы управления. Каким образом определя-

ется степень астатизма?

- 23.В чем преимущество повышения степени астатизма системы с помощью изодромных устройств?
- 24. Какая система является инвариантной по отношению к внешним воздействиям?
- 25. Что понимается под комбинированным управлением?
- 26.Как определяются передаточные функции компенсирующих устройств в комбинированных системах?
- 27. Для каких целей используются неединичные главные обратные связи?
- 28.Сформулируйте понятие чувствительности систем управления.
- 29. Каким образом можно получить уравнения чувствительности?
- 30. Что представляют собой функции чувствительности и коэффициенты чувствительности?

Раздел 5. ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ САУ

При работе с данным разделом Вам предстоит:

- 1) Изучить:
 - а. Основные понятия о дискретных САУ;
 - б. Математическое представление;
 - в. Z-преобразование;
 - г. Анализ устойчивости;
 - д. анализ качества переходных процессов
- 2) Ответить на вопросы теста № 5.

5.1. Понятия о дискретных САУ

Изучаемые вопросы:

- Представление о дискретных САУ;
- Z-преобразование;
- Преобразование структурных схем
- Анализ качества.



Дискретной системой называется такая САУ, в которой имеет место прерывистый характер передачи информации управления. Такой характер сигналов управления может быть обусловлен включением в систему импульсных или цифровых устройств. В связи с этими все дискретные системы разделяются на две большие группы:

- импульсные САУ;
- цифровые САУ.

Как в импульсных, так и в цифровых системах идет процесс преобразования непрерывных величин в дискретные (импульсные или цифровые) величины, называемый процессом квантования. Различают три вида квантования: квантование по времени, квантование по уровню, смешанное квантование.

При квантовании по времени осуществляется выборка из множества значений непрерывной величины дискретных значений через равноотстоящие промежутки времени (рис. 5.1). Временной интервал между двумя соседними выборками называется периодом квантования или дискретизации и обозначается через *T*.

При квантовании по уровню из множества значений непрерывной величины выбираются значения, совпадающие с одним из уровней квантования (рис. 5.2).





При смешанном квантовании выборка осуществляется с постоянным шагом

квантования *T*, но в качестве дискретный значений принимаются значения ближайших уровней квантования (рис. 5.3).

Смешанное квантование имеет место в цифровых системах при преобразовании непрерывных сигналов в цифровую форму.

Импульсные системы разделяются также по типу модуляции в зависимости от того, какой параметр импульса мо-



делируется непрерывным сигналом. Различают системы с амплитудноимпульсной модуляцией (АИМ), с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), фазоимпульсной модуляцией (ФИМ), частотно-импульсной модуляцией (ЧИМ). В дискретных системах вследствие наличия импульсных или цифровых элементов имеет место прерывистый во времени процесс передачи сигналов управления, поэтому для составления математических моделей приходится пользоваться аппаратом дискретных (решетчатых функций).

Решетчатой функцией времени называется функция дискретного аргумента – времени. Обозначается она f(nT) или просто f(n), где T –период дискретизации (квантования); n – число периодов с начала отсчета. Для характеристики дискретной функции в интервалах между моментами квантования вводят понятие смещенной решетчатой функции $f(nT + \sigma T)$ или $f(n, \sigma)$, где σ - относительный сдвиг внутри периода дискретности:

$$0 \le \sigma < 1$$
.

Аналогом производной непрерывной функции для решетчатых функций является конечная разность:

$$\Delta f(n, \sigma) = f(n, \sigma) - f(n-1, \sigma)$$

Конечной разностью к-ого порядка называется решетчатая функция

$$\Delta^k f(n, \sigma) = \Delta^{k-1} f(n, \sigma) - \Delta^{k-1} f(n-1, \sigma).$$

Определение разностей первого порядка для различных *n* показано на рис. 5.4.



Рис. 5.4

Аналогом интеграла непрерывной функции для решетчатой функции является конечная сумма

$$f_{\Sigma}(n,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i,\sigma)$$

Уравнение, связывающее между собой решетчатые функции, их разности различных порядков и конечные суммы, называется разностным уравнением:

$$a_0 \Delta^l y(n,\sigma) + a_1 \Delta^{l-1} y(n,\sigma) + \dots + a_l y(n,\sigma) =$$

= $b_0 \Delta^k u(n,\sigma) + b_1 \Delta^{k-1} u(n,\sigma) + \dots + b_k u(n,\sigma)$

Разностные уравнения являются удобной формой представления зависимости между дискретными функциями и широко используются для записи алгоритмов работы цифровых устройств управления.

5.2. Математическое представление дискретных функций

В рассматриваемых системах непрерывная часть имеет значительный вес в сравнении с дискретной и, кроме того, импульсные элементы преобразуют непрерывные сигналы в последовательность импульсов определенной формы. Появляется необходимость учитывать реальную форму импульсов и отразить зависимость того или иного параметра импульсов от мгновенных значений непрерывного сигнала. Использование аппарата решетчатых функций для таких систем оказалось недостаточным. Решетчатая функция дискретного аргумента не может быть непосредственно подвергнута преобразованию Лапласа. Значит, отсутствует возможность составить математические модели, например, в форме передаточных функций или частотных характеристик, широко используемых для моделирования непрерывных частей таких систем. Возникшее противоречие было преодолено за счет применения аппарата δ-функций.

Для того, чтобы описать дискретные сигналы с помощью δ-функций было предложено заменять реальные импульсные элементы (РИЭ) комбинациями из идеальных импульсных элементов (ИИЭ) и формирующих элементов (ФЭ) как показано на рис. 5.3.

Идеальным импульсным элементом называется абстрактный математический элемент, который под воздействием непрерывного сигнала на его входе генерирует мгновенные типа δ-функций импульсы, следующие с интервалом, равным периоду дискретности РИЭ, и по площади равные значения непрерывного сигнала в моменты квантования.

Последовательность б-функций на выходе ИИЭ

$$U_f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

Формирующим называется элемент, который под воздействием мгновенных модулированных по площади импульсов формирует на выходе импульсы, соответствующие выходному сигналу РИЭ.

Для описания ФЭ привлекается понятие импульсной переходной характеристики. Действительно, каждый импульс на выходе ФЭ есть реакция на входной мгновенный импульс типа δ -функции, т. е. его импульсная переходная характеристика w(t). Подвергнув w(t) преобразованию Лапласа, получают передаточную функцию формирующего элемента

$$W_{\Phi \ni}(s) = L\{w(t)\}.$$

Так, например, для импульса прямоугольной формы, единичной амплитуды и длительностью $\tau = \gamma T$

$$w(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \gamma T).$$

Передаточная функция $\Phi \ni W_{\Phi \ni}(t) = \frac{1 - e^{-\gamma s T}}{s}$.

При $\gamma = 1$ получаем передаточную функцию $W_{OO}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$ так называемого

экстраполятора нулевого порядка. В технике такая передаточная функция соответствует преобразователю "код – напряжение".

Подобным образом получены передаточные функции часто встречающихся на практике импульсных элементов.

Составив математическое описание формирующего элемента, его объединяют с непрерывной частью системы, благодаря чему получается приведенная непрерывная часть (ПНЧ) – рис. 5.5.



Преимуществом такого представления участка дискретно-непрерывной системы является то, что выходной сигнал ИИЭ $U_f^*(t)$ может быть преобразован по Лапласу, тогда как для сигнала $f^*(t)$ на выходе РИЭ преобразование Лапласа недопустимо.

К функции дискретного аргумента f(nT) или $f[(n + \sigma)T]$ непрерывное преобразование Лапласа не может быть применено, так как функции f(nT) и $f[(n + \sigma)T]$ не являются однозначными. Для того, чтобы выполнить преобразование Лапласа над функцией дискретного аргумента, последняя должна быть представлена как бесконечная сумма модулированных по площади δ -функций

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT).$$

Преобразование Лапласа выполненное над суммой модулированных бфункций, называется дискретным преобразованием Лапласа

$$F^*(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(nT)\delta(t - nT)e^{-st}dt =$$
$$= \sum_0^\infty f(nT)\int_0^\infty \delta(t - nT)e^{-st}dt = \sum_0^\infty f(nT)e^{-snT},$$
$$\text{так как } \int_0^\infty \delta(t - nT)e^{-st}dt = \int_0^\infty \delta(t - nT)e^{-snT}e^{snT}e^{-st}dt =$$
$$= \int_0^\infty \delta(t - nT)e^{-s(t - nT)}e^{-snT}dt = e^{-snT}$$

Для символического обозначения дискретного преобразования Лапласа используется символ

$$D\{f(t)\} = D\{f(nT)\} = \sum_{0}^{\infty} f(nT)e^{-snT} = F^{*}(s).$$

Для записи преобразования над смещенной дискретной функцией $f[(n + \sigma)T]$ используется символ модифицированного преобразования

$$D_{\sigma}\left\{f(t)\right\} = \sum_{0}^{\infty} [(n+\sigma)T]e^{-snT} = F^{*}(s,\sigma).$$

Результатом дискретного преобразования функции f(t) является функция трансцендентная, использование которой в преобразованиях затруднительно. Поэтому для описания дискретных систем получило распространение так называемое *Z*-преобразование, получающееся из дискретного преобразования Лапласа путем формальной замены

$$z = e^{sT}, \quad s = \frac{1}{T} \ln z \,.$$

Таким образом, $F^*(s)\Big|_{s=\frac{\ln z}{T}} = \sum_{0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = F(z)$ называется Z - преобразованием

функции f(t). Если в рассмотрение вводится местный локальный сдвиг σ , то вводится понятие модифицированного *Z*-преобразования.

$$Z_{\sigma}\left\{f(t)\right\} = \sum f[(n+\sigma)T]z^{-n} = F(z,\sigma).$$

Приведем в качестве примеров непрерывного – и *Z*-преобразований изображения единичной ступенчатой функции f(t) = 1(t).

$$L\{f(t)\} = L\{1(t)\} = \int_{0}^{\infty} 1(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}.$$

 $Z\{l(t)\} = Z_{\sigma}\{l(t)\} = \sum_{0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$ (сумма бесконечной геометрической

прогрессии $s = \frac{a}{1-q}$, где $a = 1, q = z^{-1}$).

5.3. Z-преобразования

1. Свойство линейности.

Оба преобразования: непрерывное Лапласа и *Z*-преобразование, - являются линейными, т. е. изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации их изображений.

Так если
$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$$
, то
 $L\{f(t)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s), \ Z_{\sigma}\{f(t)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(z,\sigma)$

• Изображение смещенной функции (теорема сдвига)

Сдвигу функции оригинала на τ , т. е. $f_1(t) = f(t - \tau)$ соответствует умножение непрерывного изображения на $e^{-s\tau}$:

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}L\{f(t)\} = e^{-s\tau}F(s).$$

Если сдвиг $\tau = mT(T - интервал дискретности),$ то $Z - или Z_{\sigma}$ - изображения функции f(t) умножаются на Z^m

$$Z_{\sigma}\left\{f(t-mT)\right\} = z^{-m}F(z,\sigma).$$

Частотные случаи последнего свойства:

1) $m = +1; \quad Z_{\sigma} \{t - T\} = z^{-1} F(z, \sigma).$

Т. е. Z^{-1} – оператор запаздывания на один период дискретности;

2) $m = -1; \quad Z_{\sigma} \{t + T\} = zF(z,\sigma);$

Z – оператор опережения на один период дискретности.

• Изображение производной (конечной разности) *п* - порядка

Если
$$L\{f(t)\} = F(s)$$
, то $L\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n F(s)$, при $f(0) = 0$ и всех $\frac{df^k}{dt^k} = 0$,

k = 1, 2, ..., n-1. Другими словами взятию производной *n*-го порядка соответствует при нулевых начальных условиях умножение изображения на s^n .

Аналогично для Z-преобразования (приводим формулировку свойства для σ = 0) взятию разности *k*-го порядка дискретной функции *f*(*nT*) соответствует умно-

жение ее изображения на $\left(\frac{z-1}{z}\right)^k$: $Z\left\{\Delta^k f(nT)\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z)$, где $F(z) = Z\left\{f(nT)\right\}$.

2. Изображение интеграла (конечной суммы) функции-оригинала

Свойства изменения изображений функции после ее интегрирования или взятия конечной суммы в дискретном варианте является "обратными" по отношению к свойствам дифференцирования или взятия конечных разностей:

$$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s), \text{ где } F(s) = L\left\{f(t)\right\},$$
$$Z\left\{\sum_{i=0}^{n} f(i)\right\} = Z_{\sigma}\left\{\sum_{i=0}^{n} f(i,\sigma)\right\} = \frac{z}{z-1}F(z,\sigma)$$

Резюмируя свойства 3 и 4 отметим, что *s* – оператор дифференцирования в непрерывной области; 1/s – оператор интегрирования в непрерывной области; $\frac{z}{z-1}$ – оператор суммирования в дискретном времени; $\frac{z-1}{z}$ – оператор взятия конечной разности 1-го порядка.

• <u>Свойство изображения свертываемых функций (теорема свертки)</u> Сверткой двух непрерывных или дискретных функций называется функция,

значения которой вычисляются согласно $f(t) = \int_{0}^{t} f_{1}(\tau) f_{2}(t-\tau) d\tau$ для непрерывно-

го времени и $f(n,\sigma) = \sum_{i=0}^{n} f_1(i,\sigma) f_2(n-i,\sigma)$ для дискретного времени.

Формулировка свойства об изображении свертки одинакова для непрерывного и дискретного времени:

- изображение свертки равно произведению изображений свертываемых функций.

Если
$$L\{f_1(t)\} = F_1(s)$$
 и $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$, то

3. Определение начального значения функции оригинала по известному изображению

Зная изображение (F(s) в непрерывном случае и F(z) или $F(z,\sigma)$ в дискретном случае) можно сравнительно просто вычислить начальное и конечное значения функции-оригинала.

Начальное значение непрерывной функции

$$f(t) = \limsup_{t \to 0} sF(s)$$

Начальное значение дискретной функции

$$f(nT) = \lim_{z \to \infty} \frac{z-1}{z} F(z).$$

4. Конечное значение функции-оригинала

В непрерывном времени $f(t) = \limsup_{t \to \infty} sF(s)$.

В дискретном времени $f(nT) = \lim_{n \to \infty} \frac{z-1}{z} F(z)$ и при $\sigma \neq 0$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ 0 \le \sigma < 1}} f[nT + \sigma T] = \lim_{\substack{z \to 1 \\ 0 \le \sigma < 1}} \frac{z - 1}{z} F(z, \sigma).$$

Рассмотрим еще несколько свойств, полезных для выполнения несложных преобразований.

5. <u>Свойство изображения функции, умноженной на</u> $e^{\pm \alpha t}$

Для дискретного времени это свойство записывается следующим образом:

Если
$$F(z,\sigma) = Z_{\sigma}\{f(t)\}$$
, то $Z_{\sigma}\{f(t)e^{\pm\alpha t}\} = d^{\sigma}F(\frac{z}{d},\sigma)$, где $d = e^{\pm\alpha T}$

В частном случае $\sigma = 0$ имеем

$$Z\left\{f(t)e^{\pm \alpha t}\right\} = F(\frac{z}{d}),$$
 где $d = e^{\pm \alpha T}$.

Записанное свойство позволяет без труда найти изображение экспоненциальной функции

$$Z\left\{e^{\pm\alpha t}\right\} = Z\left\{\left|e^{\pm\alpha t}\right\}\right\} = Z\left\{\left|\left(t\right)\right\}\right|_{z=\frac{z}{e^{\pm\alpha T}}} = \frac{z}{z-1}\Big|_{z=\frac{z}{e^{\pm\alpha t}}} = \frac{z}{z-e^{\pm\alpha T}}$$
$$Z_{\sigma}\left\{e^{\pm\alpha t}\right\} = e^{\pm\alpha T\sigma}\frac{z}{z-e^{\pm\alpha T}}.$$

Для непрерывного времени в рамках этого свойства определяется изображение $f(t) = e^{\pm \alpha t}$

$$L\left\{e^{\pm\alpha t}\right\} = \frac{1}{s \mp \alpha}$$

6. <u>Свойство изображения функции, умноженной на t^m (m – целое число)</u>

Это свойство имеет особое значение для дискретных систем, так как для непрерывных систем составлены подробнейшие таблицы соответствий функций и их изображений [6].

Для дискретных систем свойство формулируется отдельно для случаев $\sigma=0$ и $\sigma\neq 0.$

Для $\sigma = 0$ имеем

$$Z\left\{f(t)t^{m}\right\} = (-Tz)^{m} \frac{d^{m}}{dZ^{m}} F(z).$$

Словами: умножению функции-оригинала *t^m* соответствует, с точностью до множителя, взятие *m*-производной в области изображений.

Пример. f(t) = 1(t), m = 1.

$$Z\{l(t)t\} = Z\{t\} = -Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -Tz\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}.$$

Для $\sigma \neq 0$ выражение изображения находится более сложно:

$$Z_{\sigma}\left\{f(t)t^{m}\right\} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i} (\sigma T)^{m-i} C_{m}^{i} \frac{d^{i} F(z,\sigma)}{ds^{i}}\Big|_{z=e^{sT}}$$

Здесь C_m^i - число сочетаний из *m* элементов по *i*.

5.3.1. Связь спектров непрерывного и дискретного сигналов

Для выяснения соотношения между *Z*-преобразованием и непрерывным преобразованием Лапласа, а также соотношения частотных свойств дискретного и непрерывного сигналов рассмотрим связь спектров этих сигналов.

Спектр непрерывного сигнала x(t) определяется его преобразованием Фурье

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
, где $\omega = 2\pi f - \kappa$ руговая частота сигнала, $-\infty \le \omega \le \infty$.

Чтобы найти выражение спектра дискретного сигнала, его надо предварительно представить в непрерывной форме с помощью δ-функций

$$x^{*}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = x(t)U^{*}(t),$$

где $U^{*}(t)$ – последовательность б-функций, следующая с периодом *T*. Как периодическую функцию $U^{*}(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$U^*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота квантования, U_k – коэффициент ряда Фурье:

$$U_{k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jk\omega_{0}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(0) dt = \frac{1}{T};$$

следовательно все коэффициенты ряда Фурье равны независимо от значения *k*. Для всей суммы δ-функций

$$U^{*}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_{k} e^{jk\omega_{0}t} = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{0}t}$$

Подставляя $U^{*}(t)$ в выражение сигнала, получим

$$x^{*}(t) = x(t)\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{0}t}$$

В таком виде сигнал $x^{*}(t)$ может быть подвергнут преобразованию Фурье:

$$X^{*}(j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t) \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{0}t} e^{j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x(t) e^{j(\omega - k\omega_{0})t} dt = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_{0})]$$

где $X[j(\omega - k\omega_0)]$ - смещенный на $k\omega_0$ спектр непрерывного сигнала.

Общий вывод: спектр дискретного сигнала представляет бесконечную сумму (рис. 5.6) смещенных спектров непрерывного сигнала.



Рис. 5.6

Это значит, что при определенной частоте квантования частотные характеристики дискретных систем будут представлять сумму смещенных частотных характеристик соответствующих непрерывных систем. Это также означает, что если максимальная частота спектра непрерывного сигнала ($\omega_{\rm M}$) или, максимальная частота пропускания непрерывной части системы ($\omega_{\rm n}$) меньше половины частоты квантования ω_0 , то наложение отдельных составляющих спектра не будет, и характеристики дискретной системы в существенном диапазоне частот будут совпадать с характеристиками непрерывной системы.

И так для системы необходимо $\omega_n \le \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T}$, $\omega_n \le \frac{\pi}{T}$.

Для неискаженной передачи непрерывного сигнала его дискретными значениями необходимо, чтобы максимальная частота спектра непрерывного сигнала $\omega_{M} \leq \frac{\pi}{T}$.

Последнее условие является стержнем знаменитой импульсной теоремы Котельникова-Шеннона, согласно которой частота квантования $\omega_0 = 2\pi/T$ должна быть по крайней мере в 2 раза больше максимальной частоты спектра непрерывного сигнала, передаваемого его дискретными значениями.

5.3.2. Связь между непрерывным преобразованием Лапласа и Z-преобразованием

Из выражений непрерывных преобразований Лапласа и Фурье, приводимых ранее, следует, что $F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ и $F(s) = F(j\omega)|_{j\omega=s}$. Используем эти соотношения для преобразований дискретных сигналов и получим

$$F^{*}(s) = F^{*}(j\omega)\Big|_{j\omega=s} = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} F(s - jk\omega_{0})$$
. Если ввести замену $e^{sT} = z$, получим

связь непрерывного преобразования Лапласа и Z-преобразования

$$F(z) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} f(s - jk\omega_0) \bigg|_{e^{sT} = z}$$

Символически эту связь записывают следующим образом:

$$F(z) = Z\{F(s)\} \operatorname{при} \sigma = 0 \operatorname{и} F(z,\sigma) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} F(s - jk\omega_0) e^{T\sigma(s - jk\omega_0)} \Big|_{s = \frac{\ln z}{T}}$$

что символически означает $F(z, \sigma) = Z_{\sigma} \{F(s)\}.$

Записанные выражения связи F(z), $F(z,\sigma)$, F(s) имеют главным образом, теоретическое значение и не используются для практического определения F(z) и $F(z,\sigma)$ по F(s). Существует два способа практического перехода от F(s) к F(z) и $F(z,\sigma)$.

<u>1 способ.</u>

Предварительно определяется временная функция, соответствующая исходному изображению $f(t) = L^{-1} \{F(s)\}.$

Чтобы облегчить переход в дискретную область, можно предварительно разложить F(s) на сумму простых слагаемых.

Пример. Пусть $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$.

Разложение на простые слагаемые дает

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}.$$

Из таблиц соответствия имеем: $\frac{1}{s^2} = L\{t\}; -\frac{1}{s} = L\{-1\}; \frac{1}{s+1} = L\{e^{-t}\}$. Таким обра-

зом
$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\} = t - 1 + e^{-t}$$
. Подвергая $f(t)$ Z-преобразованию, получим:

$$Z\{f(t)\} = Z\{t\} - Z\{l(t)\} + Z\{e^{-t}\} = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-t}}.$$

2 способ.

Осуществляется непосредственный переход от F(s) к F(z), используя таблицу соответствия изображений [6]. Если в таблице нет изображения, соответствующего заданному F(s), выполняют разложение F(s) на сумму более простых выражений. Пример. Пусть $F(s) = \frac{k}{s^2 \prod_{i=3}^{5} (T_i s + 1)}$. Представим заданное F(s) суммой сла-

гаемых $F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s^2} + \sum_{i=3}^{5} \frac{k_i}{s - s_i}$, где $s_i = -\frac{1}{T_i}$. Определим модифицированное *Z*-

преобразование

$$Z_{\sigma}\left\{\frac{k}{s^{2}\prod_{i=3}^{5}(T_{i}s+1)}\right\}Z_{\sigma}\left\{\frac{k_{1}}{s}\right\}+Z_{\sigma}\left\{\frac{k_{2}}{s^{2}}\right\}+\sum_{i=3}^{5}Z_{\sigma}\left\{\frac{k_{i}}{s-s_{i}}\right\}=$$
$$=k_{1}\frac{z}{z-1}+k_{2}\frac{\sigma T z}{z-1}+k_{2}\frac{T z}{(z-1)^{2}}+\sum_{i=3}^{5}k_{i}e^{-s_{i}T\sigma}\frac{z}{z-e^{-s_{i}T}}.$$

<u>Частный случай</u>, важный в практике записи *Z*-изображений по заданному F(s).

Если
$$F(s) = F_1(e^{sT})F_2(s)$$
, то $Z_{\sigma}\{F(s)\} = F_1(e^{sT})\Big|_{e^{sT} = z}F_2(z,\sigma)$.
Пример. Пусть $F(s) = k(1 - e^{-sT})\frac{1}{s(T_1s + 1)}$.
 $Z_{\sigma}\{F(s)\} = k(1 - z^{-1})Z_{\sigma}\left\{\frac{1}{s(T_1s + 1)}\right\}$.
 $Z_{\sigma}\left\{\frac{1}{s(T_1s + 1)}\right\} = Z_{\sigma}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}}\right\} = \frac{z}{z - 1} - e^{-\frac{T\sigma}{T_1}}\frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}}$.

Окончательно

$$F(z,\sigma) = k(1-z^{-1}\left[\frac{z}{z-1} - e^{-\frac{T\sigma}{T_1}} \frac{z}{z-e^{-\frac{T}{T_1}}}\right] = k(1-e^{-\frac{T\sigma}{T_1}} \frac{z-1}{z-e^{-\frac{T}{T_1}}}).$$

5.3.3. Обратное преобразование Лапласа

Обратным преобразованием Лапласа $L^{-1}{F(s)}$ называется определение временной функции f(t), для которой прямое преобразование Лапласа

$$L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s).$$

Обратным Z-преобразованием $Z^{-1}{F(z)}$ или $Z_{\sigma}^{-1}{F(z,\sigma)}$ называется определение дискретной функции времени f(nT) ($f[(n + \sigma)T]$), для которой $Z{f(nT)} = F(z)$ или $Z_{\sigma}{f[(n+\sigma)T]} = F(z,\sigma)$.

Отметим ограничения, которые следует иметь в виду, выполняя обратное преобразование Лапласа или обратное *Z*-преобразование.

1. Не каждая функция F(s) имеет обратное преобразование. Существование обратного преобразования определяется необходимыми и достаточными условиями, накладываемыми на F(s).

2. Прямое преобразование Лапласа $L\{f(t)\}$ единственно для каждой f(t), имеющей такое преобразование. Обратное утверждение, в общем случае, несправедливо. Различные разрывные функции могут иметь одинаковое преобразование Лапласа. Например, единичная ступенчатая функция f(t) = 0 для t < 0 и f(t) = 1 для t > 0 имеет преобразование Лапласа 1/s независимо от значения, принимаемого при t = 0.

3. Обратное $Z - или Z_{\sigma}$ - преобразование, если оно существует, позволяет определить лишь последовательность отдельных значений непрерывной функции-оригинала, существующих в моменты времени t = nT или $t = (n + \sigma)T$. Одной и той же последовательности дискретных значений f(mT) или $f[(n + \sigma)T]$ может соответствовать множество огибающих f(t). Поэтому по обратному Z – преобразованию принципиально невозможно восстановить непрерывную функцию f(t).

Существует два общих практических способа определения обратных преобразований как для непрерывных, так и для дискретных систем.

1. Использование таблиц обратных преобразований Лапласа и обратных Zпреобразований, например в [6]. Если исходного F(s) и F(z) изображения нет в таблице следует использовать разложение его на сумму или произведение изображений, имеющихся в таблице.

Использование формулы обращения.
 Для непрерывного изображения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Значение контурного интеграла определяется в открытом интервале, где f(t) ограничена и имеет конечное число точек экстремума и разрыва. Решение часто удается получить при помощи теоремы о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} sF(z_k),$$

где $z_1, z_2, ..., z_n$ особые точки $F(s)e^{st}$.

Вычисление интеграла обращения как суммы вычетов широко используется в различных программных продуктах, используемых при компьютерном моделировании систем автоматического управления.

Для дискретного изображения формула обращения имеет вид

$$f(n,\sigma) = \frac{1}{2\pi j} \oint_R F(z,\sigma) z^{n-1} dz$$

Контур интегрирования *R* должен охватывать начало координат плоскости *Z* и все особые точки подынтегральной функции. Как и в непрерывном случае, круговой интеграл обычно рассчитывается как сумма вычетов подынтегральной функции в особых точках:

$$f(n,\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Res}_{i}[F(z,\sigma)z^{n-1}].$$

N – число вычетов; N = q + 1 для n = q для n > 0, где q – число особых точек функции $F(z,\sigma)$.

Вычеты вычисляются следующим образом:

- для простого полюса $z = z_i$

$$\operatorname{Res}_{i}[F(z,\sigma)z^{n-1}] = \lim_{z \to z_{i}} [F(z,\sigma)z^{n-1}(z-z_{i})];$$

- для кратного полюса кратности *m*

$$\operatorname{Res}_{i}[F(z,\sigma)z^{n-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_{i}} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [F(z,\sigma)z^{n-1}(z-z_{i})^{m}].$$

Кроме двух общих методов, в случае обратного Z–преобразования используется также разложение $F(z,\sigma)$ в ряд по возрастающим степеням z^{-1} в соответствии с основной формулой Z–преобразования

$$F(z,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n,\sigma) z^{-n}$$

Когда $F(z,\sigma)$ представлено рациональной дробью разложение по степеням z^{-1} может быть выполнено простым делением числителя на знаменатель.

Пример. Пусть
$$F(z) = \frac{z}{z - 0.2}$$
.
 $\begin{array}{c} z \\ \underline{z - 0.2} \\ 0.2 \\ \underline{0.2 - 0.04z^{-1}} \\ \underline{0.04z^{-1}} \\ 0.008z^{-2} \end{array}$

Получаем f(n) = 1 0.2 0.04 0.008.

При более сложных выражениях F(z) и $F(z,\sigma)$ лучше использовать вычисление по рекуррентной формуле:

$$f(q-p,\sigma) = \frac{b_0}{a_0}; \quad f(k+q-p,\sigma) = \frac{1}{a_0} [b_k - \sum_{i=1}^k a_i f(k-i+q-p,\sigma)].$$

Здесь $b_0, ..., b_k, ..., b_p$ – коэффициенты числителя $F(z,\sigma) a_0, ..., a_i, ..., a_q$ – коэффициенты знаменателя $F(z,\sigma)$. При q = p формулы значительно упрощаются

$$f(0,\sigma) = \frac{b_0}{a_0}; \quad f(k,\sigma) = \frac{1}{a_0} [b_k - \sum_{i=1}^k a_i f(k-i,\sigma)]$$

Аналогично преобразованию дифференциального уравнения непрерывной системы осуществляется Z-преобразование разностного уравнения дискретной системы.

Пусть дискретная система описывается уравнением

$$a_0 \Delta^n y(n,\sigma) + a_1 \Delta^{n-1} y(n,\sigma) + \dots + a_n y(n,\sigma) =$$

= $b_0 \Delta^m g(n) + b_1 \Delta^{m-1} g(n) + \dots + b_m g(n) + c_0 \Delta^e f(n) + c_1 \Delta^{e-1} f(n) + \dots + c_e f(n),$

Подвергнем это разностное уравнение *Z*-преобразованию, принимая начальные условия нулевыми:

$$a_0(\frac{z-1}{z})^n Y(z,\sigma) + a_0(\frac{z-1}{z})^{n-1} Y(z,\sigma) + \dots + a_n Y(z,\sigma) =$$

= $b_0(\frac{z-1}{z})^m G(z) + b_1(\frac{z-1}{z})^{m-1} G(z) + \dots + b_m G(z) +$
+ $c_0(\frac{z-1}{z})^e F(z) + c_1(\frac{z-1}{z})^{e-1} F(z) + \dots + c_e F(z).$

Записывая полученное уравнение в сжатой форме, получим $A(z,\sigma)Y(z,\sigma) = B(z)G(z) + C(z)F(z).$

Беря отношения *Z*-изображений, получим передаточные функции дискретной системы по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W_g(z,\sigma) = \frac{B(z)}{A(z,\sigma)} = \frac{Y(z,\sigma)}{G(z)}; \quad W_f(z,\sigma) = \frac{C(z)}{A(z,\sigma)} = \frac{Y(z,\sigma)}{F(z)}.$$

Для дискретно-непрерывной системы определение дискретной передаточной функции выполняется на основе перехода от непрерывной передаточной функции приведенной непрерывной части к ее дискретному эквиваленту в *Z*области. Покажем этот переход на примере разомкнутой дискретно-непрерывной системы с одним импульсным элементом на ее входе (рис. 5.7). На схеме

$$U_{g}^{*}(t) = \sum_{0}^{\infty} g(nT)\delta(t - nT), W_{\Pi H \Psi}(s) = W_{\Phi \Theta}(s)W_{H \Psi}(s).$$

 $g(t) = U_{g}^{*}(t) = V_{g}(t)$ Так как входной сигнал приведенной непрерывной части представляет собой сумму модулированных по площади входным сигналом $g(t)$ δ-функций, выходной сигнал $y(t)$ будет представлять сумму реакции

ПНЧ на б-функции; т. е. сумму функций веса ПНЧ

$$y(t) = \sum_{0}^{t} g(iT) w_{\Pi H \Psi}(t - iT).$$

Если вместо непрерывного сигнала y(t) отмечать лишь его дискретные значения y(nT) или $y[(n + \sigma)T]$, то получим решетчатую функцию y(n) или $y(n, \sigma)$:

$$y(n,\sigma) = \sum_{i=0}^{n} g(i) w_{\prod H \Psi}(n-i,\sigma).$$

Подвергнем эту решетчатую функцию модифицированному *Z*-преобразованию

$$Z_{\sigma}\left\{y(n,\sigma)\right\} = Z_{\sigma}\left\{\sum_{i=0}^{n} g(i)w_{\Pi H \Psi}(n-i,\sigma)\right\}.$$

С учетом теоремы свертки имеем

$$Y(z,\sigma) = G(z)Z_{\sigma} \{w_{\Pi H \Psi}(n,\sigma)\},\$$

$$Z_{\sigma} \{w_{\Pi H \Psi}(n,\sigma)\} = Z_{\sigma} \{L^{-1} \{W_{\Pi H \Psi}(n,\sigma)\}\} = Z_{\sigma} \{W_{\Pi H \Psi}(n,\sigma)\} = W(z,\sigma).$$

Таким образом

$$Y(z,\sigma) = G(z)W(z,\sigma)$$
.

Здесь $W(z,\sigma) = \frac{Y(z,\sigma)}{G(z)}$ - дискретная передаточная функция разомкнутой дискретно-непрерывной системы. С одной стороны, она связывает Z-изображения дискретных сигналов, с другой стороны, она определяется как *Z*-форма передаточной функции приведенной непрерывной части.

5.4. Структурные схемы

В структурных схемах дискретных систем импульсные (дискретные) элементы изображаются ключами (рис. 5.8.). Иногда ключ снабжается замыкающей стрелкой и большой буквой Т, которая означает, что элемент осуществляет квантования с периодом Т.



Идеальный импульсный элемент изображается прямоугольником с символом δ - функции внутри (рис. 5.9, а).

Формирующий элемент изображается как обычное непрерывное звено прямоугольником с записью его передаточной функции (рис. 5.9, б).



Кроме общих структурных схем широко используются детализированные структурные схемы, состоящие только из безинерционных масштабных звеньев и идеальных интегрирующих звеньев с полностью вскрытыми связями между ними.





 $W(z) = Z\{W_1(s)W_2(s)...W_n(s)\} = W_1W_2W_3...W_n(z)$

<u>Правило:</u> Дискретная передаточная функция последовательного соединения непрерывных звеньев не равна произведению их *Z*-форм, а равна *Z*-форме произведения их непрерывных передаточных функций.

5.4.2. Дискретная система с несколькими импульсными элементами



 $W(z) = W_1(z)W_2(z)$, где $W_1(z) = Z\{W_1(s)\}, W_2(z) = Z\{W_2(s)\}.$

Правило: Передаточная функция нескольких последовательно соединенных непрерывных звеньев, разделенных импульсными элементами, равна произведению их *Z*-форм от непрерывных передаточных функций.

Дискретно-непрерывная система

$$W(z) = \sum_{i=1}^{n} W_i(z)$$
, где $W_i(z) = Z\{W_i(s)\}$

Правило: Дискретная передаточная функция параллельного соединения непрерывных звеньев равна сумме дискретных передаточных функций отдельных ветвей.



Дискретная система с несколькими импульсными элементами



Правило: Параллельные каналы с безинерционными звеньями и импульсными элементами, работающими синхронно и с одинаковым периодом квантования, могут быть заменены одним импульсным элементом, включенным после узла суммирования.

Дискретно-непрерывная система с единичной обратной связью



 $Y(z,\sigma) = W(z,\sigma)E(z)$, где $W(z,\sigma) = Z_{\sigma}\{W_{\Pi H^{q}}(s)\}, E(z) = X(z) - Y(z)$. Подставляя в уравнение выхода, получаем

$$Y(z,\sigma) = W(z,\sigma)X(z) - W(z,\sigma)Y(z).$$

Положим $\sigma=0$, тогда

$$Y(z) = W(z)X(z) - W(z)Y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}X(z).$$

Подставляя в уравнение для $Y(z, \sigma)$, получим

$$Y(z,\sigma) = W(z,\sigma)[X(z) - Y(z)] = W(z,\sigma)[X(z) - \frac{W(z)}{1 + W(z)}X(z)] = \frac{W(z,\sigma)}{1 + W(z)}X(z).$$

Передаточная функция замкнутой системы по управлению:

$$\Phi_{x}(z,\sigma) = \frac{Y(z,\sigma)}{X(z)} = \frac{W(z,\sigma)}{1+W(z)}$$

Получим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке:

$$\Phi_e(z,\sigma) = \frac{E(z,\sigma)}{X(z)},$$

где $E(z,\sigma) = X(z,\sigma)$ - $Y(z,\sigma)$. Подставляя в уравнение для ошибки $Y(z,\sigma) = \frac{W(z,\sigma)}{1+W(z)}X(z)$, получим $E(z,\sigma) = X(z,\sigma) - \frac{W(z,\sigma)}{1+W(z)}X(z)$.

К сожалению, из полученного выражения $E(z, \sigma)$ невозможно написать отношение $E(z, \sigma)$ к X(z). Это можно сделать, только положив $\sigma=0$, тогда $E(z) = X(z) - \frac{W(z, \sigma)}{1+W(z)}X(z) = \frac{1}{1+W(z)}X(z)$. Тогда передаточная функция замкнутой

системы по ошибке при σ=0 будет:

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}.$$

Отметим, что по форме передаточные функции замкнутой дискретнонепрерывной системы полностью совпадают с соответствующими передаточными функциями непрерывной системы.

Дискретные системы произвольной структуры

Под произвольной структурой мы будем понимать расположение одного или нескольких импульсных элементов в различных местах дискретной системы, (в прямом канале, в канале обратной связи, между непрерывными звеньями и т.д.). Для записи уравнений или передаточных функций в таких системах следует использовать три основных правила записи уравнений в Z-изображениях.

*Правило1: Z-изображение выходного сигнала одного или нескольких последовательно соединенных непрерывных звеньев, подвергнутых воздействию дискретного сигнала, равно произведению Z-изображения, входного сигнала на Zпреобразование непрерывной передаточной функции. Рисунок ниже иллюстрирует это правило:



Правило2: Если одно или группа непрерывных последовательно соединенных звеньев подвергнута воздействию непрерывного сигнала, то Z-изображение выходного сигнала равно Z-преобразованию произведению изображения входного сигнала на непрерывные передаточные функции звеньев.



$$Y(z) = Z\{X(s)\}W(s)\} = XW(z). Y(z) = Z\{X(s)\}W_1(s)W_2(s)\} = XW_1W_2(z)$$

$$Y(z,\sigma) = Z_{\sigma}\{X(s)W(s)\} = XW(z,\sigma) Y(z,\sigma) = Z_{\sigma}\{X(s)\}W_1(s)W_2(s)\} = XW_1W_2(z,\sigma)$$

Правило 3. *Z* – изображение выходного сигнала группы звеньев, разделенных импульсными элементами, работающими синхронно и с одинаковым периодом квантования, равно произведению *Z*-форм передаточных функций отдельных звеньев.


 $Y(z) = X(z)W_1(z)W_2(z)W_3(z)$, где $W_1(z) = Z\{W_1(s)\}; W_2(z) = Z\{W_2(s)\}; W_3(z) = Z\{W_3(s)\};$

Выражение $Y(z, \sigma)$ при $\sigma \neq 0$ довольно сложное и здесь не производится.

Пример: Простая система с одним импульсным элементом и неединичной обратной связью.



Для записи выражения передаточных функций системы по управлению G(s) и ошибке E(s) разорвем искусственно систему (разрыв всегда делается перед импульсным элементом или перед первым импульсным элементом, если их несколько).



Запишем выражение для E(z)

$$E(z) = -E(z)W_1W_2(z) + G(z) = G(z)\frac{1}{1 + W_1W_2(z)}$$

Передаточная функция замкнутой системы по управлению

$$\Phi_g(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1 W_2(z)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке:

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{1}{1 + W_1 W_2(z)}$$

Непосредственное применение правила Мэйсона к графу, эквивалентному структурной схеме дискретно-непрерывной системы, невозможно. Существует два пути использования правила Мэйсона для дискретно-непрерывных систем:

1) составление дискретного графа, в котором все переменные представлены дискретными величинами и для которого применение правила Мэйсона допустимо;

2) использования исходного эквивалентного графа с изменением формулы Мэйсона. Первый путь является более простым и эффективным и поэтому получил широкое распространение в практике анализа дискретно-непрерывных систем, особенно при решении задачи записи уравнений в Z-изображениях для систем сложной структуры с несколькими дискретными элементами.

В качестве иллюстрации использования формулы Мэйсона и записи уравнений в Z-изображениях рассмотрим простую дискретную систему с одним дискретным элементом и неединичной отрицательной обратной связью (рис. 2.23), использованную выше для составления эквивалентного графа.

Уравнения для входа и выхода в изображениях

$$E(s) = G(s) - W(s)W_{oc}(s)E^{*}(s), \ Y(s) = W(s)E^{*}(s).$$

Подвергнем Z-преобразованию записанные уравнения

$$E(z) = G(z) - WW_{oc}(z)E(z) = \frac{G(z)}{1 + WW_{oc}(z)}, \ Y(z) = W(z)E(z) = G(z) \frac{W(z)}{1 + WW_{oc}(z)}$$

Составляем дискретный граф системы

$$G(z) \underbrace{1 \quad E(z) \quad W(z)}_{-WW_{oc}(z)} \underbrace{\mathcal{S}(z)}_{-WW_{oc}(z)}$$

К такому графу правило Мэйсона применяется без всяких ограничений и условий:

$$\frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{W(z)}{1 + WW_{oc}(z)}; \quad \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{1}{1 + WW_{oc}(z)}.$$

Передачи между непрерывными и дискретными сигналами могут быть определены из так называемого составного графа.

Составным графом называется совокупность дискретного и эквивалентного графов, полученная путем соединения выходных узлов квантователей эквивалентного графа с аналогичными узлами дискретно графа дугами с единичными передачами.



Составной граф для рассматриваемой нами системы будет следующим: Применение правила Мэйсона к составному графу позволяет записать выражения передач для всех непрерывных и дискретных вершин. Так например,

$$\frac{Y(s)}{G(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + WW_{\text{oc}}(z)}; E(s) = G(s) - \frac{W_1(s)W_{\text{oc}}(s)}{1 + WW_{\text{oc}}(z)}G(z).$$

5.5. Векторно-матричное описание

При переходе к дискретной аппроксимации непрерывной части системы будем считать, что входной сигнал квантуется с периодом Т, а затем преобразуется экстраполятором нулевого порядка.

Это значит, что внешнее воздействия U(t) остается постоянным в течение *n*-такта квантования, т. е. U(t) = u(nT), при $nT \le t \le (n+1)T$.

Известно, что решением основного векторно-матричного уравнения непрерывной системы X = AX + BU является следующее выражение

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_{0}^{t} \Phi(t-\tau)BU(t)d\tau, \qquad (5.1)$$

где $\Phi(t) = e^{At}$ - переходная матрица системы, имеющая форму матричной экспоненты e^{At} . Она вычисляется либо как сумма степенного ряда $e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2}t^2 + ... + \frac{A^kt^k}{k!} + ...,$ либо как обратные преобразования Лапласа $e^{At} = L^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}.$

Используем выражение (5.1) для определения вектора состояния во времени интервала $nT \le t \le (n+1)T$, считая начальными условиями x(nT), $X(t) = \Phi(-nT)X(nT) + u(nT) \int_{0}^{t} \Phi(t-\tau)Bd\tau$. Для момента времени t = (n+1)T имеем $X[(nT) + u(nT)]_{0}^{t}$ + 1)*T*] = $\Phi(T)X(nT) + U(nT) \int_{nT}^{(n+1)T} \Phi[(n+1)T - \tau]Bd\tau$, или после преобразований X(n + nT)

1) =
$$\Phi(T)X(n)$$
 + ... + $U(n) \int_{0}^{T} [\Phi(\tau)d\tau]B$, где $\Phi(T) = e^{AT} = L^{-1} \{(SI-A)^{-1}\}$ - переходная

матрица непрерывной части системы при t = T.

Введем обозначения: $A^* = \Phi(T); B^* = [\int_0^T \Phi(\tau) d\tau] B$. Тогда векторно-матричное

описание дискретной системы будет иметь вид:

$$X(n+1) = A^*X(n) + B^*U(n), \ Y(n) = CX(n) + DU(n).$$

По форме полученные уравнения являются полной аналогией векторноматричных уравнений непрерывной системы.

Векторно-матричное описание дискретной системы Пусть дискретная система описывается передаточной функцией

$$W(z) = \frac{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \dots + b_q}{a_0 z^q + a_1 z^{q-1} + \dots + a_q} = \frac{y(z)}{u(z)}.$$

Ей соответствует разностное уравнение

 $a_0y(n+q) + a_1y(n+q-1) + ... + a_qy(n) = b_0u(n+q) + b_1u(n+q-1) + ... + b_qu(n).$ Переменные состояния примем следующие:

$$X_{1}(n) = y(n);$$

$$X_{2}(n) = x_{1}(n+1) = y(n+1);$$

$$X_{3}(n) = x_{2}(n+1) = y(n+2);$$

$$\dots$$

$$X_{q}(n) = x_{q-1}(n+1) = y(n+q-1);$$

$$X_{q}(n+1) = y(n+q).$$

Подставим их в разностное уравнение, приняв $a_0 = 1$, $b_q = 1$, $b_0 = b_1 = \dots = b_{q-1} = 0$, $y(n+q) = x_q(n+1) = -a_1 x_q(n) - a_2 x_{q-1}(n) - \dots - a_q x_1(n) + u(n)$.

Полученные уравнения можно представить в виде векторно-матричного уравнения состояний:

Совместно с уравнением выхода

k=0

$$Y(n) = [10...0] \begin{vmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \dots \\ x_q(n) \end{vmatrix}.$$

Вводя обозначения: *X* – вектор переменных состояния; *A* - матрица системы; *B* – матрица входа; *C* –матрица выхода; - записываем векторно-матричное уравнение дискретной системы в комплексной форме:

$$X(n+1) = AX(n) + BU(n); Y(n) = CX(n).$$

Можно получить выражения матриц А,В и С и в более общем случае, когда $b_{q \neq} 1$ и $b_{0 \div} b_{q-1 \neq} 0$ [1].

Решение дискретного уравнения состояния с помощью Z-преобразования

Рассмотрим дискретное уравнение состояния X(n+1)=A*X(n)+B*U(n), где $A^* = e^{AT} = L^{-1}\{(\text{SI-A})^{-1}\}|_{t=T}; B^* = [\int_0^T \Phi(\tau) d\tau]B$. Подвергнем обе части уравнения со-

стояния Z-преобразованию $zX(z) - zX(0) = A^*X(z) + B^*U(z)$. Отсюда $X(z) = (zI - A^*)^{-1}zX(0) + (zI - A^*)^{-1}B^*u(z)$. Подвергая обратному Z- преобразованию, имеем $X(n) = Z^{-1}\{(zI - A^*)^{-1}z\}X(0) + Z^{-1}\{(zI - A^*)^{-1}B^*u(z)\}$. Покажем, что обратное Z – преобразование от $(zI - A^*)^{-1}$ есть дискретная переходная матрица состояния A(kT).

Z – преобразование A(kT) определяется общей формулой Z –преобразования $A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A(kT) z^{-k}$. Умножим обе части последнего уравнения на $A^* z^{-1}$ и вычтем ре-

зультат из последнего уравнения. Получим $(I - A^*z^{-1})A(z) = I$, откуда $A(z) = (I - A^*z^{-1})^{-1} = (zI - A^*)^{-1}z$.

Вычисляя обратное Z – преобразование, получим $A(kT) = Z^1\{(zI-A)^{-1}z\}$. Это выражение и является основой способа определения переходной матрицы состояния, основанного на Z – преобразовании.

Второе слагаемое в выражении для X(n) вычисляем с помощью теоремы свертки и выражение для A(kT);

$$Z^{1}\{(zI - A^{*})^{-1}B^{*}U(z)\} = \sum_{i=0}^{k-1} A[(k-i-1)T]B(T)u(iT).$$

Полное переходное уравнение состояния

$$X(n) = A(n)X(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A(n-i-1)BTu(i).$$

Переходной характеристикой полностью дискретной системы называется реакция дискретной системы на единичную дискретную ступенчатую функцию.

Графическое представление входного сигнала и математическое описание дискретной ступенчатой функции имеет вид:

 $g_{\mu}^{*}(n) = 1, n \ge 0; g_{\mu}^{*}(n) = 0, n < 0.$

Z – преобразование дискретного входного сигнала $G_{\mu}(z) = \frac{z}{z-1}$.

Z – преобразование переходной характеристики $H(z) = D(z)G_{\mu}(z) = \frac{z}{z-1}D(z)$, где

D(z) – дискретная передаточная функция дискретной системы. Таким образом, $h(n) = Z^{-1} \{D(z)\}.$



5.6. Частотные характеристики

Построение ЛАФЧХ дискретных систем и отдельных звеньев имеет свои характерные особенности. Они следуют из того факта, что выражения модуля и фазы КПФ дискретной системы являются функциями $e^{j\omega T}$ и не логарифмируются непосредственно. Кроме того, диапазон частот дискретных характеристик $0 \le \omega \le \pi/T$ не распространяется на всю ось абсцисс ЛАФЧХ непрерывных систем. Чтобы сделать выражения модуля и фазы логарифмируемыми и привести диапазон частот к подобному диапазону ЛАФЧХ непрерывных систем предварительно выполняется преобразование выражения ПФ дискретной системы с помощью подстановки $z = \frac{1+w}{1-w}$. Эта подстановка называется *w*-преобразованием. Чтобы выяснить, как новая переменная *w* связана с обычной частотой ω , используем связь $z = e^{i\omega T}$. Из формулы *w*-преобразования определяем

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}$$

Используя формулу Эйлера $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$, имеем

$$w = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1} = \frac{(\cos \omega T + j \sin \omega T - 1)(\cos \omega T - j \sin \omega T + 1)}{(\cos \omega T + 1)^2 + \sin^2 \omega T} =$$
$$= \frac{\cos^2 \omega T + j \sin \omega T \cos \omega T - \cos \omega T - j \sin \omega T \cos \omega T + \sin^2 \omega T + j \sin \omega T + 1}{\cos^2 \omega T + 2 \cos \omega T + 1 + \sin^2 \omega T} =$$
$$+ \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos^2 \omega T + 2 \cos \omega T + 1 + \sin^2 \omega T} = \frac{2j \sin \omega T}{2(\cos \omega T + 1)} = j t g \frac{\omega T}{2}.$$

Окончательно имеем $w = jtg \frac{\omega T}{2} = j\overline{\lambda}$, где $\overline{\lambda} = tg \frac{\omega T}{2}$ так называемая относительная псевдочастота. Нетрудно заметить, что при $0 \le \omega \le \pi/T$ относительная псевдочастота будет меняться в диапазоне $0 \le \overline{\lambda} \le \infty$, т. е. Частотные характеристики дискретных систем, построенные в функции $\overline{\lambda}$, будут подобны характеристикам непрерывных систем. На практике частотные характеристики дискретных систем строятся в функции не относительной, а абсолютной псевдочастоты $\lambda = (2/T)\overline{\lambda}$. Дело в том, что при малых ω (область низких частот) имеем

$$\overline{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$$
, a $\lambda = \frac{2}{T} \overline{\lambda} \approx \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = \omega$.

Это значит, что характеристики дискретных систем в области низких частот будут совпадать с характеристиками приведенной непрерывной части.

Посмотрим, как строятся ЛАФЧХ дискретных рассмотренных выше динамических звеньев: интегрирующего и апериодического 1-го порядка.

В ПФ дискретного интегратора
$$W(z) = \frac{kT}{z-1}$$
 вводим подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$:
 $W(w) = \frac{kT}{\frac{1+w}{1-w}-1} = \frac{kT}{2}\frac{1-w}{w}.$

Далее принимаем $w = j(T/2)\lambda$ и получаем

$$W(j\lambda) = \frac{kT}{2} \frac{1 - jT/2\lambda}{jT/2\lambda} = k \frac{1 - jT/2\lambda}{j\lambda}.$$

Выражение ЛАЧХ

$$L(\lambda) = 20 \lg \left| k \frac{1 - j^T / \lambda}{j\lambda} \right| = 20 \lg k - 20 \lg \lambda + 20 \lg \sqrt{1 + \frac{T^2 \lambda^2}{4}}.$$

Выражение ЛФЧХ

$$\varphi(\lambda) = -\arctan(T/2)\lambda - \pi/2.$$

Графики ЛАФЧХ интегрирующего звена показаны на рис. 5.10.



Рис. 5.10

Из графиков видно, что в области низких частот ЛАФЧХ дискретного интегратора совпадают с ЛАФЧХ непрерывного интегрирующего звена (наклоном -20 дБ/дек, фазовый сдвиг $\varphi = -\pi/2$. Существенное отличие характеристик имеет место в области высоких частот (нулевой наклон и фазовый сдвиг $\varphi = -\pi$).

Перейдем к апериодическому звену 1-го порядка. Эквивалентная схема дискретного апериодического звена имеет вид (рис. 5.11).

$$W_a(z) = k \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} \right) = k \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-T/T_1}} \right) = k \frac{1 - e^{-T/T_1}}{z-e^{-T/T_1}}.$$

Переходим к *w*-преобразованию $W_a(z)$:

$$W_{a}(w) = k \frac{(1 - e^{-T/T_{1}})}{\frac{1 + w}{1 - w} - e^{-T/T_{1}}} = k \frac{(1 - e^{-T/T_{1}})(1 - w)}{(1 - e^{-T/T_{1}}) + w(1 + e^{-T/T_{1}})} = k \frac{1 - w}{1 + cw},$$

где $c = \frac{1 + e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} = \operatorname{cth} \frac{T}{2T_1}$. Подставим $w = j(T/2)\lambda$ в выражение $W_a(w)$:

$$W_a(j\lambda) = k \frac{1 - jT/2\lambda}{1 + cjT/2\lambda}$$

Можно доказать, что $\lim_{T\to 0} \frac{cT}{2} = T_1$. Поэтому $W_a(j\lambda) \cong k \frac{1-jT/2\lambda}{1+T_1\lambda}$.

Переходя к ЛАФЧХ, получим

$$L_a(\lambda) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T_1^2 \lambda^2} + 20 \lg \sqrt{1 + \frac{T^2 \lambda^2}{4}},$$

$$\varphi_a(\lambda) = -\arctan(T/2)\lambda - \arctan T_1\lambda.$$

Графики $L_a(\lambda)$ и $\phi_a(\lambda)$ показаны на рис. 5.12.



Как и для интегрирующего звена, так и для апериодического звена 1-го порядка наблюдается совпадение ЛАФЧХ в области низких частот и существенное

различие в области высоких частот для непрерывного и дискретного режимов работы.

Аналогично описанному выше строятся ЛАФЧХ других дискретных звеньев и систем. Свойство совпадения ЛАФЧХ в области низких частот сохраняет свою силу и для других более сложных звеньев и систем, что позволяет использовать для дискретных систем методы анализа и синтеза, разработанные для непрерывных систем.

Отметим, что для сложной передаточной функции непрерывной части дискретно-непрерывной системы построение ЛАФЧХ может быть выполнено приближенным способом, допускающим полное совпадение характеристик непрерывной и дискретной системы в области низких частот $0 \le \lambda < 2/T$.

5.7. Устойчивость систем

Для устойчивости замкнутой дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в диапазоне $0 \le \omega \le \pi/T$ годограф характеристического полинома обошел в положительном направлении 2n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль и не пересекаясь сам с собой.





Годографы устойчивых дискретных систем второго и четвертого порядка показаны на рис. 5.13.

Как и отмечалось ранее, крайние точки годографов $D(e^{j 0})$ и $D(e^{j \pi})$ являются

вещественными и находятся на вещественной оси.



В качестве примера построим годограф для дискретного интегрирующего звена в системе с отрицательной обратной связью (рис. 5.14).

Рис. 5.14

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s}\frac{k}{s}\right\} = k(1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = k\frac{z - 1}{z}\frac{Tz}{(z - 1)^2} = \frac{kT}{z - 1}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} = \frac{kT}{z-1+kT}$$

Характеристический полином замкнутой системы

 $D(z) = z + kT - 1 = a_0 z + a_1,$ где $a_0 = 1$; $a_1 = kT - 1$. Полагаем $z = e^{j\omega T}$ при $0 \le \omega \le \pi/T$. $D(e^{j\omega T}) = a_0 e^{j\omega T} + a_1$. График $D(e^{j\omega T})$ показан на рис. 5.15. Он представляет собой полуокружность радиуса $a_0 = 1$ и с центром в точке $a_1 = kT - 1$.



5.8. Анализ качества

Перейдем к <u>дискретно-непрерывной системе</u> и покажем, как определяются коэффициенты ошибок на примере типовой одноконтурной системы с одним дискретным элементом. Как и для непрерывной системы рассмотрим установившиеся ошибки при отработке трех типовых воздействий: $g(t) = g_0 1(t), g(t) = g_0 t l(t), g(t) = g_0 t$

1. <u>Внешнее воздействие $g(t) = g_0 1(t)$.</u> Его Z-изображение $G(z) = g_0 \frac{z}{z-1}$.

Z-изображение ошибки
$$E(z) = g_0 \frac{z}{z-1} \frac{1}{1+W_1 W_2(z)}$$

Установившееся значение ошибки

$$e(n) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} g_0 \frac{z}{z-1} \frac{1}{1+W_1 W_2(z)} \frac{g_0}{1+\lim_{z \to 1} W_1 W_2(z)}$$

Пусть $\lim_{z \to 1} W_1 W_2(z) = k$ - общий коэффициент передачи разомкнутой системы.

Тогда $e(n) = \frac{g_0}{1+k} = C_0 g_0; \quad C_0 = \frac{1}{1+k}.$

 C_0 – коэффициент ошибки по положению. Он определяется таким же, как и для непрерывной системы, выражением. Из выражения для ошибки видно, что чтобы $C(\infty) = 0$, коэффициент передачи должен быть бесконечным. Это будет иметь место, если $W_1W_2(z)$ содержат хотя бы один полюс z = 1. Например, в составе

 $W_1 W_2(z)$ имеется передаточная функция дискретного интегратора $W(z) = \frac{kT}{z-1}$. Тогда $\lim_{z \to 1} W_1 W_2(z) = \infty$.

2. <u>Внешнее воздействие</u> $g(t) = g_0 t l(t), \ G(z) = \frac{g_0 T z}{(z-1)^2}$.

Изображение ошибки

$$E(z) = G(z)\Phi_{eg}(z) = g_0 \frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + W_1 W_2(z)}$$

Установившиеся значение ошибки

$$\begin{split} e(n) &= \lim_{x \to 1} \frac{z - 1}{z} E(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z} g_0 \frac{Tz}{(z - 1)^2} \frac{1}{1 + W_1 W_2(z)} = \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{g_0 T}{(z - 1)[1 + W_1 W_2(z)]} = \frac{g_0}{\lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{T} W_1 W_2(z)} = \frac{g_0}{\frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z - 1) W_1 W_2(z)}. \end{split}$$

Определим коэффициент ошибки по скорости как

$$C_{1} = \frac{1}{\frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z - 1)W_{1}W_{2}(z)} = \frac{1}{k_{v}}, \quad C_{1} = \frac{1}{k_{v}},$$

где $k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z-1) W_1 W_2(z)$ – добротность системы по скорости. Для системы астатической 1-го порядка, передаточная функция которой содержит один полюс $z = 1, k_v = k/T$. Для того чтобы установившееся значение ошибки было равно нулю, необходимо, чтобы $C_1 = 0$, т. е. $k_v = \infty$. Это возможно, если $W_1 W_2(z)$ имеет два полюса z = 1.

3. Внешнее воздействие
$$g(t) = g_0 t^2 l(t), \ G(z) = g_0 \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}.$$

Изображение ошибки $E(z) = g_0 \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \frac{1}{1 + W_1 W_2(z)}$.

Установившееся значение ошибки

$$e(n) = \lim_{n \to \infty} \frac{z - 1}{z} E(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z} g_0 \frac{T^2 z(z + 1)}{2(z - 1)^3} \frac{1}{1 + W_1 W_2(z)} =$$
$$= \frac{T^2}{2} g_0 \lim_{z \to 1} \frac{z + 1}{(z - 1)^2} \frac{1}{1 + W_1 W_2(z)} = \frac{g_0 T^2}{\lim_{z \to 1} (z - 1)^2 W_1 W_2(z)} =$$

$$=\frac{g_0}{\lim_{z\to 1}\frac{1}{T^2}(z-1)^2W_1W_2(z)}=\frac{g_0}{k_a}=C_2g_0; \quad C_2=\frac{1}{k_a},$$

где $k_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} (z-1)^2 W_1 W_2(z)$ – добротность системы по ускорению.

Из выражения $e(n) = g_0 \frac{1}{k_a}$ видно, что установившаяся ошибка будет равна ну $n \to \infty$

лю, если $k_a = \infty$, т. е. $W_1 W_2(z)$ иметь три полюса z = 1.

<u>Замечание</u>. Полученные выражения C_1 и C_2 справедливы только тогда, когда внешние сигналы g(t) представляют собой скачки скорости и ускорения соответственно.

Вопросы для самопроверки

- 1. Сформулируйте определение дискретных систем. Какова структура и классификация импульсных систем?
- 2. Расскажите о математическом аппарате исследования импульсных систем.
- 3. Сформулируйте теорему Котельникова-Шеннона. Поясните ее физический смысл и практическое значение при проектировании дискретных систем.
- 4. Поясните методы определения передаточных функций импульсных систем. Каковы особенности передаточных функций статических и астатических систем?
- 5. Каким образом определяются частотные характеристики импульсных систем?
- 6. Какими способами определяются переходные процессы в дискретных системах?
- 7. Сформулируйте условия устойчивости импульсных систем.
- 8. Каким образом оценивается точность работы импульсных систем?
- Каков порядок синтеза цифровых систем? Перечислите методы определения передаточных функций корректирующих устройств. Укажите виды структурных схем цифровых фильтров.
- 10. Запишите стандартную форму уравнений в пространстве состояний. Поясните физический смысл уравнений.

Раздел 6. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ



6.1. Основные понятия и определения

Изучаемые вопросы:

- Основные понятия и определения;
- Методы линеаризации;
- Исследования нелинейных систем



Строго говоря, линейных систем в природе не существует, так как характеристики реальных устройств нелинейные и некоторые из них не могут быть линеаризованы, например, характеристика логического элемента. Кроме того, есть системы, например, релейные, адаптивные, в которых принципиально необходимо учитывать нелинейности.

Нелинейной системой называется такая система, в состав которой входит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Такое звено называется нелинейным звеном или нелинейным элементом.

Уравнение является нелинейным, если некоторые координаты или их производные по времени входят в уравнение в виде произведений или степени, отличной от первой, а также если коэффициенты уравнения являются функциями некоторых координат или их производных.

При составлении дифференциальных уравнений нелинейных систем сначала составляют дифференциальные уравнения для каждого устройства системы. При этом характеристики устройств, допускающих линеаризацию, линеаризуются. В результате получают систему дифференциальных уравнений, в которой одно или несколько уравнений нелинейные. Устройства, допускающие линеаризацию, образуют линейную часть системы, а устройства, которые не могут быть линеаризованы, составляют нелинейную часть.

Путем эквивалентного преобразования структурных схем и нелинейных звеньев большое число нелинейных систем можно представить в виде замкнутого контура с последовательным включением нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ), как показано на рис. 6.1.



Рис. 6.1

На рисунке 6.1 приняты следующие обозначения: НЭ - нелинейный элемент; ЛЧ - линейная часть.

Классификация нелинейных элементов и систем. Нелинейные звенья классифицируются по различным признакам. Наибольшее распространение получила классификация по статическим и динамическим характеристикам, так как в системах чаще всего нелинейности приходится учитывать в виде характеристик. Эти характеристики могут быть как однозначными, так и двузначными (петлевыми), симметричными и несимметричными относительно начала координат.

Различают следующие основные типы нелинейных звеньев.

Нелинейные звенья с гладкими криволинейными характеристиками. Примеры таких характеристик приведены на рис. 6.2.



Рис. 6.2

На рис. 6.2, а изображена двузначная гистерезисная (запаздывающая) характеристика. Характеристика (рис. 6.2, б) отображает насыщение или ограничение и соответствует реальному амплитудному усилителю, а характеристика (рис. 6.2, в) - реальному усилителю мощности. Характеристики (рис. 6.2, а и б) –нечетносимметричные, а характеристика (рис. 6.2, в) – четно-симметричная.

Нелинейные звенья с кусочно-линейными характеристиками. Некоторые из таких характеристик представлены на рис. 6.3.



Рис. 6.3

Характеристика (рис. 6.3, а) отображает насыщение, характеристика (рис. 6.3, б) – зону нечувствительности, а характеристика (рис. 6.3, в) соответствует звену, обладающему одновременно зоной нечувствительности и насыщением. Характеристика (рис. 6.3, г) позволяет учесть люфт или зазор кинематической передачи.

Релейные звенья – это элементы, которые на своем выходе выдают конечное число фиксированных значений. Три наиболее типовые релейные характеристики изображены на рис. 6.4.



Рис. 6.4. Релейные характеристики:

Характеристика (рис. 6.4, а) соответствует идеальному двухпозиционному реле, характеристика (рис. 6.4, б) – трехпозиционному реле с зоной нечувствительности, а характеристика (рис. 6.4, в) – двухпозиционному поляризованному реле.

Кроме того, на рис. 6.4 показано прохождение непрерывного сигнала через соответствующие типы реле. Откуда следует, что коэффициент передачи реле зависит от величины входного воздействия.

Для улучшения динамических свойств систем специально созданы нелинейные звенья с опережающими двузначными статическими характеристиками.

Часто встречаются элементы с несимметричными относительно начала координат статическими характеристиками.

Нелинейные вычислительные звенья, например, множительное, логическое звено и другие.

Различают статические и динамические нелинейности. Первые представляются в виде нелинейных статических характеристик, а вторые - в виде нелинейных дифференциальных уравнений.

Нелинейные системы обычно классифицируются в соответствии с видом входящих в них нелинейных звеньев.

Особенности нелинейных систем. Поведение нелинейных систем, при наличии существенных нелинейностей, значительно отличается от поведения их линейных моделей.

1. Выходная величина нелинейной системы непропорциональна входному воздействию; форма реакции системы зависит от величины входного воздействия.

2. Характер процессов в нелинейной системе зависит от величины начального отклонения, вызванного возмущением. В связи с этим для нелинейных систем существуют понятия об устойчивости "в малом", "в большом", "в целом".

Система устойчива "в малом", если она устойчива при малых (бесконечно малых) начальных отклонениях. Система устойчива "в большом", если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях. Система устойчива "в целом", если она устойчива при любых больших (неограниченных по величине) начальных отклонениях.

3. Для нелинейных систем характерен режим незатухающих периодических колебаний с постоянной амплитудой и частотой (автоколебаний), возникающий в системах при отсутствии периодических внешних воздействий.

4. При затухающих колебаниях переходного процесса в нелинейных системах происходит изменение периода колебаний.

Основные задачи исследования нелинейных систем. Методы исследования. Задачами исследования нелинейных систем являются:

1) отыскание возможных состояний равновесия системы и исследование их устойчивости;

2) определение автоколебаний и анализ их устойчивости;

3) исследование процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях.

Начало исследования нелинейных систем обычно связано с рассмотрением устойчивости и определением автоколебаний.

В настоящее время не создано общей теории анализа нелинейных систем. Разработанные методы позволяют решать лишь отдельные нелинейные задачи.

Все инженерные методы исследования нелинейных систем разделяются на две основные группы.

Точные методы, например, метод А.М.Ляпунова, метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, частотный метод В.М.Попова, основаны на точном решении нелинейного дифференциального уравнения, может быть и упрощенного.

Приближенные методы, такие как метод гармонической линеаризации, метод статистической линеаризации, основаны на линеаризации нелинейного уравнения системы.

Мощным и эффективным методом исследования нелинейных систем является моделирование, инструментарием которого служит компьютер. В настоящее время многие сложные для аналитического решения теоретические и практические вопросы сравнительно легко могут быть решены с помощью вычислительной техники.

6.2. Прямой метод Ляпунова

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости нелинейных систем могут быть получены по методу А.М. Ляпунова.

При использовании прямого метода Ляпунова, именуемого также второй методой Ляпунова, исследуемая система описывается дифференциальными уравнениями в форме уравнений первого порядка, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных x_i (i = 1, 2, ..., n) от их значений в установившемся процессе при новых постоянных значениях возмущающего $f = f_0$ и задающего $g = g_0$ воздействий. Следовательно, эти уравнения для нелинейной системы n-го порядка будут:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \text{при } i = 1, 2, ..., n,$$
(6.1)

где F_i - нелинейные функции произвольного вида, удовлетворяющие условию

 $F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0 \quad \Pi p \mu \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \tag{6.2}$

так как в установившемся состоянии все отклонения и их производные равны нулю.

Чтобы исследовать устойчивость по Ляпунову, необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию V и вычислить производную по времени от этой функции.

Функция V называется знакоопределенной в некоторой области, если она во всех точках этой области в окрестности начала координат сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме начала координат.

Функция V называется знакопостоянной, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция V называется знакопеременной, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Функция Ляпунова и ее производная по времени. Любая функция

$$V = V(x_1, x_2, ..., x_n),$$
(6.3)

тождественно обращающаяся в нуль при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, называется функцией Ляпунова, если в ней в качестве $x_1, x_2, ..., x_n$ взяты переменные, в которых записаны уравнения (6.1) для этой системы.

Производная от функции Ляпунова (6.3) по времени будет

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{V}}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\,\mathrm{V}}{\partial\,\mathrm{x}_{i}} \times \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{x}_{i}}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}}.$$
(6.4)

Подставив значения $\frac{dx_i}{dt}$ (i = 1, 2, ..., n) из уравнений системы (2.1), получим

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$
(6.5)

Следовательно, производная от функции Ляпунова по времени, так же как и сама V, является функцией координат системы

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, ..., x_n),$$
(6.6)

причем согласно свойству (6.2) эта функция W, так же как и сама V, тождественно обращается в нуль при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Поэтому к ней в одинаковой степени можно применять те же понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности в некоторой области вокруг начала координат.

Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем: если при заданных в форме (6.1) уравнениях системы *n*-го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова V($x_1, x_2, ..., x_n$), чтобы ее производная по времени W($x_1, x_2, ..., x_n$), тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V, то данная система устойчива; при знакоопределенной функции W будет иметь место асимптотическая устойчивость.

Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем: если при заданных в форме (6.1) уравнениях системы n-го порядка производная по времени $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ от какой-нибудь функции Ляпунова $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ окажется знакоопределенной, причем сама функция V в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной W, то данная система неустойчива.

Замечания к теореме Ляпунова об устойчивости.

1. При заданных в форме (6.1) уравнениях системы выбор функции V неоднозначен, поэтому данная теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т.е. при выполнении условий теоремы система наверняка будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам. 2. Понятие устойчивости по Ляпунову допускает, что при знакоопределенной функции V производная от нее по времени W была не обязательно знакоопределенной или знакопостоянной, а могла быть и тождественно равна нулю. В результате система хотя и не будет асимптотически приближаться к установившемуся состоянию, но все же будет все время в достаточной близости от него.

Нелинейная система (рис. 6.1) с одним нелинейным элементом с однозначной статической характеристикой

$$y_{H} = F(\sigma)$$

в свободном состоянии может быть представлена в виде замкнутого контура, включающего в себя линейную часть (ЛЧ) и нелинейный элемент (НЭ) (рис. 6.5).



Рис. 6.5

При этом уравнения свободного движения системы (g = 0) будут

$$\begin{cases} \frac{dx_{i}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j} + b_{i} y_{H} & \pi p \mu \ i = 1, 2, ..., n; \\ y_{H} = F(\sigma), \end{cases}$$
(6.7)

ГДе $\sigma = \sum_{k=1}^{n} c_{k} x_{k};$

 a_{ij}, b_i, c_k - постоянные коэффициенты.

Тогда задача исследования нелинейной системы (6.7) по Ляпунову сводится к определению функции V и ее производной

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i F(\sigma) \right].$$
(6.8)

А.И.Лурье предложил функцию Ляпунова выбирать в виде суммы функции квадратичной формы L(x) и интеграла от нелинейной функции F(σ) рассматриваемой системы

$$V = L(x) + \int_{0}^{\sigma} F(\sigma) d\sigma, \qquad (6.9)$$

ГДе $L(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$.

Нелинейная система называется абсолютно устойчивой, если она устойчива при любых начальных отклонениях и любой форме нелинейной характеристики, удовлетворяющей условиям:

$$0 \le \frac{\mathcal{F}(\sigma)}{\sigma} \le \mathbf{k}; \ \mathcal{F}(0) = 0, \tag{6.10}$$

где k - заданное число.

6.3. Частотный метод В.М. Попова

Частотный метод В.М. Попова решает задачу об абсолютной устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью, заданной предельным значением коэффициента передачи k нелинейного элемента.

Если в системе управления (рис. 6.5) имеется лишь одна однозначная нелинейность

$$y_{\rm H} = F(x),$$
 (6.11)

то, объединив вместе все остальные звенья системы в линейную часть, можно получить ее передаточную функцию $W_{\pi y}(s)$.

Нелинейность $y_{H} = F(x)$ имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла *arctg k* (рис. 6.6), т.е. при любом х



Рис. 6.6

На рисунке 6.6, а показан нелинейный элемент; на рисунке 6.6, б - статические характеристики.

Теорема В.М. Попова: для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число q, при котором для всех частот $\omega \ge 0$

$$\operatorname{Re}[(1+j\omega q)W_{\Pi \Psi}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \qquad (6.13)$$

где k - предельное значение коэффициента передачи нелинейного элемента;

 $W_{\pi 4}(j\omega)$ - амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

Все полюсы передаточной функции линейной части системы должны быть с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых. При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

Im $W_{\Pi \Psi}(j\omega) \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow 0$,

а при двух нулевых полюсах

Re $W_{\Pi \Psi}(j\omega) \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow 0$, а Im $W_{\Pi \Psi}(j\omega) < 0$ при малых ω .

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением видоизмененной частотной характеристики линейной части системы W*(jw), которая определяется следующим образом:

$$\begin{cases} U^{*}(j\omega) = \operatorname{Re} \ W^{*}(j\omega) = \operatorname{Re} \ W_{\Pi^{q}}(j\omega), \\ V^{*}(j\omega) = \operatorname{Im} \ W^{*}(j\omega) = \omega T_{0}\operatorname{Im} \ W_{\Pi^{q}}(j\omega), \end{cases}$$
(6.14)

где $T_0 = 1$ с - нормирующий множитель.

Преобразовав левую часть неравенства (6.13)

$$\operatorname{Re}[(1+j\omega q)W_{\Pi \Psi}(j\omega)] + \frac{1}{k} = \operatorname{Re} W_{\Pi \Psi}(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} W_{\Pi \Psi}(j\omega)] + \frac{1}{k}$$

и использовав соотношения (6.14), получим вместо (6.13) для теоремы В.М. Попова условие

$$\mathbf{U}^{*}(\omega) - \frac{q}{T_{0}} \mathbf{V}^{*}(\omega) + \frac{1}{k} > 0$$
 (6.15)

при всех $\omega \ge 0$.

Очевидно, что равенство

$$\mathbf{U}^{*}(\omega) - \frac{q}{T_{0}} \mathbf{V}^{*}(\omega) + \frac{1}{k} = 0$$
 (6.16)

представляет собой уравнение прямой на плоскости W^{*}(jω). Эта прямая, называемая прямой Попова, проходит через точку с координатами [-1/k, j0] и имеет угловой коэффициент наклона к оси абсцисс 1/q.

Отсюда вытекает графическая интерпретация теоремы В.М.Попова: для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на комплексной плоскости $W^*(j\omega)$, проходящую через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$, чтобы вся кривая $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой.

Условия выполнения теоремы показаны на рис. 6.7.



Рис. 6.7

На рис. 6.7, а приведен случай абсолютной устойчивости нелинейной системы при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (6.12), а рис. 6.7, б соответствует случаю невыполнения теоремы, т.е. нелинейная система не имеет абсолютной устойчивости.

Таким образом, для определения абсолютной устойчивости нелинейной системы по методу В.М. Попова необходимо построить видоизмененную частотную характеристику линейной части системы $W^*(j\omega)$, определить предельное значение коэффициента передачи k нелинейного элемента из условия $0 \le \frac{F(x)}{x} \le k$ и че-

рез точку ($-\frac{1}{k}$) на вещественной оси комплексной плоскости провести некоторую прямую так, чтобы характеристика W^{*}(j ω) лежала справа от этой прямой. Если такую прямую провести нельзя, то это значит, что абсолютная устойчивость для данной системы невозможна. Величина q, связанная с угловым коэффициентом, при этом определяется из условия (6.15) так, чтобы при известных параметрах системы неравенство соблюдалось для всех частот. Очертание нелинейности может быть неизвестным. Необходимо знать лишь, в пределах какого угла *arctg k* (рис. 6.6, б) она расположена. Для конкретно заданных форм нелинейности область устойчивости будет несколько шире, но данным методом это не определяется.

Дополнение: неравенство (6.13) является так же достаточным условием абсолютной устойчивости нелинейной системы и при $k \to \infty$.

6.4. Метод гармонической линеаризации

Идея метода гармонической линеаризации принадлежит Н.М. Крылову и Н.Н. Боголюбову и базируется на замене нелинейного элемента системы линейным звеном, параметры которого определяются при гармоническом входном воздействии из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена. Данный метод может быть использован в том случае, когда линейная часть системы является низкочастотным фильтром, т.е. отфильтровывает все возникающие на выходе нелинейного элемента гармонические составляющие, кроме первой гармоники.

Коэффициенты гармонической линеаризации и эквивалентные комплексные коэффициенты передачи нелинейных элементов. В нелинейной системе (рис. 6.1) параметры линейной части и нелинейного элемента выбирают таким образом, чтобы существовали симметричные периодические колебания с частотой ω .

В основе метода гармонической линеаризации нелинейностей (рис. 6.10), описываемых уравнением

$$y_{\rm H} = F(x),$$
 (6.17)

лежит предположение, что на вход нелинейного элемента подается гармоническое воздействие с частотой ω и амплитудой *a*, т.е.

$$x = a \sin \psi$$
, где $\psi = \omega t$, (6.18)

а из всего спектра выходного сигнала выделяется только первая гармоника

$$y_{H1} = a_{H1} \sin(\psi + \psi_{H1}),$$
 (6.19)

где $a_{\rm H1}$ - амплитуда а $\psi_{\rm H1}$ - фазовый сдвиг;

при этом высшие гармоники отбрасываются и устанавливается связь между первой гармоникой выходного сигнала и входным гармоническим воздействием нелинейного элемента.



Рис. 6.8

В случае нечувствительности нелинейной системы к высшим гармоникам нелинейный элемент может быть в первом приближении заменен некоторым элементом с эквивалентным коэффициентом передачи, который определяет первую гармонику периодических колебаний на выходе в зависимости от частоты и амплитуды синусоидальных колебаний на входе. Для нелинейных элементов с характеристикой (6.17) в результате разложения периодической функции F(x) в ряд Фурье при синусоидальных колебаниях на входе (6.18) получим выражение для первой гармоники сигнала на выходе

$$y_{H1} = b_{1F} \sin \psi + a_{1F} \cos \psi,$$
 (6.20)

где b_{1F}, a_{1F} - коэффициенты разложения в ряд Фурье, определяющие амплитуды соответственно синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники, которые определяются по формулам:

$$b_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad a_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi,$$

Так как

 $px = a\omega \cos \psi$, где p = d/dt,

то связь между первой гармоникой периодических колебаний на выходе нелинейного элемента и синусоидальными колебаниями на его входе можно записать в виде

$$y_{H1} = [q + q' \frac{p}{\omega}] x,$$
 (6.21)

где $q = b_{1F}/a$, $q' = a_{1F}/a$.

Последнее уравнение называется уравнением гармонической линеаризации, а коэффициенты q и q' - коэффициентами гармонической линеаризации.

Таким образом, нелинейный элемент при воздействии гармонического сигнала с точностью до высших гармоник описывается уравнением (6.21), которое является линейным. Это уравнение нелинейного элемента отличается от уравнения линейного звена тем, что его коэффициенты q и q' изменяются при изменении амплитуды a и частоты ω колебаний на входе. Именно в этом заключается принципиальное отличие гармонической линеаризации от обычной, коэффициенты которой не зависят от входного сигнала, а определяются только видом характеристики нелинейного элемента.

Для различных видов нелинейных характеристик коэффициенты гармонической линеаризации сведены в таблицу. В общем случае коэффициенты гармонической линеаризации $q(a, \omega)$ и $q'(a, \omega)$ зависят от амплитуды *a* и частоты ω колебаний на входе нелинейного элемента. Однако, для статических нелинейностей эти коэффициенты q(a) и q'(a) являются функцией только амплитуды *a* входного гармонического сигнала, а для статических однозначных нелинейностей коэффициент q'(a) = 0. Подвергнув уравнение (6.21) преобразованию по Лапласу при нулевых начальных условиях с последующей заменой оператора s на $j\omega$ (s = $j\omega$), получим эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента

$$W_{\mathfrak{I}}(j\omega, a) = q + jq' = A_{\mathfrak{I}}(\omega, a) e^{j\psi\mathfrak{I}(\omega, a)}, \qquad (6.22)$$

где модуль и аргумент эквивалентного комплексного коэффициента передачи связаны с коэффициентами гармонической линеаризации выражениями

 $A_{\mathfrak{H}}(\omega, a) = \mod W_{\mathfrak{H}}(j\omega, a) = \sqrt{[q(a, \omega)]^2 + [q'(a, \omega)]^2};$

 $\psi_{\mathfrak{I}}(\omega, a) = \arg W_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{I}\omega, A) = \operatorname{arctg}[\mathfrak{q}'(a, \omega)/\mathfrak{q}(a, \omega)].$

Эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента позволяет определить амплитуду и фазовый сдвиг первой гармоники (6.19) на выходе нелинейного элемента при гармоническом воздействии (6.18) на его входе, т.е.

$$a_{\text{H1}} = a \times A_{\mathcal{H}}(\omega, a); \quad \psi_{\text{H1}} = \psi_{\mathcal{H}}(\omega, a).$$

Исследование симметричных периодических режимов в нелинейных системах. При исследовании нелинейных систем на основе метода гармонической линеаризации в первую очередь решают вопрос о существовании и устойчивости периодических режимов. Если периодический режим устойчив, то в системе существуют автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой a_0 .

Рассмотрим нелинейную систему (рис. 6.5), включающую в себя линейную часть с передаточной функцией

$$W_{\Pi^{q}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$
(6.23)

и нелинейный элемент с эквивалентным комплексным коэффициентом передачи

$$W_{\mathfrak{H}}(j\omega, a) = q(\omega, a) + jq'(\omega, a) = A_{\mathfrak{H}}(\omega, a) e^{j\psi\mathfrak{H}(\omega, a)}.$$
(6.24)

Принимая во внимание выражение (6.21), можно записать уравнение нелинейной системы

$$\{A(p) + B(p) \times [q(\omega, a) + q'(\omega, a)\frac{p}{\omega}]\} x = 0.$$
(6.25)

Если в замкнутой нелинейной системе возникают автоколебания

$$\mathbf{x} = a_0 \sin \omega_0 \mathbf{t}$$

с постоянной амплитудой и частотой, то коэффициенты гармонической линеаризации оказываются постоянными, а вся система стационарной. Для оценки возможности возникновения автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации необходимо найти условия границы устойчивости, как это делалась при анализе устойчивости линейных систем. Периодическое решение существует, если при $a = a_0$ и $\omega = \omega_0$ характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$A(p) + B(p) \times [q(\omega, a) + q'(\omega, a)\frac{p}{\omega}] = 0$$
(6.26)

имеет пару мнимых корней $\lambda_i = j\omega_0$ и $\lambda_{i+1} = -j\omega_0$. Устойчивость решения необходимо оценить дополнительно.

В зависимости от методов решения характеристического уравнения различают методы исследования нелинейных систем.

Аналитический метод. Для оценки возможности возникновения в нелинейной системе автоколебаний в гармонически линеаризованный характеристический полином системы вместо р подставляют j@

$$D(j\omega, a) = A(j\omega) + B(j\omega) \times [q(\omega, a) + jq'(\omega, a)].$$
(6.27)

В результате получают уравнение $D(j\omega, a) = 0$, коэффициенты которого зависят от амплитуды и частоты предполагаемого автоколебательного режима. Выделив вещественную и мнимую части

Re D(j
$$\omega$$
, a) = X(ω , a);
Im D(j ω , a) = Y(ω , a),

получим уравнение

$$X(\omega, a) + jY(\omega, a) = 0.$$
 (6.28)

Если при действительных значениях a_0 и ω_0 выражение (6.28) удовлетворяется, то в системе возможен автоколебательный режим, параметры которого рассчитываются по следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} X(\omega_0, a_0) = 0; \\ Y(\omega_0, a_0) = 0. \end{cases}$$
(6.29)

Из выражений (6.29) можно найти зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы, например, от коэффициента передачи k линейной части системы. Для этого необходимо в уравнениях (6.29) коэффициент передачи k считать переменной величиной, т.е. эти уравнения записать в виде:

$$\begin{cases} X(\omega_0, a_0, k) = 0; \\ Y(\omega_0, a_0, k) = 0. \end{cases}$$
(6.30)

По графикам $a_0 = f(k)$, $\omega_0 = f(k)$ можно выбрать коэффициент передачи k, при котором амплитуда и частота возможных автоколебаний имеет допустимые значения или вообще отсутствует.

Частотный метод. В соответствии с критерием устойчивости Найквиста незатухающие колебания в линейной системе возникают в том случае, когда амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку с координатами [–1, j0]. Данное условие является также условием существования автоколебаний в гармонически линеаризованный нелинейной системе, т.е.

$$W_{\rm H}(j\omega, a) = -1.$$
 (6.31)

Так как линейная и нелинейная части системы соединены последовательно, то частотная характеристика разомкнутой нелинейной системы имеет вид

$$W_{H}(j\omega, a) = W_{\pi 4}(j\omega) \times W_{\Im}(j\omega, a).$$
(6.32)

Тогда в случае статической характеристики нелинейного элемента условие (6.31) принимает вид

$$W_{\pi \Psi}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\chi}(a)}.$$
 (6.33)

Решение уравнения (6.33) относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы $W_{\pi 4}(j\omega)$ и годографа обратной характеристики нелинейной части $W_{3}^{-1}(a)$, взятой с обратным знаком (рис. 6.9). Если эти годографы не пересекаются, то режим автоколебаний в исследуемой системе не существует.



Рис. 6.9

Для устойчивости автоколебательного режима с частотой ω_0 и амплитудой a_0 требуется, чтобы точка на годографе нелинейной части $-W_3^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде $a_0+\Delta a$ по сравнению со значением в точке пересечения годографов, не охватывалась годографом частотной характеристики линейной части системы и охватывалась точка, соответствующая уменьшенной амплитуде $a_0-\Delta a$.

На рис. 6.9 дан пример расположения годографов для случая, когда в нелинейной системе существуют устойчивые автоколебания, так как $a_3 < a_0 < a_4$.

Исследование по логарифмическим частотным характеристикам.

При исследовании нелинейных систем по логарифмическим частотным характеристикам условие (6.31) переписывают отдельно для модуля и аргумента эквивалентного комплексного коэффициента передачи разомкнутой нелинейной системы

mod $W_{\pi q}(j\omega)W_{\vartheta}(j\omega, a) = 1;$

arg $W_{\pi q}(j\omega)W_{9}(j\omega, a) = -(2k+1)\pi$, при k=0, 1, 2, ...

с последующим переходом к логарифмическим амплитудной и фазовой характеристикам

$$L_{\pi q}(\omega) + L_{3}(\omega, a) = 0;$$
 (6.34)

$$\psi_{\pi 4}(\omega) + \psi_{3}(\omega, a) = -(2k+1)\pi$$
, при k=0, 1, 2, ... (6.35)

Условия (6.34) и (6.35) позволяют определить амплитуду a_0 и частоту ω_0 периодического решения уравнения (6.25) по логарифмическим характеристикам линейной части системы $L_{\pi 4}(\omega)$, $\psi_{\pi 4}(\omega)$ и нелинейного элемента $L_3(\omega, a)$, $\psi_3(\omega, a)$.

Автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой a_0 будут существовать в нелинейной системе, если периодическое решение уравнения (6.25) устойчиво. Приближенный метод исследования устойчивости периодического решения заключается в том, что исследуется поведение системы при частоте $\omega = \omega_0$ и значениях амплитуды $a = a_0 + \Delta a$ и $a = a_0 - \Delta a$, где $\Delta a > 0$ - малое приращение амплитуды. При исследовании устойчивости периодического решения при $a_0 + \Delta a$ и $a_0 - \Delta a$ по логарифмическим характеристикам пользуются критерием устойчивости Найквиста.

В нелинейных системах с однозначными статическими характеристиками нелинейного элемента коэффициент гармонической линеаризации q'(*a*) равен ну-

лю, а следовательно, равен нулю и фазовый сдвиг $\psi_{\mathfrak{I}}(a)$, вносимый элементом. В этом случае периодическое решение уравнения системы

$$[A(p) + B(p) \times q(a)]x = 0$$
 (6.36)

существует, если выполняются условия:

$$L_{\pi q}(\omega) = -L_{9}(a);$$
 (6.37)

$$\psi_{\pi 4}(\omega) = -(2k+1)\pi,$$
при k=0, 1, 2, ... (6.38)

Уравнение (6.38) позволяет определить частоту $\omega = \omega_0$ периодического решения, а уравнение (6.37) – его амплитуду $a = a_0$.

При сравнительно простой линейной части решения этих уравнений могут быть получены аналитически. Однако в большинстве случаев их целесообразно решать графически (рис. 6.12).

При исследовании устойчивости периодического решения уравнения (6.36), т.е. при определении существования автоколебаний в нелинейной системе с однозначной нелинейной статической характеристикой пользуются критерием Найквиста: периодическое решение с частотой $\omega = \omega_0$ и амплитудой $a = a_0$ устойчиво, если при изменении частоты от нуля до бесконечности и положительном приращении амплитуды $\Delta a > 0$ разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов фазовой характеристики линейной части системы $\psi_{\pi y}(\omega)$ через линию $-\pi$ равна нулю в диапазоне частот, где $L_{IIY}(\omega) \geq -L_{2}(\omega_{0}, a_{0} + \Delta a),$ И не равна нулю диапазоне частот, где В $L_{IIY}(\omega) \geq -L_2(\omega_0, a_0 - \Delta a).$

На рис. 6.10 показан пример определения периодических решений в нелинейной системе с ограничением. В такой системе имеются три периодических решения с частотами ω_{01} , ω_{02} и ω_{03} , определяемыми в точках пересечения фазовой характеристики $\psi_{\pi 4}(\omega)$ с линией -180° . Амплитуды периодического решения a_{01} , a_{02} и a_{03} определяются из условия (6.37) по логарифмическим амплитудным характеристикам нелинейного элемента $-L_3(\omega_{01}, a)$, $-L_3(\omega_{02}, a)$ и $-L_3(\omega_{03}, a)$.



Рис. 6.10

Из трех решений, определенных на рис. 6.10, устойчивы два. Решение с частотой $\omega = \omega_{01}$ и амплитудой $a = a_{01}$ устойчиво, так как в диапазоне частот 1, где $L_{\pi^{q}}(\omega) \ge -L_{3}(\omega_{01}, a_{01} + \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{\pi^{q}}(\omega)$ не пересекает линию -180^{0} , а в диапазоне частот 2, где $L_{\pi^{q}}(\omega) \ge -L_{3}(\omega_{01}, a_{01} - \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{\pi^{q}}(\omega)$ один раз пересекает линию -180^{0} . Решение с частотой $\omega = \omega_{02}$ и амплитудой $a = a_{02}$ неустойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_{\pi^{q}}(\omega) \ge -L_{3}(\omega_{02}, a_{02} + \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{\pi^{q}}(\omega)$ один раз пересекает линию -180^{0} . Высокочастотное периодическое решение с частотой $\omega = \omega_{03}$ и амплитудой $a = a_{03}$ устойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_{\pi^{q}}(\omega) \ge -L_{3}(\omega_{03}, a_{03} + \Delta a)$, имеется один положительный и один отрицательный переход фазовой характеристики $\psi_{\pi^{q}}(\omega)$ через линию -180^{0} . в диапазоне частот, где $L_{\pi^{q}}(\omega) \ge -L_{3}(\omega_{03}, a_{03} - \Delta a)$, имеются два положительных и один отрицательный переход фазовой характеристики $\psi_{\pi^{q}}(\omega)$ через линию -180^{0} .

В рассмотренной системе при малых по величине возмущениях установятся высокочастотные автоколебания с частотой ω_{03} и амплитудой a_{03} , а при больших по величине возмущениях – низкочастотные автоколебания с частотой ω_{01} и амплитудой a_{01} .

6.5. Методы фазового пространства

Методы фазового пространства относятся к наиболее ранним точным аналитическим методам теории нелинейных систем. К ним относится метод фазовой плоскости и метод точечных отображений или преобразований. Фазовым пространством называется пространство, по осям координат которого отложены переменные, характеризующие состояние динамической системы. Если движение системы описывается дифференциальным уравнением n-го порядка, то состояние этой системы в любой момент времени можно характеризовать некоторой точкой n-мерного фазового пространства, по осям которого отложены одна из координат системы и (n-1) ее производных. Точка, характеризующая состояние системы, называется изображающей точкой.

При движении системы изображающая точка описывает в фазовом пространстве некоторую кривую, называемую фазовой траекторией. Каждому определенному переходному процессу в фазовом пространстве соответствует определенная фазовая траектория. Начальное положение изображающей точки определяется начальными условиями. В установившемся равновесном состоянии системы все производные рассматриваемой переменной равны нулю; соответствующие этому точки фазового пространства находятся в покое и называются особыми точками. Совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных отклонений называется фазовым портретом системы.

Имея фазовый портрет системы, определяют по нему особые точки и траектории, исследуют устойчивость системы и оценивают качество процесса управления.

Метод фазовой плоскости используется для исследования систем второго порядка и заключается в построении фазовых портретов на плоскости. Для этого из уравнений состояния исключается время и определяются уравнения фазовых кривых. Задача становится достаточно простой, если рассматривается система с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента. В этом случае в разных областях фазовой плоскости система описывается линейными уравнениями, в соответствии с которыми строятся фазовые траектории, которые в дальнейшем "сшиваются" по линиям переключения, определяемым видом нелинейной характеристики.

При исследовании нелинейных систем высокого порядка их аппроксимируют системами второго порядка с эквивалентным запаздыванием.

Для изображения процессов на фазовой плоскости нелинейное уравнение, описывающее систему, заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases}$$
(6.39)

где х, у - координата системы и ее первая производная;

f(x, y) - нелинейная функция.

Разделив первое из уравнений (6.39) на второе, получим дифференциальное уравнение, из которого исключено время t:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x, y)}{y} \ . \tag{6.40}$$

Решение данного уравнения

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \tag{6.41}$$

определяет уравнение фазовой траектории, которая графически изображается на фазовой плоскости (x, y). Каждой совокупности начальных условий (x_0 , y_0) соответствует свое решение и своя фазовая траектория. Семейство фазовых траекторий характеризует все возможные виды переходных процессов в данной системе управления при любых начальных условиях и образует ее фазовый портрет.

Основные свойства фазовых траекторий вытекают из выражения (6.40):

1) если f(x, y) определена и непрерывна в некоторой области и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам, то через всякую точку фазовой плоскости, за исключением особых точек, проходит единственная фазовая траектория. Это означает, что фазовые траектории не пересекаются между собой;

2) так как при y>0 производная dx/dt>0 и х только возрастает, то в верхней фазовой полуплоскости при возрастании времени t изображающая точка движется слева направо. Соответственно в нижней полуплоскости движение происходит справа налево. Направление движения на траекториях показывают стрелками;

3) в точках, где у=0, f(x, y)≠0 (неособых точках на оси абсцисс), фазовые траектории пересекают ось под прямым углом.

В тех случаях, когда решение уравнения (6.40) аналитическими методами затруднительно или невыполнимо, фазовые траектории можно построить приблизительным графическим методом изоклин.

Изоклины представляют собой геометрическое место всех точек фазовой плоскости, для которых наклон фазовой траектории равен постоянному значению c_i , то есть dy/dx= c_i . Тогда вместо (6.40) можно написать уравнение

$$\frac{f(x, y)}{y} = c_{i}$$

из которого получается уравнение изоклины

$$y = \varphi(x, c_i).$$

Задавая различные значения с_i наклона касательных к фазовым траекториям, пересекающим эти изоклины, строят семейство изоклин, которые используются для построения фазовых траекторий (рис. 6.11). Фазовая траектория в точке пересечения с изоклиной имеет угол наклона *arctg* c_i. В качестве примера на рис. 6.11 на изоклинах отмечены наклоны касательных к пересекающим их траекториям направляющими стрелками и построена фазовая траектория, исходящая из точки А.



Рис. 6.11

Рассмотрим фазовые траектории линейной системы второго порядка, переходный процесс в которой описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0.$$

Введя обозначение для скорости изменения регулируемой величины у = = dx/dt, получим эквивалентные уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -a_1y - a_2x , \end{cases}$$

откуда, исключив время t, находим дифференциальное уравнение для определения фазовых траекторий

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -a_1 - a_2 \frac{x}{y}$$

Решение у = F(x) этого уравнения определяет уравнения фазовых траекторий на фазовой плоскости (x, y). Возможные виды фазовых портретов системы, соответствующие корням характеристического уравнения $p^2 + a_1p + a_2 = 0$, приведены в таблице.

Таблица

Виды фазовых портретов для линейных систем второго порядка

Корни характеристиче- ского уравнения	Переходный	процесс	Фазовая траектория
1	2		3
1. $a_1=0, a_2>0$			
Im Re			у х особая точка - центр
2. $a_1^2 > 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$	X t		у особая точка - устойчивый узел
3. $a_2 < 0$ Im			у х х сособая точка - седло
4. $a_1^2 < 4a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$			у особая точка - неустойчивый фокус
5. $a_1^2 < 4a_2, a_1 > 0, a_2 > 0$	x t		у особая точка - устойчивый фокус
6. $\overline{a_1^2 > 4a_2}, a_1 < 0, a_2 > 0$	x t		у -особая точка - неустойчивый узел
Вид и расположение фазовых траекторий, а также направление движения по ним изображающей точки дают возможность судить о характере движения системы и его устойчивости при различных начальных отклонениях. Особые точки и их характер определяют состояние равновесия исходной системы.

Реальные автоматические системы можно считать линейными в предположении малости отклонений переменных от их установившихся значений. За пределами указанной области картина фазовых траекторий может стать качественно иной. В частности, если по линейной теории система неустойчивая и процесс расходится, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходящимся неограниченно. Картина фазовых траекторий для такой системы изображена на рис. 6.12,а. Здесь вблизи начала координат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе, но далее они приближаются асимптотически к замкнутому контуру ограниченных размеров. К нему же приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Такого рода замкнутый контур представляет собой особый вид линий на фазовой плоскости и называется устойчивым предельным циклом. Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям системы. Размеры предельного цикла представляют амплитуды колебаний самой величины х и скорости ее изменения у. Для определения периода автоколебаний необходимо решить уравнение системы во времени.



Рис. 6.12

Замкнутые фазовые траектории на фазовой плоскости называются предельными циклами, которые могут быть как устойчивыми (рис. 6.12,а), так и неустойчивыми (рис. 6.12,б). К этим предельным циклам стремятся изображающие точки при различных начальных отклонениях по различным фазовым траекториям.

В различных частях фазовой плоскости фазовые траектории нелинейной системы могут быть различными (рис. 6.12,в). Линии, разделяющие фазовую плоскость на участки с различными фазовыми траекториями, называются сепа-

ратрисами. Поведение системы в каждой области фазовой плоскости описывается своим дифференциальным уравнением.

Кроме того, для фазового портрета нелинейных систем с разрывными характеристиками характерно наличие линий переключения, которые также разделяют фазовую плоскость на ряд областей с различными фазовыми траекториями. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на предыдущем участке. Линии переключения характеризуются узловыми точками разрывных характеристик нелинейных элементов.

Замечание: координатами (x, y) фазовой плоскости могут служить не обязательно отклонение (ошибка) управляемой величины системы и ее скорость. Для этой цели могут быть взяты любые две переменные, однозначно характеризующие состояние системы второго порядка в произвольный момент времени.

Пример. Изобразим на фазовой плоскости переходный процесс и автоколебания в автоматической системе (рис. 6.1), линейная часть которой задана передаточной функцией

$$W_{\Pi \Psi}(s) = \frac{k}{s(T \ s+1)},$$

где k - коэффициент передачи;

Т - постоянная времени,

а нелинейный элемент - статической характеристикой $y_{H} = F(x)$.

Решение. В качестве координат фазовой плоскости выбираем отклонение управляемой величины x и скорость ее изменения y = dx/dt. Запишем для ошибки x дифференциальное уравнение системы, описывающее ее свободное движение

$$T\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}} + \frac{dx(t)}{dt} + kF(x) = 0, \qquad (6.42)$$

которое заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y - \frac{k}{T}F(x);\\ \frac{dx}{dt} = y. \end{cases}$$
(6.43)

Разделив первое из уравнений (6.43) на второе, получаем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{F}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}},\tag{6.44}$$

решение, которого определяется характеристикой нелинейного элемента.

Рассмотрим фазовые портреты системы для некоторых типов нелинейных элементов.

1. Идеальное двухпозиционное реле (рис. 6.4, а) со статической характеристикой F(x) = csign(x).

Дифференциальное уравнение (6.44) фазовых траекторий в этом случае примет вид

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{csign}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}.$$
 (6.45)

Переключение идеального реле происходит при х = 0. Следовательно, линия переключения на фазовой плоскости (рис. 6.13, а) совпадает с осью ординат.

Справа от линии переключения при x > 0 дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{T} - \frac{\mathrm{kc}}{\mathrm{Ty}}.$$
(6.46)

Его интегрирование дает уравнение фазовой траектории [2]

$$x = kcT ln |y + kc| - Ty + c^{0},$$
 (6.47)

где c^0 - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями. Каждому конкретному c^0 соответствует определенная кривая на фазовой плоскости справа от линии переключения. Эти кривые имеют асимптоту y = -kc.

Слева от линии переключения при x < 0 дифференциальное уравнение (6.45) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{kc}}{\mathrm{Ty}},\tag{6.48}$$

что дает решение

$$x = -kcT \ln |y - kc| - Ty + c^{0},$$
 (6.49)

согласно которому наносится семейство фазовых траекторий с асимптотой у = kc в левой фазовой полуплоскости.

На рис. 6.13, а изображены фазовые траектории системы для начальных условий (x₀, 0).



Рис. 6.13

2. Двухпозиционное реле с гистерезисом (рис. 6.4, в) со статической характеристикой

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} + \mathbf{c} \quad npu \quad \mathbf{x} > + \mathbf{b}, \\ - \mathbf{c} \quad npu \quad \mathbf{x} < + \mathbf{b}, \end{cases} \quad \kappa o c \partial a \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} > 0;$$
$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} + \mathbf{c} \quad npu \quad \mathbf{x} > - \mathbf{b}, \\ - \mathbf{c} \quad npu \quad \mathbf{x} < - \mathbf{b}, \end{cases} \quad \kappa o c \partial a \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} < 0.$$

Переключение реле с гистерезисом происходит при x = +b, если y > 0 (линия AB на рис. 6.13, б); если же y < 0, то при x = -b (линия CD). Соответственно, линия переключения ABCD на фазовой плоскости (рис. 6.13, б) имеет разрыв.

Справа от линии переключения ABCD справедливо дифференциальное уравнение фазовых траекторий (6.46), а слева – (6.48). Следовательно, фазовые траектории рассматриваемой системы (рис. 6.13, б) строятся аналогично предыдущему случаю.

В данной системе будут наблюдаться устойчивые автоколебания, к которым сходится переходный процесс с обеих сторон, т.е. при любых начальных условиях. Амплитуда автоколебаний изображена на рис. 6.16, б отрезком а; отрезок у_м изображает амплитуду скорости. Период автоколебаний определяется решением уравнений во времени.

3. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности (рис. 6.4, б) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad npu \quad -b \le x \le +b, \\ +c \quad npu \quad x > +b, \\ -c \quad npu \quad x < -b. \end{cases}$$

Переключение трехпозиционного реле с зоной нечувствительности происходит при x = -b (линия AB фазовой плоскости на рис. 6.14, а) и при x = +b (линия CD). Соответственно, линии переключения AB и CD разделяют фазовую плоскость на на три области (рис. 6.14, а).

Справа от линии переключения CD справедливо дифференциальное уравнение фазовых траекторий (6.46), а слева от линии переключения AB – (6.48). Следовательно, для рассматриваемой системы фазовые траектории в этих областях фазовой плоскости (рис. 6.14, а) строятся аналогично предыдущим случаям.

В средней области при −b ≤ x ≤ +b, соответствующей зоне нечувствительности реле, дифференциальное уравнение (6.44) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{1}{T},\tag{6.50}$$

откуда

$$y=-\frac{1}{T}x+c^0$$
, (6.51)

согласно которому семейство фазовых траекторий образуется отрезками прямых линий с отрицательным угловым коэффициентом -1/Т.



Рис. 6.14

На рис. 6.14, а изображены фазовые траектории системы для начальных условий (x_0 , 0). Система приходит в положение равновесия при значениях ошибки, определяемой зоной нечувствительности реле.

4. Усилитель с насыщением (рис. 6.3, а) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} k_{y}x & npu & -b \le x \le +b \\ +c & npu & x > +b, \\ -c & npu & x < -b. \end{cases}$$

Для построения фазовых траекторий нелинейной системы с кусочнолинейной характеристикой нелинейного элемента фазовую плоскость разделяем на области линиями AB и CD (рис. 6.14,б).

Как следует из сравнения статических характеристик нелинейных элементов, фазовые траектории в правой и левой областях фазовой плоскости рассматриваемой системы строятся аналогично предыдущему случаю.

В средней области при $-b \le x \le +b$, соответствующей линейному участку характеристики, система становится линейной и дифференциальное уравнение (6.44) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{k}k}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} \ . \tag{6.52}$$

На рис. 6.14, б приведена фазовая траектория системы для начальных условий (x₀, 0) в случае ее устойчивости в линейной области.

Метод точечных преобразований (метод Пуанкаре-Андронова) позволяет установить существование автоколебаний в нелинейной системе второго порядка

без построения фазовых траекторий. Сущность метода заключается в том, что для исследования динамики системы необходимо выяснить, как в зависимости от начальных условий перемещаются точки пересечения фазовой траектории с некоторой полупрямой, например, отрезком 0Х фазовой плоскости (рис. 6.15).



Рис. 6.15

Возьмем начальное положение изображающей точки (x_0 , 0) где-нибудь на полуоси 0Х. После обхода вокруг начала координат изображающая точка пересекает полуось 0Х в точках x_1 , x_2 и т.д. Последовательность точек пересечения фазовой траектории с выбранной полупрямой представляет точечное преобразование полупрямой самой в себя. Задавая различные начальные положения x_{0i} изображающей точки на полуоси 0Х, согласно уравнениям системы определяют соответствующие им точки x_i на той же полуоси после обхода начала координат. Полученная таким образом зависимость

$$x_i = f(x_{0i})$$
 (6.53)

называется функцией соответствия и используется для исследования периодических режимов в нелинейных системах.



Рис. 6.16

Для исследования возможных автоколебаний в координатах функции соответствия (рис. 6.16) проводится прямая из начала координат под углом 45^0 к координатным осям, для которой $x_i = x_{0i}$, что соответствует отображению каждой точки полуоси 0Х самой в себя, т.е. после обхода вокруг начала координат точка возвращается в исходное положение. Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки A и B) определяют существование предельного цикла. Если указанная кривая и прямая не пересекаются, то автоколебания невозможны, а если касаются, то имеет место один предельный цикл.

Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 6.16.

Рис. 6.16 соответствует двум предельным циклам, из которых меньший (точка A) неустойчив, а больший (точка B) устойчив. Следовательно, при начальных условиях (x_0 , y_0), расположенных внутри меньшего предельного цикла, система устойчива, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу.

Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки A и B) определяют существование предельного цикла. Если указанная кривая и прямая не пересекаются, то автоколебания невозможны, а если касаются, то имеет место один предельный цикл.

Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 6.16.

Рис. 6.16 соответствует двум предельным циклам, из которых меньший (точка A) неустойчив, а больший (точка B) устойчив. Следовательно, при начальных условиях (x_0 , y_0), расположенных внутри меньшего предельного цикла, система устойчива, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу.

6.6. Коррекция нелинейных систем

При коррекции нелинейных автоматических систем обычно решаются две основные задачи:

обеспечение устойчивости системы;

187

получение автоколебаний с заданной амплитудой и частотой.

Коррекция осуществляется с помощью включения линейных или нелинейных корректирующих устройств, а также компенсацией влияния нелинейностей.

Корректирующие устройства. В качестве линейных корректирующих устройств используются главным образом неединичные главные обратные связи (рис. 6.17, а) и местные обратные связи, охватывающие нелинейные элементы (рис. 6.17, б).

Нелинейные корректирующие устройства включаются либо последовательно, либо в обратные связи.

При расчете корректирующих устройств структурную схему нелинейной системы необходимо привести к эквивалентной одноконтурной схеме с нелинейным элементом и эквивалентной линейной частью с передаточной функцией для схемы, приведенной на рис. 6.17, а,

$$W_{\rm 3ny}(s) = W_{\rm ny}(s) \times W_{\rm oc}(s)$$

и для схемы, приведенной на рис. 6.17, б,

$$W_{\rm Элч}(s) = W_{\rm лч}(s) + W_{\rm Moc}(s)$$



Рис. 6.17

Влияние линейного корректирующего устройства на фазовый портрет системы. Рассмотрим систему, представленную на рис. 6.17, а, линейная часть которой задана передаточной функцией

где k - коэффициент передачи;

Т - постоянная времени,

а нелинейный элемент - статической характеристикой F(σ); у которой в качестве линейного корректирующего устройства включено в главную обратную связь форсирующее звено с передаточной функцией

$$W_{oc}(s) = (T_{oc} s + 1),$$

где Т_{ос} - постоянная времени.

Передаточная функция эквивалентной линейной части системы будет

$$W_{3\pi4}(s) = \frac{k(T_{oc}s+1)}{s(Ts+1)}.$$
 (6.54)

На основании структурной схемы (рис. 6.20,а) и выражения (6.54) свободное движение нелинейной системы (g = 0) можно описать дифференциальным уравнением относительно отклонения σ

$$(Ts^{2} + s)\sigma + k(T_{oc}s + 1)F(\sigma) = 0$$
, где s=d/dt. (6.55)

Учитывая, что

$$\sigma = -(T_{oc}s + 1)x, \qquad (6.56)$$

получим дифференциальное уравнение относительно управляемой величины х системы

$$T \frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}} + \frac{dx(t)}{dt} - kF(\sigma) = 0.$$
 (6.57)

Для построения фазового портрета в качестве координат фазовой плоскости выбираем управляемую величину x и скорость ее изменения y = dx/dt и уравнение (6.57) заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y + \frac{k}{T}F(\sigma); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases}$$
(6.58)

откуда дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{T}} \times \frac{\mathrm{F}(\sigma)}{\mathrm{y}}.$$
(6.59)

Если нелинейным элементом является усилитель с насыщением (рис. 6.3, a), то для линейного участка характеристики | σ | ≤ b

$$F(\sigma) = k_y \sigma = -k_y (T_{oc} s + 1)x$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+kk}{T} \frac{T}{T} - \frac{kk}{T} \frac{y}{T} \times \frac{x}{y} . \qquad (6.60)$$

Поскольку для участков насыщения $F(\sigma) = \pm c$, то вместо (6.59) аналогично (6.46) и (6.48) получим уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kc}{Ty}$$
 при $\sigma < -b$ и $(T_{oc}s + 1)x > +b;$ (6.61)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{kc}{Ty} \quad \Pi p \mu \quad \sigma > +b \quad \mu \quad (T_{oc} s + 1)x < -b.$$
(6.62)

Так как линейная область на фазовой плоскости определяется неравенством $|\sigma| \le b$ и зависимостью (6.56), то уравнения граничных линий можно записать в виде:

$$\begin{cases} T_{oc} y + x = b & u\pi u \quad y = -\frac{1}{T_{oc}} (x - b); \\ T_{oc} y + x = -b & u\pi u \quad y = -\frac{1}{T_{oc}} (x + b). \end{cases}$$
(6.63)

Следовательно, граничные линии проходят через точки на оси абсцисс $|x| = \pm b$ и являются наклонными прямыми, угол наклона которых зависит от величины постоянной времени звена обратной связи

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{T_{oc}}\right). \tag{6.64}$$

На рис. 6.18, а изображены фазовые траектории и граничные линии для системы при начальных условиях (x₀, 0).

Таким образом, при неединичной обратной связи фазовый портрет в зонах насыщения, определяемый уравнениями (6.61) и (6.62), будет таким же, как и при единичной обратной связи. В области линейной части характеристики фазовый портрет системы определяется уравнением (6.60), в котором имеется дополнительный член, обусловленный постоянной времени звена обратной связи T_{oc} . Кроме того, наличие производной в главной обратной связи поворачивает граничные линии, разделяющие фазовую плоскость на области, против часовой стрелки навстречу движению изображающей точки. Угол поворота этих линий тем больше, чем больше постоянная времени T_{oc} ; в случае единичной обратной связи ($T_{oc} = 0$) угол поворота равняется нулю, при этом угол наклона $\alpha = 90^{0}$.



Рис. 6.18

Если нелинейный элемент обладает релейной характеристикой, то фазовые траектории в зонах насыщения и нечувствительности определяются такими же уравнениями, как и в случае единичной обратной связи. Однако наличие члена $T_{oc}s$ в передаточной функции звена обратной связи обуславливает поворот линий переключения реле влево соответственно уравнениям (6.63); при этом угол наклона α определяется по формуле (6.64). На рис. 6.18, б показана фазовая траектория и линии переключения для нелинейной системы с трехпозиционным реле с зоной нечувствительности (рис. 6.4, б) при начальных условиях (x_0 , 0). Поворот линий переключения реле навстречу движению изображающей точки фазовой траектории обеспечивает работу системы с упреждением. Путем подбора постоянной времени T_{oc} можно обеспечить перевод релейной системы в новое состояние за одно включение реле, как показано на рис. 6.4, б, при угле наклона линий переключения, равном α' .

В том случае, когда система имеет неединичную жесткую главную обратную связь вида

$$W_{oc}(s) = 1 + k_{oc},$$
 (6.65)

имеет место

$$\sigma = -(1 + k_{\rm oc})x.$$
 (6.66)

Граничные линии и линии переключения для такой главной обратной связи определяются уравнениями:

$$\begin{cases} k_{oc} x + x = b & unu \quad x = \frac{b}{1 + k_{oc}}; \\ k_{oc} x + x = -b & unu \quad x = -\frac{b}{1 + k_{oc}}. \end{cases}$$
(6.67)

Отсюда следует, что неединичная жесткая главная обратная связь вызывает перемещение граничных линий и линий переключения без изменения угла их наклона, что позволяет изменять соотношения между областями с различными фазовыми траекториями на фазовой плоскости, например, изменять область нечувствительности системы при неизменности зоны нечувствительности реле или усилителя.

Компенсация влияния нелинейности. При компенсации нелинейностей нелинейную систему можно рассматривать как линейную относительно определенных входных воздействий.

Компенсирующие нелинейности. Линеаризация заданной нелинейности $F(\sigma)$ заключается во включении последовательно или параллельно компенсирующего нелинейного элемента с обратной нелинейной характеристикой $F^{-1}(\sigma)$. При

этом получаем эквивалентный линейный элемент. На рис. 6.19 приведен пример линеаризации усилителя с зоной нечувствительности путем включения параллельно с ним усилителя с насыщением.



Рис. 6.19

Если нелинейность $F(\sigma)$ присутствует в объекте управления ОУ, то линеаризация системы может быть осуществлена путем параллельного включения объекту управления компенсирующей нелинейности $F^{-1}(\sigma)$ и модели его линейной части $W_{M \ лч \ оy}(s)$ (рис. 6.20).



Рис. 6.20

Вибрационная компенсация нелинейностей заключается в том, что нелинейный элемент приобретает свойства пропорциональности, если на его вход вместе с полезным медленно изменяющимся сигналом g(t) подается высокочастотная периодическая составляющая u(t) (рис. 6.21).

Если на входе нелинейного элемента (рис. 6.21, а, б) с характеристикой F(x) действует полезный медленно изменяющийся сигнал g(t) совместно с несмещенным периодическим сигналом u(t), частота ω которого достаточно велика, чтобы можно было приближенно считать функцию g(t) постоянной в пределах периода $T = 2\pi/\omega$ (рис. 6.21, б), т.е.

$$x(t) = g(t) + u(t),$$
 (6.68)

то выходной сигнал можно представить в виде суммы средней, медленно изменяющейся составляющей $F_1(g)$ и колебательной функции $F_2(u)$, близкой к периодической с частотой ω

$$y_{H} = F(x) = F[g(t) + u(t)] = F_{1}(g) + F_{2}(u).$$
 (6.69)

Среднюю составляющую приближенно можно представить как среднее значение выходного сигнала нелинейного элемента за период

$$F_1[g(t)] \approx \frac{\omega}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} F[g(t) + u(t)] dt. \qquad (6.70)$$

В случае g = const формула (6.70) точная и определяет постоянный член ряда Фурье, составленного относительно выходного сигнала нелинейного элемента, а колебательная функция $F_2(u)$ есть сумма гармонических составляющих этого ряда.



Рис. 6.21

Формула (6.70) тем точнее, чем больше частота ω и чем меньше g(t) изменяется в пределах периода Т. На рис. 6.21, в представлена характеристика F₁(g) для идеального двухпозиционного реле при компенсирующей периодической функции u(t) треугольного вида частоты ω и амплитуды А. Статическая характеристика я является линейной для полезного сигнала g(t), изменяющегося в пределах ±А. Коэффициент передачи линейной части определяется как

$$k_{y} = \frac{C}{A}.$$
 (6.71)

Таким образом, чем больше амплитуда компенсирующих колебаний А, тем шире зона линейности нелинейного элемента. Однако при этом уменьшается коэффициент передачи линеаризованного элемента.

Статическая характеристика F₁(g) может быть получена экспериментальным путем, что позволяет определить значения k_v и A.

Выходной сигнал нелинейного элемента y_{μ} (6.69) поступает на вход линейной части системы. При достаточно большой частоте ω периодического сигнала u(t) линейная часть из-за инерционности не пропускает компенсирующие колебания, поэтому составляющей $F_2(u)$ можно пренебречь. Следовательно, для разомкнутой системы (рис. 6.21, а) можно определить передаточную функцию

$$W(s) = k_v W_{\pi q}(s).$$
 (6.72)

Это значит, что при задающем воздействии g(t) < A (рис. 6.24, в) для частоты ω компенсирующих колебаний u(t), превышающих частоту среза линейной части системы, нелинейная система может рассматриваться как линейная.

Для формирования высокочастотного сигнала u(t) используется или специальный генератор или собственные колебания системы.

6.7. Скользящие режимы в релейных системах

Скользящим режимом называется режим работы релейной системы, характеризующийся колебательным движением изображающей точки вдоль линии переключения. Чем сильнее воздействие производной в цепи обратной связи, тем больше поворачиваются линии переключения реле против часовой стрелки. При этом интенсивность затухания переходного процесса возрастает. В том случае, когда в точке переключения угол наклона линии переключения становится равным наклону или меньше угла наклона касательной к фазовой траектории, по которой движется изображающая точка после переключения реле, возникают условия существования скользящего режима.

Рассмотрим возникновение скользящего режима в нелинейной системе, изображенной на рис. 6.17, а, с идеальным реле при отсутствии внешнего воздействия и при заданных начальных условиях $x_0 \neq 0$ и $y_0 = 0$.

Пусть начальное состояние системы задано точкой (x_0 , 0) (рис. 6.22), от которой изображающая точка перемещается по фазовой траектории типа 1 до встречи с линией переключения AB в точке С. В этой точке происходит переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 2 до точки D. В точке D происходит переключение реле в другую сторону, после чего изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 1. Но как только увеличится результирующий сигнал обратной связи, произойдет переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 2 и так далее, т.е. изображающая точка, подойдя к этому отрезку линии переключения - отрезку скольжения, не сможет уйти с него. Таким образом, изображающая точка, достигнув точки D, непрерывно переходит с траектории типа 1 на траекторию типа 2 и обратно, как бы скользя вдоль линии переключения и асимптотически приближаясь к точке равновесия 0.

Как видно из рис. 6.22, скользящий режим возможен на тех участках, где фазовая траектория типа 2 проходит ниже линии переключения AB (после точки D). При начальном положении изображающей точки $(x_{02}, 0)$ после ее прихода по траектории типа 1 в точку на линии переключения D сразу начинается скользящий режим. При начальном положении изображающей точки $(x_{03}, 0)$ скользящий режим имеет место после переключения реле, когда изображающая точка скользит по линии переключения AB в четвертом квадранте. В последнем случае переходный процесс имеет перергулирование.



Рис. 6.22

В рассматриваемом примере предполагается, что переключение реле происходит мгновенно, в результате частота переключений бесконечно велика, а амплитуда колебаний бесконечно мала. Такой скользящий режим называется *предельным*. Если учесть неоднозначность характеристики или зону нечувствительности, то переключение реле при скользящем режиме происходит с конечной частотой, а амплитуда колебаний отличается от нуля.

В предельном скользящем режиме релейный элемент можно заменить эквивалентным линейным безынерционным звеном с коэффициентом передачи, стремящимся к бесконечности ($k_p \rightarrow \infty$). Тогда эквивалентная передаточная функция системы, соответствующая структурной схеме, приведенной на рис. 6.20, а, будет

$$\Phi_{_{3KB}}(s) = \lim_{k_{_{p}} \to \infty} \frac{k_{_{p}}W_{_{\pi_{4}}}(s)}{1 + k_{_{p}}W_{_{\pi_{4}}}(s)W_{_{oc}}(s)} = \frac{1}{W_{_{oc}}(s)} = \frac{1}{T_{_{oc}}s + 1}.$$
 (6.73)

Следовательно, для предельного скользящего режима релейную систему можно представить эквивалентной структурной схемой в виде интегрирующего звена, охваченного обратной связью, или просто в виде апериодического звена первого порядка.

При начальном положении системы x_{01} (точка M_0 на рис. 6.22) после переключения реле в точке M_1 изображающая точка по фазовой траектории типа 2 приходит в начало координат, характеризующее состояние покоя. При этом переходный процесс будет иметь минимальное время, а режим работы системы будет оптимальным по быстродействию. При заданной постоянной времени корректирующей цепи обратной связи T_{oc} такой режим будет существовать только для определенной группы начальных значений, когда изображающая точка в начальный момент времени оказывается на траектории $M_0 M_1 0 M_1^{'} M_0^{'}$, проходящей через начало координат; во всех других случаях будет иметь место скользящий режим либо сразу после переключения реле, либо после нескольких переключений.

Для того чтобы процесс при любых начальных условиях был оптимальным по быстродействию, линией переключения должна быть сама фазовая траектория, проходящая через начало координат. Такая кривая линия переключения свидетельствует о нелинейном характере воздействия корректирующей обратной связи. Линия переключения не относится к фазовым траекториям. Но можно сделать так, что она будет совпадать с одной из фазовых траекторий. Тогда процесс в системе будет состоять из двух частей: подход к линии переключения по одной из траекторий, выбор которой зависит от начальных условий, и движение по линии переключения к положению равновесия.

Наглядное представление о совокупности оптимальных процессов при различных начальных условиях дает фазовый портрет, приведенный на рис. 6.23.



Рис. 6.23

При построении оптимальных по быстродействию систем основной задачей является формирование функции управления, характеризующей переключение релейного элемента. На рис. 6.24 приведена структурная схема системы с нелинейной обратной связью.



Рис. 6.24

В общем случае оптимальная по быстродействию система может содержать вычислительное устройство, формирующее функцию нелинейной обратной связи, логические элементы и иметь переменную структуру.

6.8. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик

Анализ и синтез нелинейных систем, работающих под воздействием случайных сигналов, значительно усложняется по сравнению с линеаризованной системой, так как, во-первых, закон распределения случайного процесса изменяется за счет изменения коэффициента усиления нелинейного элемента в зависимости от величины входного сигнала, во-вторых, если вместе с полезным сигналом на вход системы поступает случайная помеха, то при прохождении через нелинейный элемент соотношение между ними изменяется.

Для нелинейных элементов нет простой связи между средними значениями, корреляционными функциями и спектральными плотностями случайных сигналов на его выходе и входе. Однако такую зависимость можно формально получить, если заменить нелинейное преобразование случайного сигнала некоторым эквивалентным линеаризованным преобразованием.

Оценить статистические характеристики нелинейных систем позволяет метод статистической линеаризации, основанный на замене нелинейной характеристики статистически равноценной линейной. Критериями статистической равноценности служат два принципа:

принцип *равенства* средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линеаризованного элемента;

принцип *минимума* средней квадратической ошибки, обусловленной заменой нелинейного элемента приближенным линеаризованным элементом.

Заменим нелинейную характеристику элемента

$$\mathbf{y}_{\mathrm{H}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{6.74}$$

линейной зависимостью

$$y = k \times x, \tag{6.75}$$

которая имеет такие же математическое ожидание и дисперсию на выходе. С этой целью запишем (6.75) в виде

$$y = k_0 m_x + k_{11} x^{\circ}, (6.76)$$

где х^о - центрированная случайная функция.

Выберем коэффициенты k₀ и k₁₁ так, чтобы

$$m_y = k_0 m_x = m_{yH}; \quad \sigma_y^2 = k_{11}^2 \sigma_x^2 = \sigma_{yH}^2,$$
 (6.77)

где $m_x, m_{yH}, m_y, \sigma_x^2, \sigma_{yH}^2, \sigma_y^2$ - математические ожидания и дисперсии сигналов.

Из выражения (6.77) следует, что для статистической равноценности, исходя из равенства средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линеаризованного звена, требуется

$$k_{0} = \frac{m_{y_{H}}}{m_{y}}; \qquad (6.78)$$

$$k_{11} = \pm \frac{\sigma_{y_{\rm H}}}{\sigma_{x}},\tag{6.79}$$

причем знак k₁₁ должен совпадать со знаком производной нелинейной характеристики F(x).

Величины k_0 и k_{11} называются коэффициентами статистической линеаризации. Для их вычисления требуется знать математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе нелинейного элемента:

$$m_{y_{\rm H}} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\omega(x) \, dx \, ; \qquad (6.80)$$

$$\sigma_{y_{\rm H}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,,\qquad(6.81)$$

где $\omega(x)$ - плотность вероятности распределения случайного сигнала на входе нелинейного элемента.

Далее найдем коэффициенты статистической линеаризации на основании второго принципа, обеспечивающего наилучшее приближение корреляционной функции сигнала на выходе нелинейного элемента к корреляционной функции сигнала на выходе линейного звена. Среднее значение квадрата ошибки, обусловленное заменой нелинейного элемента приближенным линеаризованным звеном, исходя из (6.74) и (6.76) определяется выражением

$$\overline{(y-y_{H})^{2}} = k_{0}^{2}m_{x}^{2} + k_{12}^{2}\sigma_{x}^{2} - 2k_{0}m_{x}m_{yH} - 2k_{12}(x^{0}y_{H}) + y_{H}^{2}$$
(6.82)

и должно быть минимальным. Приравняв нулю производные от последнего выражения по k_0 и k_{12} , запишем уравнения

$$2k_0 m_x^2 - 2m_x m_{yH} = 0; (6.83)$$

$$2k_{12}\sigma_{x}^{2} - 2(x^{o}y_{H}) = 0.$$
 (6.84)

Следовательно, в этом случае коэффициенты статистической линеаризации вычисляются по формулам

$$k_{0} = \frac{m_{y_{H}}}{m_{y}};$$
(6.85)

$$k_{12} = \frac{(x^{o}y_{H})}{\sigma_{x}^{2}} = \frac{R_{xy_{H}}(0)}{R_{x}(0)} = \frac{1}{\sigma_{x}^{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x}) F(x)\omega(x) dx .$$
 (6.86)

Таким образом, статистическая линеаризация из условия минимума средней квадратической ошибки дает то же значение коэффициента k₀, которое было найдено при первом способе линеаризации; коэффициент линеаризации относительно случайной составляющей k₁₂ другой. Рекомендуется брать их среднее арифметическое значение:

$$k_{1} = \frac{k_{11} + k_{12}}{2}.$$
 (6.87)

Коэффициенты статистической линеаризации зависят не только от характеристик нелинейного элемента, но и от математического ожидания и дисперсии сигнала на его входе. Кроме того, для их вычисления требуется знать закон распределения случайного процесса. При прохождении случайного сигнала через замкнутую систему инерционные звенья линейной части системы приближают закон распределения к нормальному, поэтому для типовых нелинейных характеристик коэффициенты k_0 и k_1 могут быть заранее вычислены.

В заключение следует отметить, что метод статистической линеаризации применим к системам, в которых невозможны автоколебания. Для исследования нелинейных систем с автоколебаниями используется метод совместной статистической и гармонической линеаризации. Таблицы коэффициентов статистической и совместной статистической и гармонической линеаризации для различных нелинейностей приведены в литературе.

Вопросы для самопроверки

- 1. Сформулируйте определение и приведите классификацию нелинейных систем. Перечислите особенности нелинейных систем.
- 2. Каковы основные методы исследования и расчета нелинейных систем, применяемые в инженерной практике?
- 3. Расскажите о прямом методе Ляпунова.
- 4. Объясните определение абсолютной устойчивости нелинейных систем по методу В.М.Попова.
- 5. В чем сущность метода гармонической линеаризации нелинейных характеристик?
- 6. Поясните исследование нелинейных систем на фазовой плоскости.
- 7. Какие средства применяются для коррекции нелинейных систем?
- 8. Что означает вибрационная компенсация нелинейностей?
- 9. В каких случаях в нелинейной системе возникает скользящий режим? Как построить систему оптимальную по быстродействию?
- 10. Что такое статистическая линеаризация нелинейных характеристик? Как она осуществляется?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, Вы закончили работу над курсом «Теория автоматического управления». Теперь Вы сумеете проводить анализ и синтез линейных непрерывных, дискретных и нелинейных систем.

Можете не сомневаться – полученные Вами знания пригодятся при работе со многими дисциплинами в процессе учебы и в Вашей профессиональной деятельности! Успехов!

3.3. Глоссарий

Автоматический процесс - процесс, который совершается без участия человека. Возмущающие воздействия M_{l_i} ..., M_l - отражают случайные воздействия окружающей среды на объект управления и обычно недоступны измерению. Требование парирования их влияния и приводит к необходимости создания систем автоматического управления.

Выходные переменные *y*₁, ..., *y*_m - это доступные измерению величины, которые отражают реакцию объекта на управляющие воздействия.

Объект управления - техническое устройство (часть окружающего мира) или процесс, поведение которого нас не устраивает по каким-либо причинам.

Переменные состояния x_{1, \dots, x_n} - это внутренние, как правило, недоступные измерению переменные, которые определяют состояние объекта в каждый момент времени; причем $n \ge m$.

Регулирование - частный случай управления, целью которого является приведение состояния объекта к заданному.

Режимом отработки начальных условий будем называть процесс перехода из произвольных начальных состояний x(0) в равновесные при *v*=const.

Режимом отработки входа будем называть процесс отработки системой скачкообразного изменения входного воздействия v(t) при нулевых начальных условиях, причем на участке переходного процесса *v*=const.

Режимом слежения за входом будем называть процесс **у(1)** → **у** при *v*=var.

Режимом отработки возмущений будем называть процессы, вызванные в системе возмущением M(t) при фиксированных начальных условиях и *v*=const.

Система- совокупность элементов, объединенных общим режимом функционирования. При этом элементом можно называть любое техническое устройство.

Система автоматического управления (САУ) - система, которая работает без участия человека.

Под синтезом будем понимать проектирование регулятора для системы автоматического управления по заданным требованиям к динамическим и статическим свойствам.

Структурной схемой называется графическая модель системы, в которой каждому элементу ставится в соответствие его динамическая характеристика.

Рассмотрим, как получить структурную схему, соответствующую векторноматричному описанию объекта.

Теория автоматического управления (ТАУ) -научно-техническая дисциплина, в рамках которой изучаются свойства систем автоматического управления и разрабатываются принципы их построения и расчета.

Управление - процесс воздействия на объект управления с целью изменения его поведения нужным образом.

Управляющее устройство или регулятор (P), который сравнивает выход управляемого объекта с желаемым и в зависимости от этого вырабатывает управляющий сигнал на объект.

Управляющие воздействия $u_{1, ..., u_m}$ - это переменные, которые находятся в нашем распоряжении; с их помощью можно повлиять на поведение объекта.

Устойчивость - это основное качественное свойство системы автоматического управления, без которого она неработоспособна. Физически устойчивость означает, что процессы в системе стремятся к определенной величине при любых начальных условиях.

3.4. Методические указания к выполнению лабораторных работ

Работа 1. Исследование динамических свойств типовых звеньев САУ 1. Цель работы

Целью работы является изучение основных временных и частотных характеристик позиционного звена 2-го порядка.

2. Основные теоретические положения

В качестве характеристик звеньев необходимо использовать следующие; переходную (ПХ) и импульсную переходную (ИПХ) характеристики; амплитуднофазовую характеристику (годограф Найквиста); логарифмические амшгатудно- и фазочастотные характеристики; логарифмическую амплитудно-фазовую характеристику.

Предметом исследования в работе является изучение влияния параметров звеньев на форму и параметры характеристик, а также определение по характеристикам основных качественных показателей работы звеньев в переходных и установившихся режимах.

Позиционное звено второго порядка имеет передаточную функцию (ПФ)

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\varsigma T s + 1}$$

В зависимости от значения ς звено может быть апериодическим ($\varsigma > 1$), колебательным ($0 \prec \varsigma \prec 1$) и консервативным ($\varsigma = 0$).

Переходная характеристика h(t) - это реакция звена (системы) на единичное ступенчатое воздействие, которое описывается единичной функцией:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{при } t \ge 0 \\ \mathbf{1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \text{при } t < 0, \end{pmatrix}$$

при нулевых начальных условиях.

Импульсная переходная характеристика w(t) - это реакция звена (системы) на единичное импульсное воздействие, описываемое дельта-функцией $\delta(t)$, при нулевых начальных условиях.

3. Задание на лабораторную работу

Исследование звена 2-го порядка

Ввести четыре ПФ звена 2-го порядка для значений *ς* = 0; 0,1; 0,5;
 1,0.

2. Создать на экране график из четырех ПХ. Определить перерегулирование; время переходного процесса; частоту среза; провести анализ корневой плоскости; определить полосу пропускания.

3. Привести анализ, какой параметр влияет на колебательность переходной характеристики

Работа 2. Исследование точности работы САУ

1. Цель работы

Целью работы является изучение закономерностей, связывающих показатели точности работы элементов и систем с их структурой и параметрами.

2. Основные теоретические положения

Объектами исследования являются динамические звенья: интегрирующее (идеальное и инерционное); апериодическое; звено 2-го порядка; двойное интегрирующее, и системы: статическая (с астатизмом 2-го порядка); астатическая 1-го порядка; астатическая 2-го порядка.

Для звеньев основным предметом исследования является установление зависимости их показателей качества работы в установившихся и переходных режимах от наличия и силы жесткой отрицательной обратной связи. Для систем - изучение зависимостей их точности в установившихся режимах от структуры и порядка астатизма системы, а также от вида управляющего воздействия.

Передаточная функция звена или системы, охваченных жесткой отрицательной обратной связью (OC) с коэффициентом k_{∞} определяется как

 $W(s) = \frac{W_0(s)}{1 + k_{oc}W_0(s)}$, где $W_0(s)$ - передаточная функция исходного звена или системы

в разомкнутом состоянии. Наличие ОС и значение k_{oc} оказывают существенное влияние на характер поведения звена (системы) в переходных режимах и на точность воспроизведения входного управляющего сигнала.

Качество работы систем в установившихся режимах оценивается ошибками при воспроизведении типовых управляющих воздействий.

Важной характеристикой точности работы системы является степень подавления возмущающего воздействия. Если в статической системе от такого воздействия возникает постоянная ошибка, то в системах с астатизмом 1-го и 2-го порядков наличие или отсутствие ошибки зависят от расположения интегрирующего звена.

3. Задание на лабораторную работу

Даны две структурные схемы:



Рассчитать передаточные функции по управлению и возмущению каждой из схем.

По построенным характеристикам:

- 1. Определить, на что влияет положение звеньев в схеме.
- 2. Определить время переходного процесса.
- 3. Рассчитать перерегулирование.
- 4. Рассчитать коэффициент демпфирования.
- 5. Дать анализ устойчивости.
- 6. Определить ошибку системы.
- 7. Определить частоты среза.

Работа 3. Определение оптимальных настроечных параметров ПИ- регулятора

1. Цель работы

целью работы является определение оптимальных настроечных параметров ПИрегулятора по минимуму линейной интегральной оценки при ограничении на показатель колебательности *M*; определение влияния отклонений настроек регулятора от расчетных значений на качественные показатели системы.

2. Основные теоретические положения

Система автоматического управления с включенным регулятором может быть структурно представлена состоящей из двух динамических звеньев: объекта или неизменяемой части системы с передаточной функцией $W_0(s)$ и регулятора $W_p(s)$ (рис. 1).



Необходимые качественные показатели системы обеспечиваются выбором типа регулятора и определением его настроечных параметров. При разработке систем управления обычно задаются: точность системы в установившемся режиме - допустимая статическая ошибка є (или отсутствие статической ошибки) и критерии качества, определяющие переходный процесс в системе. В качестве такого критерия в данной работе используется линейная интегральная оценка. Параметры регулятора определяются из условия обеспечения минимума линейной интегральной оценки.

Типовые законы управления и выбор типа регулятора.

Типовые законы управления описываются следующими уравнениями.

1. Пропорциональный закон (П- регулятор).

Уравнение, описывающее пропорциональный закон управления,

$$u(t) = K_{\rm p} \ e(t). \tag{1}$$

Передаточная функция П-регулятора:

$$W(p) = K_{\rm p} \,. \tag{2}$$

П- регулятор имеет один настроечный параметр - коэффициент усиления *К*_р.

2. Пропорционально-интегральный закон (ПИ- регулятор).

ПИ- закон управления описывается уравнением

$$u(t) = k_1 e(t) + k_2 \int_0^t e(t) dt .$$
(3)

Передаточная функция ПИ- регулятора

$$W(p) = \frac{K_p(T_H s + 1)}{s}.$$
(4)

ПИ- регулятор имеет два настроечных параметра - коэффициент усиления K_p и постоянную времени интегрирования T_{μ} (время изодрома).

3. Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД- регулятор). Уравнение идеального ПИД- регулятора:

$$u(t) = k_1 e(t) + k_2 \int_0^t e(t) dt + k_3 \frac{de(t)}{dt} .$$
 (5)

Передаточная функция идеального ПИД- регулятора

$$W(s) = \frac{K_p (T_M s + 1)(T_{\mathcal{A}} s + 1)}{s} \quad . \tag{6}$$

Точная реализация операции дифференцирования невозможна, поэтому реальный ПИД- регулятор имеет передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{K_p (T_H s + 1)(T_{\mathcal{A}} s + 1)}{s(T_1 s + 1)} .$$
(7)

Здесь К_р - коэффициент усиления,

Т_и - постоянная времени интегрирования,

*Т*_д - постоянная времени дифференцирования,

 $T_1 \approx 0, 1 T_{\pi}$.

4. Пропорционально-дифференциальный закон (ПД- регулятор). Уравнение идеального ПД- регулятора:

$$u(t) = k_1 e(t) + k_2 \frac{de(t)}{dt}$$
(8)

Передаточная функция идеального ПД- регулятора:

$$W(s) = K_{\rm p}(T_{\rm d}s + 1) \tag{9}$$

Из-за невозможности выполнить операцию точного дифференцирования передаточная функция ПД- регулятора может быть реализована в виде:

$$W(s) = \frac{K_{\rm p}(T_{\rm A}s+1)}{T_{\rm I}s+1} , \qquad (10)$$

где $T_1 \approx 0, 1T_{\text{д}}$.

Чтобы исключить статическую ошибку, нужно включить в систему регулятор, обладающий интегральными свойствами, т.е. ПИ- или ПИД-регулятор.

Определение настроечных параметров регулятора из условия минимума линейной интегральной оценки. Линейная интегральная оценка определяется выражением:

$$J_{1} = \int_{0}^{\infty} e_{\rm CB}(t) dt \quad , \tag{11}$$

где $e_{cB}(t)$ - свободная (динамическая) составляющая ошибки переходного процесса. Если система устойчива, то $\lim_{t\to\infty} e_{cB}(t) = 0$, интеграл J_1 стремится к конечному

значению, равному площади, заключенной между x_{ycr} и x(t), где x(t) - переходная функция системы (рис. 2)



Рис. 2

На основании графика рис. 2 динамическая составляющая ошибки $e_{cB}(t)$ может быть определена так:

$$e_{\rm cB}(t) = x_{\rm yct} \mathbf{1}(t) - x(t). \tag{12}$$

Если для $e_{cB}(t)$ найдено изображение по Лапласу $E_{cB}(s)$, то

$$J_1 = \lim_{s \to 0} E_{cB}(s) = E_{cB}(0).$$
(13)

Учитывая, что преобразование по Лапласу выражения (12) имеет вид,

$$E_{\rm cB}(s) = x_{\rm ycr} \frac{1}{s} - x(s) = [W_{\rm 3.c.}(0) - W_{\rm 3.c.}(s)] \frac{1}{s} .$$
 (14)

то

$$J_1 = \lim_{s \to 0} \{ [W_{3.c.}(0) - W_{3.c.}(s)] \frac{1}{s} \}.$$
 (15)

Здесь $W_{3.c.}(s)$ - передаточная функция замкнутой системы.

Следует отметить, что линейная интегральная оценка применима к монотонным или апериодическим процессам, поэтому при минимизации J_1 по какомулибо параметру системы необходимо еще наложить ограничение на колебательность переходного процесса. Этими показателями могут быть: показатель колебательности M, запас устойчивости по фазе и амплитуде. Наиболее удобно использовать при синтезе систем показатель колебательности M, так как для хорошо демпфированных систем показатель колебательности выбирается в узких пределах M = 1, 1 - 1, 5.

От показателя колебательности системы зависит перерегулирование переходного процесса. В хорошо спроектированной системе перерегулирование, как правило, не должно превышать 20%, при этом показатель колебательности не должен превышать величины 1,2.

В данной лабораторной работе определяются оптимальные настроечные параметры ПИ-регулятора (4), обеспечивающие минимум линейной интегральной оценки при ограничении на показатель колебательности $M \leq M_{3ag}$.

Передаточная функция объекта в общем случае имеет вид:

$$W_{\rm o}(s) = \frac{K_{\rm o}Q(s)}{S(s)}e^{-\pi s}$$
 (16)

где: $Q(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + 1$, $S(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + 1$

Передаточная функция замкнутой системы с ПИ-регулятором:

$$W_{3.c.}(s) = \frac{K_{\rm p}K_{\rm o}(T_{\rm H}s+1)Q(s)e^{-\tau_{\rm s}}}{sS(s) + K_{\rm p}K_{\rm o}(T_{\rm H}s+1)Q(s)e^{-\tau_{\rm s}}}$$
(17)

И $W_{3.c.}(0) = 1$.

Тогда в соответствии с выражением (15)

$$J_1 = \frac{1}{K_{\rm p}K_{\rm o}} \ . \tag{18}$$

Следовательно, для минимизации J_1 нужно определить K_p и T_u таким образом, чтобы обеспечить минимум отношения $1/K_p$ (или максимум K_p) при ограничении $M \le M_{3aq}$.

В общем схема определения оптимальных настроечных параметров ПИрегулятора сводится к следующему. На основании заданного перерегулирования σ по диаграммам определяют допустимое значение показателя колебательности M_{3aq} . Далее задаются рядом значений постоянной интегрирования T_u и для каждого T_u определяют значение коэффициента усиления регулятора K_p , при котором $M = M_{3aq}$. После этого строится график зависимости $K_p = f(T_u)$ при $M = M_{3aq}$. Максимум полученной зависимости определяет оптимальные значения настоечных параметров ПИ-регулятора.

3. Задание на лабораторную работу

Передаточная функция объекта и допустимый показатель колебательности системы *М*_{зад} задаются преподавателем.

Ввести коэффициенты заданной передаточной функции объекта и ПИ- регулятора (4), причем коэффициент усиления регулятора принимают равным $K_p = A$, а постоянную интегрирования $T_u = B$.

Необходимо предварительно задаться рядом значений T_{μ} . В качестве исходного значения рекомендуется взять постоянную времени интегрирования равной наибольшей постоянной времени объекта: $T_{\mu} = T_{0.max}$ (при необходимости знаменатель передаточной функции объекта разлагают на простые сомножители). Остальные значения T_{μ} берут в пределах от 0,5 до 2,5 от $T_{0.max}$.

В пункте меню нижнего уровня "АЧХ" определяют подбором коэффициент усиления регулятора, чтобы показатель колебательности системы был равен заданному. Данную операцию повторяют для всех выбранных значений T_{μ} . По полученным значениям T_{μ} и $K_{\rm p}$ строится график зависимости $K_{\rm p} = f(T_{\mu})$ при

 $M = M_{3ag}$. Максимум полученной зависимости соответствует оптимальным настроечным параметрам регулятора.

Для найденных оптимальных настроечных параметров регулятора получают амплитудную частотную характеристику и переходный процесс, по которому определяют перерегулирование σ и время регулирования t_p . Кроме того в отчет заносят переходные процессы, полученные при T_u , отличающиеся от оптимального значения примерно в 1,5 и 2 раза в большую и меньшую сторону (при $M = M_{3ad}$).

Работа 4. Исследование дискретной системы автоматического управления

1. Цель работы

Целью работы является изучение влияния параметров непрерывной части системы и периода квантования *T* на характеристики дискретной системы с амплитудно-импульсным модулятором.

2. Основные теоретические положения

Структурная схема дискретной системы с амплитудно- импульсным модулятором представлена на рис. 1.



Обозначения на структурной схеме:

ИЭ - идеальный импульсный элемент,

 Φ 3 - формирователь с передаточной функцией $W_{\phi}(s)$,

НЧ - непрерывная часть с передаточной функцией $W_{\rm H}$ (s).

В данной работе предполагается, что формирователь представляет собой фиксатор нулевого порядка с передаточной функцией:

$$W_{\Phi}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$
 (1)

Так как $e^{pT} = z$ при *Z* - преобразовании, передаточная функция непрерывной приведенной части запишется так:

$$W_{\rm IHH}(s) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{W_{\rm H}(s)}{s}$$
(2)

Переходя к *z* - изображениям, по выражению (2) получаем дискретную передаточную функцию импульсной разомкнутой системы с фиксатором нулевого порядка

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z_L \left[\frac{W_{\rm H}(s)}{s} \right].$$
(3)

Здесь *Z*_{*L*}[.] обозначает символическую запись перехода от непрерывного преобразования Лапласа к Z - преобразованию.

После этого записывается передаточная функция замкнутой дискретной системы и производится анализ системы.

В данной лабораторной работе передаточная функция непрерывной части системы задается в виде звена второго порядка:

$$W_{\rm H}(s) = \frac{K}{as^2 + bs + 1}$$

Коэффициенты передаточной функции и период квантования *T* задаются преподавателем. Для работы может быть задан и другой вид передаточной функции непрерывной части системы 2-го или 3-го порядка.

3. Задание на лабораторную работу

При заданных коэффициентах передаточной функции непрерывной части системы и заданном периоде квантования *Т* находят передаточную функцию замкнутой дискретной системы, и система проверяется на устойчивость.

Изучается влияние изменения коэффициента усиления системы *К* и периода квантования *Т* на характеристики системы.

Изменяют коэффициент усиления. В блоке **W** вводят коэффициенты передаточной функции $W_{\rm H}(s)$, причем принимают K = A. Заданный период квантования *T* устанавливается в блоке идеального импульсного элемента. Подбирается диапазон изменения коэффициента *K* шаг ΔK так, чтобы число точек на каждой ветви корневого годографа было бы в пределах 10 - 12, и примерно половина точек находилась в области устойчивости, остальные - вне этой области. (Ограничения программы: начальное значение *K* не должно равняться 0). Полученный график распечатывается на принтере или срисовывается с экрана монитора с помощью курсора.

Для двух коэффициентов усиления на ветвях годографа: один - для K в области устойчивости, другой - для K в области неустойчивости, нужно получить амплитудно-фазовые характеристики и перенести их в отчет.

Изменяют период квантования *Т*. Устанавливают значение коэффициента усиления из области устойчивости, а период квантования в блоке идеального импульсного элемента обозначают через параметр.

Работа 5. Исследование параметров релейной позиционной системы

1. Цель работы

Целью работы является исследование влияния параметров релейной позиционной системы управления на характеристики отработки заданных перемещений и определение значений параметров, обеспечивающих оптимальный режим по быстродействию.

2. Основные теоретические положения

Упрощенная принципиальная схема исследуемой компьютерной модели приведена на рис.1. Система содержит двигатель постоянного тока М, включенный в диагональ контактного моста, питаемого напряжением 30 В и образованного контактами силовых реле Р1 и Р2.



На одном валу с двигателем находятся: маховик МАХ, редуктор РЕД, тахогенератор ТГ и вращающийся потенциометр R2, выполняющий роль датчика обратной связи по положению. Величина необходимого перемещения исполнительного органа задается с помощью движка потенциометра R1, включенного вместе с потенциометром R2 в мостовую схему, питаемую напряжением $U_{\rm M}$. Тахогенератор ТГ является датчиком скорости вращения двигателя М. С помощью ТГ и потенциометра R3 образуется отрицательная обратная связь по скорости двигателя. Таким образом, исследуемая система является двухконтурной, содержащая контура скорости и положения.

При изменении положения движка потенциометра R1 в мостовой схеме появляется выходное напряжение, прикладываемое к катушке реле РП. Реле РП срабатывает и замыкает свой контакт в цепи реле Р1 и Р2. Напряжение, приложенное к катушке реле РП:

$$U_{\rm P\Pi} = U_{R1} - U_{R2} - U_{R3}.$$

При достижении $U_{\text{PII}} = 0$ двигатель переводится в режим противовключения и быстро тормозится. При выполнении $U_{R1} - U_{R2} = 0$ и $U_{R3} = 0$ двигатель отключается от источника напряжения.

1. Структурная схема системы управления

Структурная схема исследуемой системы управления (рис.2) включает в себя математические модели двигателя, редуктора, тахогенератора и релейной части системы.

Передаточная функция двигателя с редуктором и маховиком

$$W_{\rm M}(s) = \frac{\varphi_{\rm Bbix}(s)}{U(s)} = \frac{k}{T_{\rm M}s + 1} \frac{1}{k_{\rm p}} \frac{1}{s},$$

где $T_{\rm M}$ – механическая постоянная двигателя, учитывающая механическую инерцию маховика ($T_{\rm M} = 3.3$ с); k – коэффициент усиления двигателя по скорости (k = 128об/мин/В); $k_{\rm p}$ – коэффициент передачи редуктора ($k_{\rm p} = 3000$); $\varphi_{\rm вых}$ – угол поворота вращающегося потенциометра R2; U – напряжение питания двигателя (U = 30В); $\omega_{\rm M}$ – скорость вращения двигателя.

Тахогенератор в структурной схеме представлен безинерционным звеном $k_{\rm T\Gamma}$ ($k_{\rm T\Gamma} = 1 \cdot 10^{-3}$ В/об/мин), входящим в состав коэффициента $k_{\rm oc}$, в котором дополнительно учтен коэффициент передачи потенциометра обратной связи по скорости R3.



Рис. 2

Релейная часть системы представлена в схеме моделью реле с гистерезисной характеристикой.

Компьютерная схема



Рис.3

Компьютерная модель (рис. 3) полностью повторяет структурную схему рис.2 в части цифровых значений параметров системы. Отличия от структурной схемы следующие.

Совмещенный узел сравнения структурной схемы заменен двумя раздельными узлами. Коэффициент k_{oc} представлен также двумя коэффициентами усиления: Gain1 моделирует коэффициент передачи тахогенератора $k_{T\Gamma}$, Gain4 эквивалентен потенциометру обратной связи по скорости R3. Переключатель Switch с двумя блоками Constant 1 и Constant 2 заменяет силовые реле P1 и P2.

Осциллограф Scope делает доступным наблюдение скорости и угла поворота выходного вала двигателя; осциллограф ХҮ Graph строит фазовые траектории процессов отработки заданных перемещений.



Рис. 4

Подсистема оценки времени отработки заданного рассогласования (Subsystem of an estimation of time of working off), представленная на рис.4, необходима для определения оптимальной по времени настройки исследуемой системы. Подсистема имеет один вход и два выхода. На вход подается сигнал с датчика скорости (с потенциометра R3). Выход Out1 подсоединен к узлу сравнения контура скорости, выход подсистемы оценки времени (Out2) подключен к цифровому дисплею, на экране которого выводится цифровое значение времени отработки в секундах.

Подсистема оценки времени содержит блок выполнения операций отношения (Relational Operator), настроенный на сравнение сигнала обратной связи по скорости с постоянным сигналом с Constant 3. Выходной сигнал блока операций отношения управляет

переключателем Switch 1, который пропускает, либо задерживает сигнал обратной связи. Кроме двух описанных блоков подсистема содержит также дискретный источник времени (Digital Clock), работающий совместно с цифровым дисплеем.

3. Порядок выполнения работы

1. Установить значение параметра Gain 4 равным нулю (отсутствие в системе обратной связи по скорости) и наблюдать установление в системе автоколебаний. Характер и параметры автоколебаний показаны на рис. 5



Рис. 5

Контур	Амплитуда	Частота
Положения	0,45	0,17
корости	0,5	0,18

2. Установить значение параметра Gain 4 равным единице (максимальный коэффициент обратной связи по скорости) и наблюдать в системе скользящий режим движения к равновесию.


Рис.6

Контур	Амплитуда	Частота
Положения	_	_
Скорости	0,04	2,86

2. Определить значение коэффициента передачи Gain 4, соответствующее оптимальному режиму (отсутствие на фазовой плоскости скользящего и колебательного режимов).

Найденное значение Gain 4 равно 0,4; время отработки заданного перемещения 12 с.





Рис. 7

4. Выполнить исследование влияния инерционности привода на параметры переходных процессов отработки заданного перемещения, изменяя постоянную времени в Transfer Fcn2 в 1.5 – 2 раза.

Значение Gain 4 равно 0,7; время отработки 16,1 с.



Рис. 8

Автоколебания:

Контур	Амплитуда	Частота
Положения	0,67	0,1
Скорости	0,53	0,08

Скользящий режим:

Контур	Амплитуда	Частота
Положения	_	_
Скорости	0,025	1,43

4. БЛОК КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Методические указания к выполнению курсовой работы

Методические указания приведены в отдельном издании: Теория управления: Методические указания к выполнению курсовой работы. - Спб.: СЗТУ, 2002

4.2. Методические указания к выполнению контрольной работы

Методические указания приведены в отдельном издании: Теория управления.: Рабочая программа, задания на контрольные работы. - Спб.: СЗТУ, 2003



4.3. Тренировочные тесты текущего контроля (по разделам)

Тест № 1

1. Автоматическая система управления – это система, в которой

- а. Рабочие операции выполняются без участи человека
- b. Все рабочие и управляющие операции выполняют автоматические устройства без участия человека
- с. Управляющие операции выполняются с частичным участием человека

2. Автоматизированная система управления – это система, в которой

- а. Рабочие операции выполняются без участи человека
- b. Все рабочие и управляющие операции выполняют автоматические устройства без участия человека
- с. Управляющие операции выполняются с частичным участием человека

3. Алгоритм управления – это совокупность предписаний, определяющих необходимые воздействия на

- а. Объект управления с целью осуществления его алгоритма функционирования
- b. Устройство управления с целью осуществления его алгоритма функционирования

с. Исполнительное устройство с целью осуществления контроля его работоспособности

Тест № 2

1. Управляемая величина – это

- а. Величина на выходе управляющего устройства
- b. Величина сигнала обратной связи
- с. Величина на выходе объекта управления
- 2. Назовите устройства, составляющие систему автоматического управления
- а. Чувствительные устройства, вычислительное устройство, исполнительное устройство, объект управления
- b. Чувствительные устройства, вычислительное устройство, исполнительное устройство
- с. Чувствительные устройства, исполнительное устройство, объект управления

3. Назовите фундаментальные принципы управления

- а. Принцип разомкнутого управления, принцип компенсации, принцип прямой связи
- b. Принцип разомкнутого управления, принцип компенсации, принцип обратной связи
- с. Принцип замкнуто-разомкнутого управления, принцип компенсации, принцип обратной связи

4. Перечислите основные виды автоматического управления

- а. Стабилизация, программное управление, следящие системы, оптимальные системы, адаптивные системы
- b. Стабилизация возмущения, управление по возмущению, следящие системы, оптимальные системы, адаптивные системы

с. Стабилизация ошибки управления, оперативное управление, следящие системы, оптимальные системы, адаптивные системы.

5. Перечислите основные законы регулирования

- а. Пропорциональный, дифференциальный, пропорционально-интегральный, пропорционально-интегрально-дифференциальный
- b. Пропорциональный, интегральный, пропорционально-квадратичный, пропорционально-интегрально-дифференциальный
- с. Пропорциональный, интегральный, пропорционально-интегральный, пропорционально-интегрально-дифференциальный

Тест № 3

1. Какие типовые воздействия используются при изучении динамики элементов систем

- а. Гармонические, гиперболические, линейно-возрастающее, типа дельта-функции
- b. Гармонические, параболические, линейно-возрастающее, типа дельтафункции
- с. Гармонические, ступенчатые, линейно-возрастающее, типа дельтафункции

2. Коэффициенты линейного дифференциального уравнения САУ называются

- а. Переменными параметрами
- b. Переменными величинами
- с. Параметрами
- 3. Переход от дифференциального уравнения к операторному осуществляется путем замены
- а. Символа производной d/dt на символ р

- b. Символа производной d/dt на лапласову переменную
- с. Символа входной переменной на символ р

4. Переходная функция h(t) – это переходный процесс

- а. При гармоническом воздействии
- b. При ступенчатом воздействии любой величины
- с. При единичном ступенчатом воздействии

5. Передаточная функция W(p) – отношение изображения по Лапласу

- а. Выходной величины ко входной при любых начальных условиях
- b. Выходной величины ко входной при нулевых начальных условиях
- с. Входной величины к выходной при нулевых начальных условиях

6. "Нуль" передаточной функции – это

- а. Корни многочлена числителя передаточной функции
- b. Равные корни многочленов числителя и знаменателя передаточной функции
- с. Корни многочлена знаменателя передаточной функции

7. Полюсы передаточной функции – это

- а. Корни многочлена числителя передаточной функции
- b. Равные корни многочленов числителя и знаменателя передаточной функции
- с. Корни многочлена знаменателя передаточной функции

8. Импульсная переходная функция w(t) – это первая производная

- а. От входного воздействия
- b. От сигнала ошибки управления
- с. От переходной характеристики

9. Составляющая переходного процесса называется вынужденной, если она стремится

а. К нулевому значению

- b. К бесконечности
- с. К новому установившемуся значению

10. Составляющая переходного процесса называется свободной, если она стремится

- а. К нулевому значению
- b. К бесконечности
- с. К новому установившемуся значению

11. Характеристический полином – это

- а. Собственный оператор дифференциального уравнения САУ в операторной форме
- b. Правая часть дифференциального уравнения САУ
- с. Оператор воздействия

12. Фазовая частотная характеристика – это

- а. Зависимость фазы входного сигнала от частоты
- b. Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты
- с. Зависимость фазы выходного сигнала от амплитуды входного сигнала

13. Амплитудная частотная характеристика – это зависимость

- а. Амплитуды входного сигнала от частоты
- b. Амплитуды выходного сигнала от амплитуды входного сигнала
- с. Отношения амплитуд выходного и входного сигнала от частоты

14. Выражение для амплитудно фазовой характеристики W(jω) элемента или системы из его передаточной функции можно получить путем замены лапласовой переменной на

- α . На частоту: s \rightarrow j ω
- β . На комплексную величину: s \rightarrow j ω
- ^{с.} На комплексную величину: $s \rightarrow j\omega^2$

15. В основе разделения звеньев на типовые лежит

- а. Уравнения статического режима
- b. Правая часть дифференциального уравнения
- с. Дифференциальное уравнение

16. Максимальный порядок дифференциального уравнения типовых звеньев –

- а. Первый
- b. Второй
- с. Третий

17. Укажите, какой параметр типового звена определяет величину выходного сигнала

- а. Коэффициент передачи
- b. Член характеристического полинома, не содержащий лапласовой переменной
- с. Член полинома числителя передаточной функции, не содержащий лапласовой переменной

18. Укажите, какой параметр типового звена определяет длительность переходного процесса

- а. Максимальное значение полюса передаточной функции типового звена
- b. Максимальное значение нуля передаточной функции типового звена
- с. Минимальное значение полюса передаточной функции типового звена

19. Значение фазовой функции безинерционного звена равно

- а. Нулю
- b. Бесконечности
- с. 90 градусам

20. Укажите уравнения для логарифмических частотных характеристик безинерционного звена

- a. $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k \quad \varphi(\omega) = 0$
- b. $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k \quad \varphi(\omega) = 90$
- c. $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k \quad \varphi(\omega) = 180$

21. Какое уравнение соответствует звену первого порядка

a.
$$ky = T \frac{dx}{dt} + x$$

b. $T \frac{dy}{dt} + y = kx$

a.
$$T\frac{dy}{dt} + y = k\frac{dx}{dt}$$

22. Какой параметр апериодического звена изменяет установившееся значение выходной координаты

- а. Постоянная времени
- b. Первая производная от выходной координаты
- с. Коэффициент передачи

23. Как называется график переходного процесса выходной координаты звена, если на его вход подается единичное ступенчатое воздействие?

- а. Переходный процесс
- b. Переходная характеристика (функция)
- с. Импульсная переходная функция

24. Какой характер переходной характеристики (колебательный, апериодический, скачкообразный) имеет звено с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$
, если $T_1 = T_2$

- а. Апериодический
- b. Монотонный
- с. Колебательный

25. Какой характер имеют корни характеристического уравнения колебательного звена?

- а. Комплексные сопряженные
- b. Вещественные и разные
- с. Вещественные и равные

26. В каких пределах изменяется фазочастотная характеристика колебательного звена?

- а. От нуля до 90 градусов
- b. От нуля до 180 градусов
- с. От нуля до + 180 градусов

27. Чему равен максимальный наклон в дБ/декаду по знаку и величине ЛАЧХ колебательного звена

- а. 20 дБ на декаду
- b. 40 дБ на декаду
- с. 60 дБ на декаду

28. Какой характер и знак имеют корни характеристического уравнения апериодического звена второго порядка?

- а. Отрицательные вещественные
- b. Комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью
- с. Комплексные сопряженные с положительной вещественной частью

29. Устойчиво ли колебательное звено?

- а. Нестойчиво
- b. На границе устойчивости
- с. Устойчиво

Тест № 4

1. Из дифференциального уравнения САУ получить уравнение статического режима можно путем

- а. Интегрирования дифференциального уравнения системы
- b. Преобразования дифференциального уравнения системы по Лапласу при нулевых начальных условиях
- с. Приравнивания всех производных нулю
- 2. Для статического режима САУ характерно
- а. Постоянство управляющего воздействия
- b. Постоянство возмущающего воздействия
- с. Постоянство всех координат системы

3. Назовите две разновидности статических характеристик в зависимости от типа воздействий

- а. Статические характеристики по управлению и ошибке
- b. Статические характеристики по управлению и возмущению
- с. Статические характеристики по возмущению и ошибке

4. Укажите, каким показателем оценивают статическую характеристику по управлению

- а. Шириной зоны неодназначности
- b. Коэффициентом нелинейности
- с. Коэффициентом передачи

5. Под коэффициентом передачи статической системы понимают

- а. Отношение выходной координаты к управляющему воздействию
- b. Отношение входной координаты к выходной
- с. Отношение выходной координаты к ошибке управления

6. Перечислите типовые соединения звеньев

- а. Прямое и обратное соединение звеньев
- b. Параллельное и обратное соединение звеньев
- с. Последовательное и параллельное соединения; звено, охваченное обратной связью

7. Особенность главной отрицательной обратной связи заключается в том, что

- а. Сигнал с выхода САУ подается на ее вход с обратным знаком
- b. Сигнал с выхода САУ подается на исполнительное устройство с обратным знаком
- с. В том, что сигнал с выхода регулятора подается на его вход с обратным знаком

8. Формула $K = K_1 + K_2$ справедлива

- а. Для звена, охваченного обратной связью
- b. Для последовательного соединения звеньев
- с. Для параллельного соединения звеньев

9. Формула $K = K_1 \cdot K_2$ справедлива

- а. Для звена, охваченного обратной связью
- b. Для последовательного соединения звеньев
- с. Для параллельного соединения звеньев

10.Уменьшить ошибку управления замкнутой САУ в статическом режиме можно за счет

- а. Введения производной от ошибки управления
- b. Увеличения постоянных времени звеньев
- с. Астатического управления

11. На рисунке приведена структурная схема одноконтурной САУ, где Y – выходная величина, X и Z соответственно задающее и возмущающее воздействия. Определите передаточную функцию по задающему воздействию.



- a. $W_3 = \frac{W_1}{1 + W_2 W_3}$
- b. $W_3 = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3}$

c.
$$W_3 = \frac{W_1 W_2}{1 - W_1 W_2 W_3}$$

12.Каким типовым динамическим звеном является разомкнутый контур колебательной модели системы

- а. Колебательным звеном
- b. Фильтром Баттерворта
- с. Реальным интегрирующим звеном

13. Как называется система стабилизации, не реагирующая на возмущающее воздействие?

- а. Инвариантная система с компенсирующей связью по возмущению
- b. Инвариантная система с компенсирующей связью по задающему воздействию
- с. Абсолютно инвариантная система

14. Как называется система, которая воспроизводит задающее воздействие с минимальной ошибкой?

а. Инвариантная система с компенсирующей связью по возмущению

- b. Инвариантная система с компенсирующей связью по задающему воздействию
- с. Абсолютно инвариантная система

15. Какие функциональные элементы входят в состав неизменяемой части синтезируемой САУ?

- а. Усилительно-преобразовательный блок, корректирующие устройства
- b. Объект управления, регулирующий орган, исполнительное устройство, датчики
- с. Корректирующие устройства, регулирующий орган, исполнительное устройство, датчики

16. Какие функциональные элементы входят в изменяемую часть синтезируемой САУ?

- а. Усилительно-преобразовательный блок, корректирующие устройства
- b. Объект управления, регулирующий орган, исполнительное устройство, датчики
- с. Корректирующие устройства, регулирующий орган, исполнительное устройство, датчики

17. Что является основой для выбора элементов неизменяемой части функциональной схемы САУ?

- а. Разработка и расчеты
- b. Имеющееся в наличие оборудование
- с. Каталоги оборудования

18. Полная компенсация инерционности объекта за счет корректирующих устройств достигается путем включения

- а. В цепь главной отрицательной обратной связи звена с обратной объекту управления передаточной функцией
- b. В цепь главной отрицательной обратной связи звена с передаточной функцией объекта управления

с. В прямой канал управления звена с обратной передаточной функцией, охваченной обратной связью звеном с передаточной функцией объекта управления

19. Полная компенсация инерционности объекта за счет корректирующих устройств достигается путем включения

- а. В цепь главной отрицательной обратной связи звена с обратной объекту управления передаточной функцией
- b. В цепь главной отрицательной обратной связи звена с передаточной функцией объекта управления
- с. В прямой канал управления звена с обратной передаточной функцией, охваченной обратной связью звеном с передаточной функцией объекта управления

20. Как компенсируется в идеальной замкнутой системе чистое запаздывание объета

- а. Включением регулятора Ресквика или упредителя Смита
- b. Включением в цепь обратной связи реального дифференцирующего звена
- с. Включением в цепь обратной связи реального интегрирующего звена

21. По какому каналу передачи воздействий необходимо добиваться инвариантности в стабилизирующих системах?

- а. По каналу управления
- b. По каналу возмущения
- с. По каналу главной обратной связи

22. По какому каналу передачи воздействий необходимо добиваться инвариантности в следящих системах

- а. По каналу управления
- b. По каналу возмущения
- с. По каналу главной обратной связи

23. Что является принципиальной основой структурного и параметрического синтеза идеальных систем управления?

- а. Компенсация инерционности регулятора
- b. Компенсация инерционности исполнительного устройства
- с. Компенсация инерционности объекта управления

24. Каким будет запас устойчивости по фазе, если на частоте среза ЛАЧХ разомкнутой системы текущее значение фазы равно 120 градусов?

- а. 240 градусов
- b. 180 градусов
- с. 60 градусов

25. Какие свойства автоматической системы принято рассматривать при оценке ее качества?

- а. Динамические и статические свойства
- b. Свойства, обусловленные заложенные принципом управления
- с. Свойства алгоритма управления

26. Какие показатели качество относятся к прямым показателям?

- а. Распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы
- b. Запасы устойчивости
- с. Время переходного процесса, перерегулирование максимальное отклонение управляемой переменной

27. Какие показатели качества относятся к частотным показателям?

- а. Распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы
- b. Запасы устойчивости по модулю и по фазе
- с. Показатель колебательности М, форма частотной характеристики

28. Какие показатели качества относятся к корневым показателям?

а. Колебательность, степень устойчивости

- b. Запасы устойчивости по модулю и по фазе
- с. Значение нулей передаточной функции

29. Какие еще существуют показатели качества кроме прямых, частотных и корневых?

- а. Дифференциальный
- b. Интегральный
- с. Интегро-дифференциальные

30. Какие оценки качества являются косвенными?

- а. Коэффициенты характеристического уравнения
- b. Порядки полиномов числителя и знаменателя передаточной функции
- с. Частотные, корневые, интегральные оценки

31. По какой динамической характеристике системы оценивают прямые показатели качества?

- а. По кривой переходного процесса
- b. По импульсной переходной функции
- с. По свободной составляющей переходного процесса

32. Какой из частотных показателей характеризует быстродействие системы

- а. Частота среза
- b. Первая частота сопряжения ЛАЧХ
- с. Полоса пропускания

33. Как связано значение вещественной части корня α_{\min} , ближайшего к мнимой оси, с длительностью переходного процесса t_n

- а. Чем больше вещественная часть корня, тем длиннее переходный процесс
- b. Длительность переходного процесса не зависит от значения вещественной части ближайшего корня
- с. Чем больше вещественная часть корня, тем короче переходный процесс

34. Назовите два параметра колебательности звена, характеризующих их динамические свойства

- а. Коэффициент демпфирования и обобщенная постоянная времени
- b. Мнимая часть пары комплексных сопряженных корней характеристического полинома и коэффициент передачи
- с. Действительная часть пары комплексных сопряженных корней характеристического полинома и коэффициент передачи

35.Какие существуют интегральные критерии оценки качества систем?

- а. Дифференциальный и дифференциально-интегральный
- b. Средневзвешанный, пропорциональный
- с. Линейный, квадратичный, модульный интегральный

36. Какой из двух переходных процессов с одним и тем же установившемся значением заканчивается раньше – с большим значением линейной интегральной оценки или с меньшим?

- а. С большим
- b. Время переходного значения для этого случая не зависит от численного значения интегральной оценки
- с. С меньшим

37.Для каких переходных процессов можно применять линейную интегральную оценку?

- а. Для апериодических переходных процессов
- b. Колебательных
- с. Для любых

38. Какие значения перерегулирования в процентах обеспечивает критерий модульного оптимума (ОМ)?

- a. 43%
- b. 4,3%
- c. 10%

39. Какие значения перерегулирования в процентах обеспечивает критерий симметричного оптимума (СО)?

- a. 43%
- b. 4,3%
- c. 10%

40. В каких случаях лучше применять настройку системы по критерию СО?

- а. При оптимизации систем, отрабатывающих изменение задающего воздействия
- b. При оптимизации систем, отрабатывающих изменение возмущающего воздействия
- с. В любом случае

41. В каких случаях лучше применять настройку системы по критерию OM?

- а. При оптимизации систем, отрабатывающих изменение задающего воздействия
- b. При оптимизации систем, отрабатывающих изменение возмущающего воздействия
- с. В любом случае

42. Какую форму амплитудной частотной характеристики имеет идеальный фильтр низкой частоты?

- а. Близкую по форме к треугольной
- b. Близкую по форме к прямоугольной
- с. Близкую по форме к трапецеидальной

43. Какой фильтр имеет амплитудную частотную характеристику, близкую по форме к прямоугольной?

- а. Фильтр высокой частоты
- b. Резонансный фильтр

с. Фильтр Баттерворта

44. Как влияет на перерегулирование выходной величины увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы?

- а. Снижает перерегулирование
- b. Не влияет на величину перерегулирования
- с. Увеличивает перерегулирование

45. При расчете настроечных параметров систем, построенных по принципу подчиненного регулирования, с какого контура начинают последовательную оптимизацию?

- а. Такие системы целесообразно оптимизировать начиная с внешнего контура и кончая внутренним
- b. В таких системах целесообразно оптимизировать только внешний контур
- с. Такие системы целесообразно оптимизировать начиная с внутреннего контура и кончая внешним

46. Какие типовые регуляторы применяются для инерционных объектов без запаздывания 2-го и 3-го порядков?

- а. П регуляторы
- b. И регуляторы
- с. ПИ и ПИД регуляторы

47. Почему не применяются дифференциальные регуляторы?

- а. Потому что они не обеспечивают необходимых запасов устойчивости
- b. Потому что они не обеспечивают необходимого быстродействия
- с. Потому что они не работоспособны в статических системах

48. К чему приводит увеличение постоянной интегрирования ПИ – регулятора?

а. К увеличению времени переходного процесса и снижению перерегулирования

- b. К снижению времени переходного процесса и снижению перерегулирования
- с. К увеличению времени переходного процесса и увеличению перерегулирования

Тест№ 5

- 1. Если свободная составляющая $x_{ce}(iT)$ определяется решением однородного разностного уравнения импульсной системы $(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n) X(z) = 0$, то из какого уравнения определяются корни характеристического уравнения z_k ?
 - a. $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n + 1 = 0$
 - b. $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$
 - c. $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 1$
- 2. Закончите общее условие устойчивости импульсных систем. Импульсная система устойчива, если свободная составляющая переходного процесса x_{ce}(*iT*) с течением времени стремится к ...
- а. Принужденному значению
- b. 0
- c. 1
- 3. Если корни характеристического уравнения импульсной системы расположены в плоскости корней внутри единичного круга (см. рис.), то какой вывод можно сделать об устойчивости системы?



- а. Система не устойчива
- b. Система находится на границе устойчивости
- с. Система устойчива

- 1. Если все коэффициенты характеристического уравнения (кроме первого a_0) равны нулю, т.е. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, то чему будет равна длительность переходного процесса?
- а. Переходный процесс заканчивается за время *nT*
- b. Переходный процесс заканчивается за время 2nT
- с. Переходный процесс заканчивается за время 3*nT*
- 2. Как получить уравнение для построения кривой Михайлова?
- а. В характеристический полином замкнутой системы F(z) подставляют $z = e^{j\omega t}$ и строят годограф вектора $F(e^{j\omega t})$
- b. В дискретную передаточную функцию системы W(z) подставляют $z = e^{j\omega t}$ и строят годограф вектора $F(e^{j\omega t})$
- с. В полином числителя дискретной передаточной функции $K(z^{-1})$ подставляют $z = e^{j\omega t}$ и строят годограф вектора $K(e^{j\omega t})$
- 3. На какой угол повернется характеристический вектор $F(e^{j\omega t})$ для устойчивой импульсной системы *n*-го порядка при изменении от 0 до *T*?
- а. На угол 90 градусов
- b. На угол $-n\pi$
- а. На угол $+n\pi$
- 4. Какой порядок имеет устойчивая импульсная система, годограф Михайлова для которой показан на рисунке?
- а. Четвертый
- b. Пятый
- с. Второй



5. Сформулируйте критерий Найквиста для импульсной системы Система устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика ^W e^{jωt} устойчивого разомкнутого контура ...

- а. Охватывает точку (-1; j0)
- b. Не охватывает точку (-1; j0)
- с. Проходит через точку (-1; j0)

6. По каким показателям оценивают качество импульсных систем?

- а. Длительность переходного процесса, перерегулирование, точность
- b. Длительность переходного процесса, величина пульсаций управляемой величины, величина дискретизации
- с. Длительность переходного процесса, тип модуляции

7. По какому показателю оценивают точность импульсной системы?

- а. По установившемуся значению управляющего сигнала
- b. По установившемуся значению пульсаций управляемой величины
- с. По установившемуся значению сигнала ошибки

Тест № 6

1. Закончите предложение Автоматическая система является нелинейной, если ...

- а. Все ее элементы описываются нелинейными уравнениями
- b. Два ее элементы описываются нелинейными уравнениями
- с. Хотя бы один ее элемент описываются нелинейным уравнением

2. Закончите предложение Система " устойчива в малом", если ...

- а. Она устойчива при малых начальных отклонениях
- b. Она устойчива при нулевых начальных отклонениях

3. Закончите предложение Система " устойчива в большом", если ...

а. Она устойчива при гармоническом управляющем воздействии

- b. Она устойчива при единичном ступенчатом воздействии
- с. Она устойчива при больших начальных отклонениях

4. Закончите предложение Система " устойчива в целом", если ...

- а. Она устойчива при линейно-возрастающем управляющем воздействии
- b. Она устойчива при гармоническом управляющем воздействии
- с. Она устойчива при любых отклонениях

5. Закончите предложение Автоколебания – это устойчивые собственные колебания, возникающие из-за ...

- а. Нелинейных свойств системы
- b. Гармонического воздействия на систему
- с. Элементов с резонансными свойствами

6. Каковы основные методы исследования и расчета нелинейных систем, применяемых в инженерной графике?

- а. Метод фазовых траекторий, метод трапеций
- b. Метод амплитудно-фазовых траекторий, метод гармонической линеаризации
- с. Метод фазовой траектории, метод гармонической линеаризации

7. Поясните принцип исследования устойчивости нелинейных систем второго порядка на фазовой плоскости

- а. Устойчивой нелинейной системе соответствует фазовая траектория, стремящаяся к началу координат фазовой плоскости
- b. Устойчивой нелинейной системе соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат фазовой плоскости
- с. Устойчивой нелинейной системе соответствует замкнутая фазовая траектория

- 8. Метод гармонической линеаризации нелинейных характеристик заключается в замене существенно нелинейного элемента эквивалентным линейным звеном в предположении, что сигнал на входе нелинейного элемента является ...
- а. Дискретным
- b. Линейно возрастающим
- с. Синусоидальным

ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ НА ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

N⁰																									
тес-							H	Іомер	ра во	прос	ов / Е	Іомер	ра пр	авил	ьных	к отв	етов								
та																									
1	Номер вопроса	1	2	3																					
	Ответ	b	с	а																					
2	Номер вопроса	1	2	3	4	5																			
	Ответ	c	а	b	a	c																			
	Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
3	Ответ	c	c	a	c	b	а	c	c	c	a	а	b	c	b	c	b	а	с	а	а	b	c	b	c
5	Номер вопроса	25	26	27	28	29																			
	Ответ	а	с	b	а	с																			
	Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	Ответ	с	с	b	c	а	с	а	с	b	c	b	с	а	b	b	а	с	а	с	а	b	а	с	с
4	Номер вопроса	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
	Ответ	a	с	с	a	b	с	a	с	с	a	с	b	a	b	a	b	а	b	с	с	с	с	с	a

5	Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10							
C	Ответ	b	b	с	а	а	с	с	b	а	с							
6	Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8									
	Ответ	с	a	с	с	а	с	а	с									

4.4. Итоговый контроль. Вопросы к экзаменам и зачету

1. Перечислите принципы управления и поясните их.

2. Что представляет собой закон управления?

3. Каково назначение регулятора в системе?

4. По каким признакам классифицируются системы управления?

5. Дайте классификацию систем по виду задающего воздействия.

6. Назовите необходимые и достаточные условия линейности систем.

7. Что представляет собой система управления?

8. Перечислите основные элементы системы автоматического управления

9. Каково назначение математического описания систем?

10. Что такое динамика системы?

11. Чем отличается математическое описание динамики системы от описания ее статики?

12. Что представляет собой условие физической реализуемости системы?

13. Каким образом линеаризуются дифференциальные уравнения?

14. Назовите формы записи линеаризованных уравнений.

15. Каким образом перейти к первой форме записи дифференциального уравнения звена? Как в этом случае называются коэффициенты?

16. Как перейти от дифференциального уравнения к операторному?

17. Дайте определение передаточной функции.

18. Как по дифференциальному уравнению звена найти его передаточную функцию?

19. Что такое динамическое звено и его характеристика?

20. Дайте определение основных характеристик.

21. Какие частотные характеристики используются для исследования систем?

22. Почему ЛЧХ нашли большое применение в инженерной практике?

23. По каким признакам классифицируются типовые динамические звенья?

24. Перечислите группы основных типов звеньев.

25. Что представляет собой структурная схема системы управления?

26. Какие способы соединений звеньев используются в системах?

27. Как находятся передаточные функции смешанных соединений звеньев?

28. Дайте определение устойчивости системы с физической и математической точек зрения.

29. Какой характер имеет переходный процесс в устойчивой и неустойчивой системах?

30. Сформулируйте необходимое условие устойчивости.

31. Что такое критерии устойчивости?

32. Что такое граница устойчивости? Каким образом при этом расположены

корни характеристического уравнения системы на плоскости комплексного переменного?

33. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.

34. Каким образом по критерию Гурвица определяются границы устойчивости?

35. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.

36. Что такое запасы устойчивости? Каким образом они определяются по АФЧХ разомкнутой системы?

37. Как определяются запасы устойчивости по ЛЧХ?

38. Дайте понятие качества работы системы управления. Чем оно определяется?

39. Что представляют собой критерии качества?

40. Как производится оценка точности работы систем?

41. Чему равны первые два коэффициента ошибок в системах с астатизмом первого и второго порядков?

42. Определите показатели качества переходного процесса и частотные показатели, поясните их физический смысл.

43. Поясните связь частотных показателей качества работы системы с частотными характеристиками разомкнутой цепи.

44. Что представляют собой корневые оценки качества?

45. В чем удобство и недостатки интегральных критериев качества?

46. Каким образом экспериментальным путем можно оценить качество работы системы?

47. Какова роль моделирования систем управления?

48. Перечислите общие методы повышения точности систем управления. Поясните их.

49. Дайте понятие астатических системы управления. Каким образом определяется степень астатизма?

50. В чем преимущество повышения степени астатизма системы с помощью изодромных устройств?

51. Какая система является инвариантной по отношению к внешним воздействиям

52. Сформулируйте определение дискретных систем. Какова структура и классификация импульсных систем?

53. Расскажите о математическом аппарате исследования импульсных систем.

54. Сформулируйте теорему Котельникова-Шеннона. Поясните ее физический смысл и практическое значение при проектировании дискретных систем.

55. Поясните методы определения передаточных функций импульсных систем. Каковы особенности передаточных функций статических и астатических систем?

56. Каким образом определяются частотные характеристики импульсных систем?

57. Какими способами определяются переходные процессы в дискретных системах?

58. Сформулируйте условия устойчивости импульсных систем.

59. Каким образом оценивается точность работы импульсных систем?

60. Каков порядок синтеза цифровых систем?

61. Перечислите методы определения передаточных функций корректирующих устройств.

62. Укажите виды структурных схем цифровых фильтров.

63. Сформулируйте определение и приведите классификацию нелинейных систем.

64. Перечислите особенности нелинейных систем.

65. Каковы основные методы исследования и расчета нелинейных систем, применяемые в инженерной практике?

66. Расскажите о прямом методе Ляпунова.

67. Объясните определение абсолютной устойчивости нелинейных систем по методу В.М.Попова.

68. В чем сущность метода гармонической линеаризации нелинейных характеристик?

69. Поясните исследование нелинейных систем на фазовой плоскости.

70. Какие средства применяются для коррекции нелинейных систем?

71. Что означает вибрационная компенсация нелинейностей?

72. В каких случаях в нелинейной системе возникает скользящий режим?

73. Как построить систему оптимальную по быстродействию?

74. Что такое статистическая линеаризация нелинейных характеристик?

75. Как она осуществляется?

СОДЕРЖАНИЕ

	стр
1. Информация о дисциплине	3
1.1. Предисловие	3
1.2. Содержание дисциплины и виды учебной работы	4
1.2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы	4
1.2.2. Перечень видов практических занятий и видов контроля	5
2. Рабочие учебные материалы	5
2.1. Рабочая программа	5
2.2. Тематический план дисциплины	11
2.2.1. Тематический план для студентов очной формы обучения	11
2.2.2. Тематический план для студентов очно-заоченой формы	
обучения	13
2.2.3. Тематический план для студентов заочной формы обучения	15
2.3. Структурно-логическая схема дисциплины «Теория	
автоматического управления»	17
2.4. Практический блок	18
2.4.1. Лабораторный практикум	18
2.5. Временной график изучения дисциплины	18
2.6. Балльно-рейтинговая система	19
3. Информационный ресурсы дисциплины	20
3.1. Библиографический список	20
3.2. Опорный конспект по дисциплине	21
Введение	21
Раздел 1. Введение. Основные понятия и определения	21
1.1. Основные понятия	23
Вопросы для самопроверки	24
Раздел 2. Общая характеристика автоматического управления	24
2.1. Классификация и общая характеристика САУ	24
Вопросы для самопроверки	28
Раздел 3. Теория линейных и непрерывных систем	29
3.1. Виды математических моделей САУ	29
3.2. Структурные схемы САУ	35
3.3. Преобразование структурных схем	39
3.3.1. Последовательное соединение звеньев	39
3.3.2. Параллельные соединения звеньев	40
3.3.3. Соединение с обратной связью	40

3.3.4. Перестановка местами звеньев структурной схемы	40
3.3.5. Перестановка местами узлов суммирования	
и динамических звеньев	41
3.3.6. Перестановка местами узлов разветвления	
и других звеньев структурной схемы	42
3.3.7. Инверсия направления прямого пути	42
3.3.8. Инверсия замкнутого контура	43
3.4. Ориентированный графы непрерывных САУ	43
3.5. Описание систем управления моделями пространства	
состояний	46
3.5.1. Уравнения состояния САУ	46
3.5.2. Векторно-матричное описание непрерывной системы	48
3.5.3. Преобразование Лапласа матричного уравнения	
системы управления	51
3.6. Временные характеристики систем и их элементов	52
3.6.1. Импульсные переходные характеристики	53
3.6.2. Переходные характеристики	53
3.7. Частотные характеристики непрерывных систем	
автоматического управления	54
3.7.1. Общие положения	54
3.7.2. Построение частотных характеристик	55
3.7.3. Логарифмические частотные характеристики	55
3.8. Типовые звенья	59
3.8.1. Безынерционное звено	60
3.8.2. Апериодическое звено	61
3.8.3. Интегрирующее звено	63
3.8.4. Дифференцирующее звено	64
3.8.5. Колебательное звено	65
3.9. Пример составления математического описания	67
Вопросы для самопроверки	70
Раздел 4. Анализ и синтез линейных САУ	71
4.1. Устойчивость линейных непрерывных систем управления	71
4.1.1. Общее условие устойчивости замкнутых непрерывных	
систем	72
4.1.2. Критерии устойчивости	73
4.1.2.1. Алгебраические критерии устойчивости	73
4.1.2.2. Частотные критерии устойчивости	76

4.2. Анализ точности и качества процессов управления	84
4.2.1. Оценка точности САУ в установившихся режимах	84
4.2.1.1. Точность САУ в режиме стабилизации	84
4.2.1.2. Установившиеся ошибки при отработке медленно	
меняющихся внешних воздействий (коэффициент ошибок).	88
4.2.1.3. Анализ влияния порядка астатизма системы на	
установившиеся ошибки при отработке типовых степенных	
воздействий	90
4.2.2. Оценка качества работы САУ в переходных режимах	93
4.2.2.1. Показатели качества переходных процессов	93
4.2.2.2 Связь частотных показателей с основными прямыми	
показателями качества	97
4.3. Синтез систем автоматического управления	98
4.3.1. Задачи и классификация методов синтеза	98
4.3.2. Синтез желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы	100
4.3.2.1. Синтез желаемой ЛАЧХ в области низких частот	101
4.3.2.2. Синтез желаемой ЛАЧХ в области средних частот	106
4.4. Синтез корректирующих устройств	108
4.4.1. Схемы включения и классификация корректирующих	
устройств	108
4.4.2. Определение передаточной функции последовательного	
корректирующего звена	109
4.4.3. Определение передаточной функции корректирующего	
устройства в виде отрицательной местной обратной связи	110
4.5. Синтез последовательных корректирующих устройств	
(регуляторов) в системах подчиненного регулирования	112
4.5.1. Настройка на "оптимум по модулю"	112
4.5.2. Настройка на "симметричный оптимум"	115
4.5.3. Модальное управление при полностью измеряемом	
векторе состояния объекта управления	118
4.5.4. Модальное управление при неполной информации	
о векторе состояния объекта управления	120
Вопросы для самопроверки	121
Раздел 5. Теория дискретных САУ	123
5.1. Понятия о дискретных САУ	123
5.2. Математическое представление дискретных функций	126
5.3. Z-преобразования	129

5.3.1. Связь спектров непрерывного и дискретного сигналов	132
5.3.2. Связь между непрерывным преобразованием Лапласа	
и Z-преобразованием	134
5.3.3. Обратное преобразование Лапласа	136
5.4. Структурные схемы	141
5.4.1. Дискретно-непрерывная система	141
5.4.2. Дискретная система с несколькими импульсными	
элементами	142
5.5. Векторно-матричное описание	147
5.6. Частотные характеристики	150
5.7. Устойчивость систем	154
5.8. Анализ качества	155
Вопросы для самопроверки	157
Раздел 6. Нелинейные системы	158
6.1. Основные понятия и определения	158
6.2. Прямой метод Ляпунова	163
6.3. Частотный метод В.М. Попова	166
6.4. Метод гармонической линеаризации	168
6.5. Методы фазового пространства	176
6.6. Коррекция нелинейных систем	187
6.7. Скользящие режимы в релейных системах	194
6.8. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик	197
Вопросы для самопроверки	200
Заключение	201
3.3. Глоссарий	201
3.4. Методические указания к выполнению лабораторных работ	202
Работа1. Исследование динамических свойств типовых звеньев	
САУ	202
Работа 2. Исследование точности работы САУ	202
Работа 3. Определение оптимальных настроечных параметров	
ПИ- регулятора	205
Работа 4. Исследование дискретной системы автоматического	
управления	210
Работа 5. Исследование параметров релейной позиционной системы	212
4. Блок контроля освоения дисциплины	219
4.1. Методические указания к выполнению курсовой работы	219
4.2. Тренировочные тесты текущего контроля	219

Тест 1	219
Тест 2	220
Тест 3	221
Тест 4	227
Тест 5	237
Тест 6	239
Правильные ответы на тесты текущего контроля	242
4.4. Итоговый контроль. Вопросы к экзамену и зачету	244
Содержание	247

Людмила Петровна Козлова, Олег Иванович Золотов

Теория автоматического управления Часть 1 Учебно-методический комплекс

Редактор Т.В. Шабанова

Сводный темплан 2009 г. Лицензия ЛР №020308 от 14.02.97 Санитарно-эпидемиологическое заключение №78.01.07.953.П.005641.11.03 от 21.11.2003 г. Подписано в печать Формат 60х84 1/16 Б. кн.-журн. П.л. 16,00 Б.л. 8,00 Изд-во СЗТУ Тираж Заказ

Северо-Западный государственный заочный технический университет Издательство СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России

191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, д.5