**Симплекс-метод**.

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 14x1+6x2 при следующих условиях-ограничений.

7x1+6x2≥84

-14x1+30x2≤630

35x1-12x2≤630

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

В 1-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x3 со знаком минус. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x4. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x5.

7x1 + 6x2-1x3 + 0x4 + 0x5 = 84

-14x1 + 30x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 = 630

35x1-12x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 = 630

Введем искусственные переменные x: в 1-м равенстве вводим переменную x6;

7x1 + 6x2-1x3 + 0x4 + 0x5 + 1x6 = 84

-14x1 + 30x2 + 0x3 + 1x4 + 0x5 + 0x6 = 630

35x1-12x2 + 0x3 + 0x4 + 1x5 + 0x6 = 630

Для постановки задачи на максимум целевую функцию запишем так:

F(X) = 14x1+6x2 - Mx6 → max

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной М, очень большое положительное число, которое обычно не задается.

Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.

Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

x6 = 84-7x1-6x2+x3

которые подставим в целевую функцию:

F(X) = 14x1 + 6x2 - M(84-7x1-6x2+x3) → max

или

F(X) = (14+7M)x1+(6+6M)x2+(-1M)x3+(-84M) → max

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных:

x6, x4, x5,

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X1 = (0,0,0,630,630,84)

**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x6 | 84 | 7 | 6 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| x4 | 630 | -14 | 30 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x5 | 630 | 35 | -12 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F(X0) | -84M | -14-7M | -6-6M | 1M | 0 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (7) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x6 | 84 | **7** | 6 | -1 | 0 | 0 | 1 | **12** |
| x4 | 630 | -14 | 30 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x5 | 630 | 35 | -12 | 0 | 0 | 1 | 0 | 18 |
| F(X1) | -84M | **-14-7M** | -6-6M | 1M | 0 | 0 | 0 | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x6 в план 1 войдет переменная x1

Строка, соответствующая переменной x1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x6 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=7

На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1.

В остальных клетках столбца x1  плана 1 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x1  и столбец x1 .

Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А\*В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (7), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| 84 / 7 = 12 | 7 / 7 = 1 | 6 / 7 = 0.86 | -1 / 7 = -0.14 | 0 / 7 = 0 | 0 / 7 = 0 | 1 / 7 = 0.14 |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 12 | 1 | 0.86 | -0.14 | 0 | 0 | 0.14 |
| x4 | 798 | 0 | 42 | -2 | 1 | 0 | 2 |
| x5 | 210 | 0 | -42 | 5 | 0 | 1 | -5 |
| F(X1) | 168 | 0 | 6 | -2 | 0 | 0 | 2+1M |

**Итерация №1**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (5) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x1 | 12 | 1 | 0.86 | -0.14 | 0 | 0 | 0.14 | - |
| x4 | 798 | 0 | 42 | -2 | 1 | 0 | 2 | - |
| x5 | 210 | 0 | -42 | **5** | 0 | 1 | -5 | **42** |
| F(X2) | 168 | 0 | 6 | **-2** | 0 | 0 | 2+1M | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x5 в план 2 войдет переменная x3

Строка, соответствующая переменной x3 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=5

На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1.

В остальных клетках столбца x3  плана 2 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x3  и столбец x3 .

Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 210 / 5 = 42 | 0 / 5 = 0 | -42 / 5 = -8.4 | 5 / 5 = 1 | 0 / 5 = 0 | 1 / 5 = 0.2 | -5 / 5 = -1 |
|  |  |  |  |  |  |  |

После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 18 | 1 | -0.34 | 0 | 0 | 0.0286 | 0 |
| x4 | 882 | 0 | 25.2 | 0 | 1 | 0.4 | 0 |
| x3 | 42 | 0 | -8.4 | 1 | 0 | 0.2 | -1 |
| F(X2) | 252 | 0 | -10.8 | 0 | 0 | 0.4 | 1M |

**Итерация №2**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai2

и из них выберем наименьшее:

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (25.2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | min |
| x1 | 18 | 1 | -0.34 | 0 | 0 | 0.0286 | 0 | - |
| x4 | 882 | 0 | **25.2** | 0 | 1 | 0.4 | 0 | **35** |
| x3 | 42 | 0 | -8.4 | 1 | 0 | 0.2 | -1 | - |
| F(X3) | 252 | 0 | **-10.8** | 0 | 0 | 0.4 | 1M | 0 |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x4 в план 3 войдет переменная x2

Строка, соответствующая переменной x2 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x4 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=25.2

На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1.

В остальных клетках столбца x2  плана 3 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x2  и столбец x2 .

Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 882 / 25.2 = 35 | 0 / 25.2 = 0 | 25.2 / 25.2 = 1 | 0 / 25.2 = 0 | 1 / 25.2 = 0.04 | 0.4 / 25.2 = 0.02 | 0 / 25.2 = 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

После преобразований получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 30 | 1 | 0 | 0 | 0.0136 | 0.034 | 0 |
| x2 | 35 | 0 | 1 | 0 | 0.0397 | 0.0159 | 0 |
| x3 | 336 | 0 | 0 | 1 | 0.33 | 0.33 | -1 |
| F(X3) | 630 | 0 | 0 | 0 | 0.43 | 0.57 | 1M |

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | В | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| x1 | 30 | 1 | 0 | 0 | 0.0136 | 0.034 | 0 |
| x2 | 35 | 0 | 1 | 0 | 0.0397 | 0.0159 | 0 |
| x3 | 336 | 0 | 0 | 1 | 0.33 | 0.33 | -1 |
| F(X4) | 630 | 0 | 0 | 0 | 0.43 | 0.57 | 1M |

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 30

x2 = 35

x3 = 336

F(X) = 14\*30 + 6\*35 = 630