

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

УТВЕРЖДЕНО
ГЛАВНЫМ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ
УПРАВЛЕНИЕМ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

**СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
МЕХАНИЧЕСКИХ,
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ И ТРАНСПОРТНЫХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ**

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

НБ УО "ПГУ"



1214010023351

620.10

С 64 Соромаш.

М.у. и конгр. жаган.

1990 ж. жазғы кезде

1990

ноябрь 15

06.02 Орман Б.Т.

Мынбаев А.З.

ББК 30.121
С64
УДК 539.3/8

Ф.В. Долинский

С64 **Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников механических, машиностроительных и транспортных спец. вузов / Ф.В. Долинский. — 2-е изд. — М.: Высш. шк., 1990. — 80 с.: ил.**

С 2004030000 (4309000000) — 466 132 — 91
001 (01) — 90

ББК 30.121
605

© Ф.В. Долинский, 1990

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов -- основополагающая (базовая) дисциплина инженерной подготовки по механическим, машиностроительным, строительным, транспортным и другим специальностям высших технических учебных заведений. Изучение курса позволяет овладеть методами расчета элементов инженерных конструкций, а иногда конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

В курсе теоретической механики тела принимаются абсолютно твердыми. В отличие от этого сопротивление материалов наделяет реальные тела свойствами деформируемости -- изменяемости геометрических размеров, форм.

Из бесчисленного многообразия элементов инженерных конструкций отбираются наиболее часто встречающиеся или типовые; производится их схематизация; даются методы и приемы расчета элементов.

В методических указаниях и контрольных заданиях рассматриваются схематизированные типовые элементы машиностроительных, строительных, транспортных и других конструкций, которые и предлагаются к расчету на прочность, жесткость, устойчивость.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Методические указания составлены с учетом программы курса сопротивления материалов применительно к учебникам по сопротивлению материалов В.И. Феодосьева. При составлении контрольных заданий использованы разработки вузов Москвы (МГТУ, МАИ, МТИ, МТИПП).

По решению кафедры вуза отдельные задачи в контрольных заданиях могут быть опущены и заменены другими с учетом и применительно к конкретной специальности, по которой осуществляется инженерная подготовка. Может быть также изменена последовательность выполнения контрольных заданий.

Изучение курса "Сопротивление материалов" представляет для начинающего определенные трудности. В этой связи рекомендуется изучение дисциплины в такой последовательности: предварительно ознакомиться с учебным материалом по учебникам и учебным пособиям, обращая внимание на понимание физической сущности явлений, принимаемые допущения и ограничения; на основании полученных представлений от предварительного изучения курса надо решить несколько задач, относящихся к разделу и рекомендованных в пособии; углубленно изучить раздел курса сопротивления материалов и законспектировать основные положения, необходимость в которых определяется индивидуально самим студентом.

В методических указаниях даются после каждой темы вопросы для самопроверки. Изучив тему, необходимо решить соответствующие задачи контрольных заданий.

Студент допускается к сдаче экзамена при наличии знаний по курсу, определяемых предварительным зачетом, получение которого возможно при выполнении

контрольных работ по данному пособию и после прохождения лабораторного практикума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М., 1986.
2. *Долинский Ф.В., Михайлов М.И.* Краткий курс сопротивления материалов. М., 1988.
3. *Уманский А.А.* Сборник задач по сопротивлению материалов. М., 1973.
4. *Афанасьев А.М., Марьин В.А.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. М., 1975.

Дополнительной

5. *Писаренко Г.С. и др.* Сопротивление материалов. Киев, 1986.
6. *Беляев Н.М.* Сборник задач по сопротивлению материалов. М., 1968.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ТЕМАМ КУРСА

Т е м а 1. Основные понятия

Л и т е р а т у р а: [1, Введение, § 1 – 7; гл. 1, § 8; гл. 2, § 21; гл. 4, § 28]; [2, гл. 1, § 1.1 – 1.13; гл. II, § II.1; гл. III, § III. 3, гл. V, § V.2 – V.4]; [3, гл. 2, § 5; задача 2. 56; гл. 4, § 1, задачи: 4.19; 4.20; 4.22; 4.27; 4.72 – 4.75].

При изучении темы обратите внимание на следующие понятия: реальный объект и его схематизация; виды тел, изучаемых в сопротивлении материалов; гипотезы о твердом теле; силы внешние и внутренние; напряжения в точке тела (полное, нормальное, касательное); деформации; перемещения (линейные, угловые); принцип независимости действия сил и др.

Внешние силы, действующие на реальный объект, чаще всего известны. Обычно необходимо определить внутренние силы (силы упругости), которые неизвестны по величине и направлению, но которые нужно знать для выполнения прочностных расчетов. Определение сил упругости осуществляется с помощью так называемого *метода сечений*. Его сущность заключается в следующем.

1. Рассекают (мысленно) тело в интересующем сечении.
2. Отбрасывают одну из частей (безразлично какую).
3. Заменяют действие отброшенной части тела на оставшуюся системой сил, которые в данном случае переходят в разряд внешних. Силы упругости по принципу действия и противодействия всегда взаимны и представляют непрерывно распределенную по сечению систему сил. Их значение и ориентация в каждой точке сечения произвольны, зависят от ориентации сечения относительно тела, величины и направления внешних сил, геометрических размеров тела. Внутренние силы (произвольную систему сил) можно привести к главному вектору \vec{R} и главному моменту M . За точку приведения принимают обычно центр тяжести сечения. Выбрав систему координат x, y, z (ось x – по нормали к поперечному сечению, оси y и z – в плоскости этого сечения) и начало системы в центре тяжести, обоз-

начим проекции главного вектора \bar{R} на координатные оси через N, Q_y, Q_z , а проекции главного момента $\bar{M} - M_x, M_y, M_z$. Три силы и три момента называются *внутренними силовыми факторами в сечении*. Каждый из них имеет определенное название: N — *нормальная (продольная) сила* в сечении (проекция \bar{R} на ось, нормальную к поперечному сечению, т. е. на ось x); Q_y, Q_z — *поперечные (перерезывающие) силы* в сечении (проекции \bar{R} соответственно на оси y и z); M_x — *крутящий момент* (проекция вектора \bar{M} на ось, нормальную к сечению); M_y, M_z — *изгибающие моменты* (проекции вектора \bar{M} на оси y и z соответственно).

Силы упругости, каким бы образом они ни были распределены по поверхностям сечения, во всех случаях должны удовлетворять условиям равновесия рассматриваемой или отброшенной части тела. Следовательно, последним этапом метода сечений будет следующий.

4. Уравновешивают оставшуюся часть рассматриваемого тела, используя уравнения равновесия:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0.$$

$$\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0.$$

Знание внутренних силовых факторов совершенно необходимо для выполнения прочностных расчетов элементов конструкций и поэтому метод сечений следует хорошо усвоить.

Вопросы для самопроверки

Что называется сопротивлением материалов и каково значение науки в общем цикле инженерных дисциплин? Что такое упругость, пластичность, деформация, перемещение (угловое, линейное), напряжение в точке — полное, нормальное, касательное? Отличие деформации от перемещения. Какие силы называют внешними, а какие — силами упругости, их различие? Внутренние силовые факторы и их определение. В чем суть принципа независимости действия сил (принципа суперпозиции)?

Т е м а 2. Растяжение, сжатие

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 1]; [2, гл. II, § II. 1 — II. 13]; [3, гл. 1, задачи: 1.34; 1.41; 1.48; 1.51; 1.53; 1.58; 1.66; 1.69; 1.70; 1.92].

Раздел растяжения, сжатия бруса с прямолинейной осью внешними силами, равнодействующие которых совпадают с осью бруса, занимает важное место при изучении курса сопротивления материалов. В теме изучается деформация бруса, более подробно освещается понятие нормальной силы в сечении, способы ее определения, изучаются деформации. Суждение о способности материала противодействовать внешним силам необходимо при решении инженерных задач. Поэтому приводится описание методов испытания образцов, изготовленных из пластичных материалов, и определение их важнейших характеристик: пределов — пропорциональности $\sigma_{пц}$, упругости σ_y , текучести σ_T , прочности σ_B ; модуля продольной упругости E , коэффициента Пуассона μ , модуля сдвига G . Устанавливается зависимость $\sigma = E\epsilon$ между напряжениями и деформациями в пределах малых деформаций. Эта зависимость известна под названием *закона Гука*.

Вводятся понятия опасного состояния, допускаемого напряжения, коэффи-

циента запаса (или запаса) прочности. Излагаются виды прочностных расчетов – проектировочного и проверочного, применяемых соответственно при определении недостающих геометрических размеров (обычно величин поперечного сечения) элементов конструкций или выявлении того, как далека конструкция от опасного состояния.

Определение величины поперечного сечения стержня выполняется на основании условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

где N – нормальное усилие; F – площадь поперечного сечения стержня; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Определение запаса прочности n и сопоставление с допускаемым (нормативным) $[\sigma]$ для данной отрасли машиностроения определяется из выражения

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\max}} \geq [n].$$

Здесь $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение: для пластичного материала $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ – предел текучести; для хрупкого $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_B$ – предел прочности.

Рассматриваются способы решения статически неопределимых систем, их особенности. Отмечается единство статической, геометрической и физической сторон задачи.

Вопросы для самопроверки

Что такое расчетная схема? В чем суть принципа Сен-Венана? Дайте определение гипотезы плоских сечений. Что такое абсолютное и относительное удлинение, укорочение? Назовите основные характеристики пластичных и хрупких материалов. Объясните физический смысл модуля продольной упругости. Что такое коэффициент Пуассона, зоны упругости, общей текучести, упрочнения? Что такое площадка текучести? Какое явление называется наклепом? Какие системы называются статически определимыми и какие – статически неопределимыми? Что такое степень статической неопределимости системы? Какой расчет называется по допускаемым напряжениям и какой – по предельным нагрузкам?

Т е м а 3. Кручение

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 2, §20 – 22, 24]; [2, гл. III, § III.1 – III.14]; [3, гл. 2, § 5; задачи: 2.62; 2.63; 2.67; 2.75; 2.79].

Вводится понятие чистого сдвига. Находятся нормальные и касательные напряжения в наклонных площадках в случае чистого сдвига. Устанавливается связь между модулем продольной деформации E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

В теме дается определение деформации кручения бруса с прямой осью при нагружении внешними (скручивающими) парами в сечениях, перпендикулярных его оси. Используя метод сечений, уточняется определение понятия *крутящего момента*.

Основное внимание уделяется установлению зависимости между касательным напряжением, крутящим моментом, полярным моментом инерции сечения

и расстоянием площадки, в которой определяется напряжение, до центра тяжести для сечений круглого, круглого кольцевого, тонкостенного замкнутого. При этом в основу вывода указанной зависимости положена гипотеза плоских сечений: поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси после деформации; радиусы в поперечном сечении прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными после деформации.

Рассматривается также кручение брусков прямоугольного поперечного сечения и тонкостенного разомкнутого сечения. При этом гипотеза Бернулли здесь непригодна: сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, после деформируются (искривляются) и картина распределения касательных напряжений существенно изменяется.

Расчет брусков на прочность выполняется по формуле

$$[\tau]_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau],$$

где M_K — крутящий момент; W_p — момент сопротивления кручению; $[\tau]$ — допускаемое напряжение при сдвиге, равно примерно $[\tau] \approx 0,6 [\sigma]$.

Бруска, работающие на кручение, рассчитывают также на жесткость. Для этого вводят понятие угла поворота сечения (угла закручивания) φ , относительного угла $\theta = \varphi/l$. Здесь l — длина участка бруса. При этом φ определяется из выражения

$$\varphi = \frac{M_K l}{C},$$

где $C = GJ_p$ — жесткость сечения бруса при кручении; J_p — полярный момент инерции круглого поперечного сечения бруса.

Считается, что жесткость бруса обеспечена, если $\theta \leq [\theta]$, где допускаемый угол закручивания $[\theta]$ обычно задается.

В теме рассматривается расчет винтовых пружин с малым шагом на прочность, определяется осадка пружины.

Вопросы для самопроверки

Что такое чистый сдвиг, закон парности касательных напряжений? Напишите закон Гука при сдвиге. Что называется крутящим моментом? Как он определяется, его размерность? Как найти касательное напряжение в произвольной точке бруса круглого поперечного сечения? Покажите закономерность распределения касательного напряжения в бруске круглого поперечного сечения и по контуру бруса прямоугольного поперечного сечения. Какой брус называется тонкостенным? Что такое полярный момент инерции сечения, момент сопротивления кручению? Чему они равны для простых форм и их размерность? Как определяется угол закручивания бруса? Напишите условия проектировочного и проверочного расчетов брусков при кручении. Когда пружина называется пружинной с малым шагом? Что называется осадкой пружины? Как проводят расчет пружин на прочность и жесткость? В какой точке поперечного сечения стержня, из которого изготовлена пружина, возникает наибольшее напряжение?

Т е м а 4. Геометрические характеристики плоских сечений

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 3]; [2, гл. IV]; [3, гл. 3, задачи: 3.1; 3.2; 3.11; 3.12; 3.20; 3.74; 3.75].

Прочностные и деформационные возможности балок (брусьев, преимущественно работающих на изгиб), поперечные сечения которых не являются правильными фигурами, существенно зависят от ориентации (в отношении поперечных сечений) внешних сил, прикладываемых к балкам. Поэтому изучению раздела "Изгиб" обычно предшествует ознакомление с некоторыми геометрическими характеристиками сечений.

В теме обратите внимание на следующие понятия: статические моменты площади; полярный, осевой и центробежный моменты инерции сечения; связь между осевыми и полярным моментами инерции; основные свойства всех моментов; формула параллельного переноса осей; и, наконец, зависимость между моментами инерции относительно осей, составляющих между собой некоторый угол.

Разместим начало системы координат в центре тяжести поперечного сечения балки, работающей на изгиб, и будем поворачивать балку определенным образом относительно этой системы координат. В этом случае осевые J_x , J_y и центробежный J_{xy} моменты инерции будут получать каждый раз новые значения. Осевые моменты инерции достигнут экстремального (максимального и минимального) значения относительно взаимно перпендикулярных осей тогда, когда центробежный момент инерции станет равным нулю. В этом случае оси, лежащие в плоскости поперечного сечения, получают название *главных центральных осей инерции*, а осевые моменты инерции относительно этих осей — *главных центральных моментов инерции*. Определение положения главных центральных осей и значений главных центральных моментов инерции является конечной целью изучения раздела.

Главные центральные моменты инерции определяются в такой последовательности:

1. Выбирают применительно к поперечному сечению балки систему координат.
2. Относительно этой системы координат определяют положение центра тяжести сечения.
3. Проводят через центр тяжести сечения центральные оси параллельно исходным.
4. Используя формулы переноса, находят значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей.
5. По формуле $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{xy}/(J_y - J_x)$ находят угол α_0 , на который необходимо повернуть центральные оси, чтобы они стали главными центральными, и направление их поворота.
6. Используя формулы поворота, определяют величину главных центральных моментов инерции.

Вопросы для самопроверки

Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции? Какая существует связь между осевыми и полярным моментами инерции? Основное свойство статического момента площади. Формула параллельного переноса осей. Относительно какой оси осевой момент инерции сечения достигает наименьшего значения? Какие оси называются главными, а какие — центральными? Укажите основное свойство всех моментов. Как изменяются значения моментов инерции правильных фигур (например, квадрат, круг и т.д.) относительно взаимно перпендикулярных центральных осей при повороте на произвольный угол?

Тема 5. Изгиб

Литература: [1, гл. 4]; [2, гл. V]; [3, гл. 4, задачи: 4.77; 4.80; 4.81; 4.89; 4.92; 4.102; 4.109; 4.112; 4.120; 4.137].

Нагрузим брус, имеющий прямолинейную ось, силами, перпендикулярными этой оси, и парами сил в плоскостях, параллельных продольной оси, или только силами или парами сил. В этом случае происходит изгиб бруса. При этом в брусе в общем случае возникают нормальные и касательные напряжения. Предположим, что внешние силовые факторы приложены в одной плоскости, она совпадает с осью y , являющейся главной центральной осью инерции сечения. Пусть ось y будет осью симметрии сечения (см. тему 4). Тогда внутренние силы в поперечном сечении приводятся только к изгибающему моменту M_z или изгибающему моменту и поперечной (перерезывающей) силе Q_y одновременно. В первом случае изгиб называется *прямым чистым*, а во втором – *прямым поперечным*.

В этом разделе остановимся в основном на расчете балок на прочность и изучении деформаций и перемещений, так как вопросы определения внутренних силовых факторов в сечениях бруса изложены в теме 1 пособия.

При прямом чистом изгибе в поперечном сечении балки возникают только нормальные напряжения. Расчет балок на изгиб – подбор величины поперечного сечения – осуществляется на основании условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma], \text{ где } [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}.$$

Здесь M_z – изгибающий момент относительно нейтральной линии (ось z); W_z – момент сопротивления изгибу; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение: для пластичных материалов – $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ для хрупких – $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_B$; σ_T – предел текучести материала; σ_B – предел прочности; n – запас прочности, задаваемый в каждой отрасли машиностроения.

В случае прямого поперечного изгиба расчет балок на прочность осуществляется по той же формуле, что и при прямом чистом изгибе, если сечение не тонкостенное, и при условии, что отношение длины балки L к размеру b , параллельному силовой оси поперечного сечения балки, $L/b \geq 6$. При этом касательные напряжения примерно на порядок меньше нормальных напряжений и все "перекрывается" запасом прочности, который принимается, например, в машиностроении 2,0 – 2,5.

Если сечение тонкостенное или соотношение длины балки и размера поперечного сечения в направлении силовой оси меньше или равно 6, то следует учитывать действие касательных напряжений.

Для балок сплошного поперечного сечения касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b},$$

где Q_y – поперечная сила в сечении; $S_z^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части сечения балки; J_z – осевой момент инерции; b – ширина балки (в направлении нейтральной линии) в точке поперечного сечения, в которой определяется значение касательного напряжения.

Следует обратить внимание на то, что в формуле для определения значения касательного напряжения $S_z^{\text{отс}}$ относится не ко всему поперечному сечению балки.

а лишь к части его, лежащей выше или ниже линии, параллельной нейтральной оси, в точках которой определяется касательное напряжение. В то же время момент инерции J_z относительно нейтральной оси принимается для всего сечения.

При изучении закономерности распределения нормальных напряжений необходимо обратить внимание на неравномерность его в направлении силовой оси. С учетом этого целесообразно самостоятельно найти пути снижения расхода материала балки при одинаковой ее прочности.

Расчет балки на жесткость предполагает определение перемещений ее сечений обычно в направлении, перпендикулярном оси. В общем случае значения угловых и линейных перемещений можно находить, применяя дифференциальные уравнения изогнутой оси балки. Дается универсальный метод интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Общий вид дифференциальных уравнений для определения угловых и линейных перемещений имеет соответственно вид:

$$EJ_z \varphi = EJ_z \varphi_0 + \Sigma \frac{m(x-a)}{1!} + \Sigma \frac{P(x-b)^2}{2!} + \Sigma \frac{q(x-c)^3}{3!};$$

$$EJ_z y = EJ_z y_0 + EJ_z \varphi_0 x + \Sigma \frac{m(x-a)^2}{2!} + \Sigma \frac{P(x-b)^3}{3!} + \Sigma \frac{q(x-c)^4}{4!},$$

где φ_0 и y_0 — угол поворота и прогиб сечения в начале системы координат, обычно размещаемого на конце балки; a и b — абсциссы сечений балки в выбранной системе координат, в которых приложены соответственно пары сил с моментами m и сосредоточенные силы P ; c — абсциссы сечений, в которых начинается равномерно распределенная нагрузка интенсивности q при движении от начала системы координат в сторону этого сечения, или в которых она дополняется.

В теме изучается также частный случай изгиба — *косой изгиб*. Он имеет место в случае, когда силовая линия не совпадает с главной центральной осью инерции сечения, в силу чего плоскость деформации балки не совпадает с силовой плоскостью. Косой изгиб наиболее удобно рассматривать как одновременный изгиб бруса в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях.

Напряжение при косом изгибе определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z,$$

а расчет балок на прочность осуществляется из выражения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0,$$

где y_0 и z_0 — координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной линии, для которой $\sigma = \sigma_{\max}$.

Деформация косого изгиба опасна особенно для балок, для которых главные центральные моменты инерции сильно отличаются друг от друга. Для балок, сечения которых — правильные фигуры (квадрат, равносторонний треугольник и др.), косой изгиб невозможен.

В этой же теме изучается внецентренное растяжение-сжатие бруса. Расчет брусев, испытывающих внецентренное растяжение-сжатие, выполняется на основании

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_p}{i_z^2} y_0 + \frac{z_p}{i_y^2} z_0 \right] \leq [\sigma],$$

где y_p и z_p — координаты точки поперечного сечения бруса, в которой приложена

внешняя сила (полюс силы); y_0 и z_0 — координаты точки, обычно наиболее удаленной от нейтральной линии, в которой возникает наибольшее нормальное напряжение; F — площадь поперечного сечения бруса; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Вопросы для самопроверки

Какой изгиб называется прямым чистым, прямым поперечным и какой — косым? Что такое нейтральный слой, силовая плоскость, нейтральная линия (ось), силовая линия (ось)? Как взаимно расположены силовая и нейтральная линии при прямом и косом изгибах? Как изменяются нормальные и касательные напряжения по сечению в направлении силовой и нейтральной осей при прямом поперечном изгибе балки? В каких точках поперечного сечения балки возникают наибольшие нормальные напряжения? Укажите физический смысл произвольных постоянных при универсальном методе интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Какие приемы используют при интегрировании? Как определяют нормальные напряжения при внецентренном растяжении, сжатии? Какой брус называется бруском малой, а какой — большой кривизны? Напишите выражения для определения нормальных напряжений в сечении бруса большой кривизны.

Т е м а 6. Общие методы определения перемещений в произвольных произвольно нагруженных системах.

Статически неопределимые системы

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 5, гл. 6]; [2, гл. VI, VII]; [3, гл. 5, задачи: 5.5; 5.9; 5.14; 5.18; 5.21; 5.43; 5.69; 5.73; 6.13; 6.33].

В этой теме изучаются общие методы определения угловых и линейных перемещений, когда в поперечных сечениях балки возникают одновременно (или в том или ином сочетании): нормальное усилие N , поперечные силы Q_y , Q_z , изгибающие моменты M_y , M_z относительно осей y и z и крутящий момент M_x относительно оси бруса x .

Наиболее целесообразно определять перемещения с помощью интеграла Мора, позволяющего находить их для любых сечений упругой системы и в любом направлении. Интеграл Мора имеет следующий вид:

$$\delta_c = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \left[\frac{M_{xp} M_{x1}}{GJ_p} + \frac{M_{yp} M_{y1}}{EJ_y} + \frac{M_{zp} M_{z1}}{EJ_z} + \frac{N_p N_1}{EF} + \frac{k_y Q_{yp} Q_{y1}}{GF} + \frac{k_z Q_{zp} Q_{z1}}{GF} \right] dS.$$

Если элементы упругих систем испытывают деформации кручения и изгиба, тогда тремя последующими членами обычно пренебрегают, так как перемещения сечений от нормального усилия N , поперечных сил Q_y и Q_z часто весьма малы по сравнению с перемещениями от M_x , M_y и M_z . Для прямого чистого или поперечного изгиба обычно используют выражение

$$\delta_c = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{zp} M_{z1}}{EJ_z} dS,$$

В элементах ферменных систем значения внутренних силовых факторов $M_{xp} =$

$= M_{yp} = M_{zp} = Q_{yp} = Q_{zp} = 0$. Следовательно, в них возникает только нормальное усилие, поэтому

$$\delta_c = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_1}{EF} l_i.$$

Для балок с прямолинейной осью (при постоянной площади поперечного сечения по их длине) упрощение решения интеграла Мора дает способ Верещагина. Например, для балки, испытывающей деформацию изгиба, перемещение можно найти по формуле

$$\delta_c = \sum \frac{F_i h_i}{(EJ_z)_i}.$$

Здесь F_i — площадь эпюры изгибающего момента от заданных сил; h_i — ордината, взятая с эпюры изгибающего момента балки, нагруженной единичной силой или единичным моментом, под центром тяжести эпюры от заданных сил; $(EJ_z)_i$ — жесткость сечения балки i -го участка.

Последовательность определения перемещений по способу Верещагина принимается следующей:

1. Строят эпюры внутренних силовых факторов от заданных сил (при необходимости эпюры расслаиваются).

2. Балку освобождают от внешних нагрузок и нагружают в интересующем сечении единичной силой (единичным моментом) и строят соответствующие эпюры.

3. Перемножают эпюры.

В ряде случаев равнодействующие внутренних сил не могут быть определены при помощи уравнений равновесия. Упругие системы, которые не могут быть решены с помощью одних уравнений равновесия, называются *статически неопределимыми*. Раскрытие статической неопределимости предлагается производить по методу сил. Система считается геометрически неизменяемой, если любое ее сечение получает перемещение только за счет деформации, вызванной действием внешних сил. Геометрическая неизменяемость системы обеспечивается накладываемыми на нее связями. Различают связи *необходимые* и *лишние*. Связи, удаление которых сохраняет геометрическую неизменяемость системы, называют лишними или условно необходимыми. Следовательно, раскрыть статическую неопределимость системы — означает составить дополнительные уравнения, с помощью которых можно определить усилия по направлению лишних связей. Различают внутренние и внешние лишние связи. В соответствии с этим внутренние и внешние статически неопределимые системы.

Раскрытие статической неопределимости системы начинается с освобождения ее от лишних связей (без нарушения геометрической неизменяемости) и замене их действия силами или моментами, подобранными так, чтобы перемещения в системе соответствовали ограничениям, накладываемым на систему отброшенными связями. Порядок раскрытия статической неопределимости систем обычно следующий:

1. Определяют степень статической неопределимости, а следовательно, количество недостающих уравнений.

2. Записывают канонические уравнения метода сил; для n раз статически неопределимой системы они имеют вид:

$\delta_1 P + \delta_{11} X_1$	I $+ \delta_{12} X_2$	II $+ \delta_{13} X_3$	III $+ \dots + \delta_{1n} X_n$	n $= 0;$
$\delta_2 P + \delta_{21} X_1$	$+ \delta_{22} X_2$	$+ \delta_{23} X_3$	$+ \dots + \delta_{2n} X_n$	$= 0;$
$\delta_3 P + \delta_{31} X_1$	$+ \delta_{32} X_2$	$+ \delta_{33} X_3$	$+ \dots + \delta_{3n} X_n$	$= 0;$
...	
$\delta_{nP} + \delta_{n1} X_1$	$+ \delta_{n2} X_2$	$+ \delta_{n3} X_3$	$+ \dots + \delta_{nn} X_n$	$= 0;$

где чертой с индексом, например I, показано каноническое уравнение, применяемое при решении один раз статически неопределимой системы, и т.д.

3. Выбирают основную систему, причем выбор должен быть сделан из условия необходимости получить наиболее простое решение задачи.

4. Показывают эквивалентную систему. Так называется статически определяемая геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания лишних связей и замены их действия искомыми силами, моментами.

5. Строят эпюры: от заданных сил в основной системе (обозначается P_i) и от единичных сил (моментов) каждый раз отдельно в основной системе (обозначают 1, 2, 3 и т.д.).

6. Перемножают эпюры по способу Верещагина и находят значения δ_{nP} , δ_{np} , δ_{nk} , входящие в канонические уравнения.

7. Решая систему канонических уравнений, находят неизвестные значения X_1, X_2, \dots, X_n по направлению соответствующих лишних связей.

8. Значения неизвестных величин показывают в эквивалентной системе и строят эпюры внутренних силовых факторов.

Вопросы для самопроверки

Что понимается под названием потенциальная энергия деформации? Какие члены интеграла Мора сохраняются при решении плоских систем, при решении стержневых систем? В чем сущность способа Верещагина и когда его нельзя применять? Что называется заданной, основной и эквивалентной системами? Какие перемещения называют главными, а какие — побочными? Назовите симметричные и обратно симметричные внутренние силовые факторы. Какие упругие системы называют симметричными, а какие — обратно (косо) симметричными?

Т е м а 7. Основы теории напряженного и деформированного состояния. Гипотезы возникновения пластических деформаций и разрушений

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 7 и 8]; [2, гл. VIII, IX]; [3, гл. 6, задачи: 6.57; 6.64; 6.77].

В теме изучается напряженное и деформированное состояние в общем случае нагружения тела, что необходимо для последующего решения более сложных задач, в частности задач на прочность.

Если воспользоваться методом сечений и мысленно в интересующем нас сечении рассечь тело, нагруженное внешними силами, отбросить одну из частей, то внешние силы уравниваются силами взаимодействия отброшенной части тела. Эти силы для всего тела являются внутренними, а для каждой части – внешними. Рассмотрим какую-нибудь точку в сечении и найдем напряжение. Если через эту точку провести другие плоскости, то каждый раз напряжения в этой же точке будут другими. Через точку можно провести множество плоскостей и поэтому в каждой точке следует рассматривать множество напряжений. С учетом этого в общем случае говорят не о напряжении в точке, а о напряженном состоянии в ней.

Вырезая из тела в окрестности исследуемой точки элементарный параллелепипед, показываем по каждой грани полный вектор напряжения. В общем виде полный вектор может быть разложен на нормальное, перпендикулярное площадке, и касательное напряжения. Следовательно, по трем взаимно перпендикулярным площадкам будет действовать девять составляющих напряжения, называемых *компонентами напряженного состояния в точке*.

Основной задачей исследования напряженного состояния является определение – напряжений по произвольной площадке, проходящей через данную точку, положения главных площадок и значений главных нормальных напряжений.

Среди бесконечно большого числа площадок, проходящих через данную точку тела, всегда найдутся по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, в которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки носят название *главных площадок*, а нормальные напряжения на них – *главных нормальных напряжений*. Главные напряжения обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Значения главных нормальных напряжений σ_i можно определить из выражения $\sigma_i^3 - J_1 \sigma_i^2 + J_2 \sigma_i - J_3 = 0$, где J_1, J_2, J_3 – инварианты напряженного состояния в точке, определяемые из выражений:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – компоненты напряженного состояния в точке. Они известны.

Главные напряжения в каждой точке тела имеют всегда одни и те же значения и направления. Они не зависят от положения выбранной системы координат.

Следует обратить внимание на имеющуюся классификацию видов напряженного состояния в точке. Различают линейное (одноосное), плоское (двухосное) и объемное (трехосное) напряженное состояние. Напряженное состояние считается объемным, если по всем граням элементарного параллелепипеда главные нормали-

ные напряжения не равны нулю. Если главные нормальные напряжения действуют по двум или одному направлению, то напряженные состояния получают названия плоского или линейного соответственно.

Очень важно знать выражения для определения значений главных нормальных напряжений в случае плоского напряженного состояния, которое наиболее часто встречается в бруске, подвергающемся одновременно действию изгибающих, скручивающих и растягивающих нагрузок, а также в тонкостенных оболочках. Наиболее часто в этом случае главные напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

С учетом соотношения между главными напряжениями $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ($1000 > > -20 > -500$) имеем:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Необходимо обратить внимание на значения максимальных касательных напряжений, действующих в площадках под углом 45° к главным площадкам. Обозначая главные направления, перпендикулярные главным площадкам, через 1, 2 и 3, наибольшие касательные напряжения в равнонаклонных площадках определяются из выражений:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Решение вопроса о прочности элемента инженерной конструкции, а иногда конструкции в целом, является конечной целью большинства инженерных расчетов. Вопрос прочности элемента, работающего при простых деформациях — растяжении, сжатии, кручении, прямом изгибе, — осуществляется путем сопоставления наибольшего напряжения в опасной точке с величиной предельного напряжения для материала, из которого изготовлен элемент. В случае сложных видов нагружения элемента конструкции (сочетание изгиба и кручения; кручения и растяжения и т.д.) напряженное состояние в опасной точке опасного сечения тела отличается от указанных выше и расчеты на прочность его также отличаются от расчетов на прочность элемента при простых видах нагружения.

В общем случае нагружения количество напряженных состояний бесконечно велико, поэтому о прочности элемента, находящегося в произвольном напряженном состоянии, приходится судить по прочности элемента, находящегося в напряженном состоянии, для которого предельное состояние известно, путем высказывания предположения о равнопрочности.

Предположение о равнопрочности двух элементов, находящихся в различных напряженных состояниях, носит название *гипотезы* или *теории прочности*. Одноосное напряженное состояние, равнопрочное данному, называется *эквивалентным*, а его главное нормальное напряжение — *эквивалентным напряжением* $\sigma_{\text{экв}}$.

При изучении темы следует обратить внимание на теории — наибольших касательных напряжений, предельных состояний, энергетическую теорию формоизменения, а также на области применения теорий.

Учитывая исключительную важность усвоения данной темы, приведем выражения некоторых теорий прочности.

Теория наибольших касательных напряжений, учитывающая лишь два главных нормальных напряжения, однако дающая хорошие результаты для пластичных материалов (в частности, малоуглеродистой стали), одинаково сопротивляющихся растяжению-сжатию, записывается так:

для объемного вида напряженного состояния

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 ;$$

для плоского напряженного состояния, характерного для балок, работающих на изгиб, тонкостенных оболочек и т.д.

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} .$$

Согласно энергетической теории прочности формоизменения, два элемента, находящиеся в разнотипных напряженных состояниях, будут равнопрочными, если энергии, идущие на изменение формы, у них одинаковы.

Теория прочности для объемного напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} .$$

Для плоского напряженного состояния, как уже указано, характерного для условий работы балок, тонкостенных оболочек и т.д.

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} .$$

Условием прочности по каждой теории прочности будет выражение

$$\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma] .$$

Вопросы для самопроверки

Какие виды напряженного состояния в точке вы знаете? Назовите компоненты напряженного состояния в точке и сколько из них независимых? Что называется главными осями, главными площадками, главными напряжениями? Назовите выражения для экстремальных значений касательных напряжений и укажите площадки их действия. Как определяется значение главных напряжений и положение главных площадок? Какие вы знаете теории прочности? Дайте критический обзор теорий прочности. Напишите выражения проектировочного и поверочного расчетов по теории наибольших касательных напряжений, энергетической теории формоизменения и теории предельных напряженных состояний.

Т е м а 8. Расчет тонкостенных оболочек и толстостенных цилиндрических труб

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 9, § 59 - 61, гл. 10, § 63, 64]; [2, гл. X]; [3, гл. 6, задачи: 6.74, 6.75; гл. 9, задачи: 9.16, 9.19, 9.28].

В теме изучается расчет тонкостенных осесимметричных симметрично нагруженных оболочек по безмоментной теории. К схеме осесимметричной оболочки сводится расчет многих строительных инженерных конструкций, а также котлов, резервуаров (воздушных и газовых) и т.д. Оболочка называется осе-

симметрично симметрично нагруженной, если любая плоскость, проходящая через ось, является плоскостью геометрической и силовой симметрии.

Надо хорошо уяснить, что давление в оболочке, находящейся под гидростатическим давлением, в силу осевой симметрии может изменяться только в меридиональном направлении, оставляя неизменным в окружающем.

Расчет осесимметричных оболочек основывается на предположении постоянства напряжений по толщине стенок, что может быть лишь при отсутствии изгиба оболочки. Теория, на которой базируется решение задач в таком предположении, называется *безмоментной теорией оболочек*.

В тонкостенных осесимметричных симметрично нагруженных оболочках меридиональное σ_r и окружное σ_θ напряжения связаны соотношением, получившим название формулы Лапласа:

$$\frac{\sigma_r}{\rho_r} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{p}{\delta},$$

где ρ_r и ρ_θ – радиусы кривизны в меридиональном и окружном направлениях соответственно; p – давление, под которым находится тонкостенная оболочка; δ – толщина оболочки.

При изучении темы четко уясните порядок расчета оболочек: вначале определяют меридиональные напряжения – для этого, используя метод сечений, изучают равновесие одной из частей; затем – подставляют полученное значение меридионального напряжения в уравнение Лапласа и находят значение окружного напряжения.

Расчет толстостенных цилиндрических труб имеет значение при решении многих важных в техническом отношении задач. Теория расчета таких труб связана с именем известного французского ученого Ляме и русского академика А.В. Гадолина, которому принадлежит теория расчета составных труб и теория расчета артиллерийских стволов.

При расчете толстостенных труб под внутренним и внешним давлением предполагается, что труба достаточно длинная и открытая. Для закрытых труб полученные формулы справедливы для сечений, отстоящих на некотором расстоянии от дна трубы.

При расчетах толстостенной трубы учитывают радиальные напряжения (в тонкостенных сосудах ими пренебрегают) и окружные напряжения. Те и другие являются функциями только радиуса. Напряжения в поперечных плоскостях, называемые *осевыми напряжениями*, возникают, если труба нагружена силами вдоль оси. Они постоянны по величине как в направлении оси, так и по радиусу трубы. При определенных условиях прочность толстостенной трубы нельзя повысить, увеличивая толщину стенок трубы. А между тем в технике высоких давлений встречаются давления, при которых известные материалы не обеспечивают конструкцию надлежащей прочностью. В этом случае применяют составные трубы из двух слоев и более.

Составные трубы дают возможность уменьшить напряжения в опасных точках на внутренней поверхности трубы с помощью другой трубы, у которой внутренний диаметр меньше внешнего диаметра первой трубы. Посадка труб пресовая или горячая. При горячей посадке труба большего диаметра нагревается до такой температуры, чтобы можно было свободно надеть ее на трубу меньшего диаметра. После охлаждения труба меньшего диаметра сжимается, а наружная труба в радиальном направлении растягивается.

Вопросы для самопроверки

Какая оболочка называется тонкостенной? Напишите выражение Лапласа для определения напряжений в тонкостенных осесимметричных симметрично нагруженных оболочках. В каком — меридиональном или окружном направлении сварной (заклепочный) шов цилиндрического тонкостенного сосуда должен быть более прочным? Какой сосуд называется толстостенным, составным? Какое напряжение в толстостенной трубе будет растягивающим, а какое — сжимающим? Какой вид напряженного состояния возникает в опасных точках толстостенной трубы, открытой и закрытой с торцов?

Тема 9. Устойчивость равновесия деформированных систем

Литература: [1, гл. 14, § 89 – 94, 99, 100]; [2, гл. XII]; [3, гл. 8, задачи: 8.1; 8.8; 8.11].

Ранее изучались вопросы прочности и жесткости элементов инженерных конструкций, работающих в условиях одноосного растяжения (сжатия), сдвига, кручения, изгиба. Рассматривались такие условия работы элементов, в опасных точках которых напряженное состояние плоское или объемное. Применяя теории прочности, для таких случаев выполняли проектировочный или поверочный расчет. Между тем многие элементы (назовем их стойками) сравнительно большой длины и тонкие нагружены продольными силами, равнодействующие которых направлены по оси стойки. При этом возможна потеря устойчивости деформаций.

Если стойку с прямолинейной осью последовательно нагружать все возрастающей продольной нагрузкой, то при некотором ее значении стойка будет иметь две формы равновесия: прямолинейную неустойчивую и криволинейную устойчивую. Явление изгиба стойки при приложении к ней продольной силы носит название *потери устойчивости*. Минимальное значение сжимающей силы, при котором ось стойки может иметь устойчивую криволинейную и неустойчивую прямолинейную форму упругого равновесия, называется *критической силой*. Следует особо отметить, что опасность явления потери устойчивости состоит в том, что оно может наступить при значении напряжения меньшего, чем предел прочности материала стойки.

Вопросы продольного изгиба стоек изучали и разрабатывали известные русские и советские ученые: Л. Эйлер, Ф.С. Ясинский, А.Н. Крылов, Б.Г. Галеркин, Н. Динник. Расчет на устойчивость сводится к определению значения критической силы $P_{кр}$ для длинного тонкого сжатого стержня. Величина $P_{кр}$ для стержня с различными опорными устройствами определяется по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где J_{\min} — наименьший момент инерции поперечного сечения стойки; l — длина стойки; μ — коэффициент приведения длины стойки, учитывающий условия крепления стоек.

Формула Эйлера справедлива до тех пор, пока критическое напряжение $\sigma_{кр}$ в стойке не превосходит предел пропорциональности материала стойки $\sigma_{пц}$, т.е.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{F(\mu l)^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Формула Эйлера применима для сравнительно длинных стоек. Для стоек средней длины применима формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

Здесь a , b — коэффициенты, зависящие от свойств материалов и определяемые опытным путем; λ — гибкость стержня, определяемая из выражения

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

где i_{\min} — минимальный радиус инерции поперечного сечения стойки.

Целесообразно отчетливо представлять последовательность расчета стоек на устойчивость:

1. Определяется гибкость стойки λ .

2. Сопоставляется λ с предельной гибкостью $\lambda_{\text{пред}}$, определяемой по формуле

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пл}}}}$$

В случае, если $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, критическое значение напряжения определяется по формуле Эйлера. Если $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, то при определенных условиях (для так называемых стоек средней гибкости) критическое напряжение находят по формуле Ясинского. Представляет практический интерес способ расчета стоек на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемого напряжения, значения которого приводятся в справочной литературе.

Вопросы для самопроверки

В чем суть явления потери устойчивости сжатой стойки? Что такое критическая сила и по какой формуле она определяется? Укажите пределы применимости формулы Эйлера. Что такое гибкость стойки? Как определяется критическое напряжение для стоек большой, средней и малой гибкости? Какой вид имеет график критических напряжений? Как влияют условия закрепления стоек на значение критической силы? Как производится проверка стоек на устойчивость по коэффициенту φ ?

Тема 10. Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 8]; [2, гл. XI]; [3; гл. 11, задачи: 11.1, 11.6, 11.8].

При переменных напряжениях материал разрушается при напряжениях значительно меньших, чем предельные характеристики, определяемые при статических испытаниях материала. Прочность материала при переменных напряжениях как бы уменьшается. Явление понижения прочности материала под действием переменных во времени напряжений называется *усталостью* или *выносливостью*.

Изучая тему, обратите особое внимание на механизм усталостного разрушения; кривые усталости; предел выносливости и способы его определения; факторы, влияющие на выносливость; расчеты по выносливости деталей и образцов при симметричных и асимметричных циклах изменения напряжений в случае одноосного напряженного состояния, при кручении и при совместном действии изгиба и кручения.

Вопросы для самопроверки

Каковы современные представления о прочности материала, работающего

в условиях переменных напряжений? Какие вы знаете циклы изменения напряжений во времени? Что такое кривая выносливости, предел выносливости? Какие факторы наиболее существенно влияют на выносливость? Что такое эффективный коэффициент концентрации напряжений и его отличие от коэффициента концентрации напряжений? Что такое запас прочности по выносливости и чему он равен для образца и детали при симметричном и асимметричном цикле изменения напряжений в случае одноосного напряженного состояния и при кручении?

Т е м а 11. Динамическая нагрузка

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 15, § 111, 113]; [3, гл. 10, задачи: 17.1; 10.6; 10.19; 10.84; 10.97; 10.103].

В теме изучается влияние сил инерции движущихся элементов конструкций на прочность элементов. При этом усилия, возникающие в движущемся теле, определяют по принципу Даламбера, суть которого можно сформулировать так: *если движущееся тело в какой-то момент времени представить находящимся в покое и помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в покоящемся теле возникнут такие же внутренние силы, напряжения и деформации, какие и во время его движения.*

В теме изучается также влияние ударных нагрузок на упругую систему с учетом ее массы и без учета. Явление удара наблюдается во всех случаях, когда скорости соударяющихся тел изменяются в течение очень малого промежутка времени. В этом случае напряжения и деформации будут существенно большими тех, которые возникли бы в той же системе при статическом нагружении. Напряжения и перемещения в ударяемой системе достигают максимальных в момент наибольшей деформации системы, а это позволяет применить приближенный энергетический метод, рассматривая при этом удар как неупругий.

Вопросы для самопроверки

Как определяют напряжения в элементах конструкции при равноускоренном поступательном движении и при вращательном движении? Что такое динамический коэффициент и как он определяется с учетом и без учета массы ударяемой упругой системы? Как производят испытания на ударную нагрузку?

Т е м а 12. Упругие колебания

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 15 (М., 1974)]; [3, гл. 10, задачи: 10.29; 10.33; 10.40; 10.67; 10.69].

Если внешние и внутренние силы неуравновешены, что может быть вызвано однократным воздействием внешней силы или силой, периодически изменяющейся во времени (возмущающей силой), то упругая система получает отклонения от равновесного состояния. Периодические отклонения упругой системы от положения ее статического равновесия называются колебаниями. При колебаниях напряжения и отклонения упругой системы от равновесного состояния периодически изменяют свое значение.

В отличие от свободных колебаний вынужденные колебания происходят под действием переменных внешних возмущающих сил.

При проектировании инженерных конструкций необходимо, чтобы частота

вынужденных колебаний была мала по сравнению с частотой свободных колебаний. При приближении частот к одному и тому же значению коэффициент динамичности при вынужденных колебаниях сильно возрастает. В предельном случае, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой свободных колебаний, наблюдается явление резонанса. В этом случае коэффициент динамичности теоретически обращается в бесконечность и конструкция разрушается.

Вопросы для самопроверки

Какие колебания называются свободными, а какие – вынужденными? Что называется степенью свободы системы? Какие имеются способы отхода от резонанса? Какая существует связь между частотой, круговой частотой и периодом колебаний? Как выполняется расчет на прочность конструкций при вынужденных колебаниях?

Порядок выполнения контрольных работ*

1. Студент-заочник выполняет шесть контрольных работ, в каждую из которых входит по несколько задач.

2. Данные для выполнения задачи следует выбирать из соответствующей таблицы согласно своему шифру и первым шести буквам русского алфавита, расположенным в определенном порядке. Например, записав шифр и под каждой цифрой его буквы:

шифр – 381047**

буква – абвгде,

выбирают из указанной в задаче таблицы число, которое находится на пересечении соответствующих строки и столбца. При этом вначале берется буква, а затем находится (в пределах столбца или строки) цифра.

3. **Пример.** В табл. 2 (последняя строка) по горизонтали первая буква "б". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т. е. цифре 8, находится вариант схемы VIII по рис. 16. Затем по следующей букве "в" и соответствующей цифре шифра 1 на пересечении столбца "в" и строки "1" получаем величину "P" и т.д. Окончательно, согласно указанному шифру, получим: схема VIII по рис. 16, сила $P_1 = P$; сила $P_2 = 2P$; площадь $F_1 = F$; площадь $F_2 = F$; предел текучести стали 40X $\sigma_T = 8 \cdot 10^2$ МПа (предел прочности σ_B не приводится).

4. Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не зачитываются.

5. Все контрольные работы должны быть выполнены самостоятельно после изучения соответствующего раздела курса "Сопротивление материалов".

Несамостоятельно выполненные задания не позволяют рецензенту обратить внимание студента на его неподготовленность и указать на возможность получения неудовлетворительной оценки на экзамене.

6. В заголовке контрольной работы следует четко указать: номер контроль-

* Заимствовано, частично, из пособия А.В. Даркова и Б.Н. Кутукова "Сопротивление материалов". Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников. М., 1976.

** В случае семизначного шифра вторая цифра не учитывается.

ной работы; название дисциплины; фамилию, имя, отчество студента (полностью); название факультета и специальности; учебный шифр; дату отсылки работы; точный почтовый адрес (с индексом).

7. Не рекомендуется присылать в институт одновременно несколько выполненных заданий. Это затрудняет рецензенту своевременно отмечать допущенные ошибки и задерживает рецензирование.

8. Каждая контрольная работа выполняется в особой тетради или на листах, сшитых в тетрадь нормального формата, чернилами (не красными), четким пером, с полями в 5 см для замечаний рецензента.

9. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие в буквенных выражениях, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем величины, необходимые для расчета.

10. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны только в буквенных выражениях. Надо избегать многословных пояснений и пересказа учебника; студент должен знать, что язык техники — формула и чертеж. При пользовании формулами или данными, отсутствующими в рекомендованных учебниках, необходимо кратко и точно указать источник (автора, название источника, издание, страницу, номер формулы).

Однако окончательный ответ ко всем задачам всех контрольных работ, кроме первой, дается в цифрах, например, в задаче 1 контрольной работы 2 требуется, в частности, определить, как далеко конструкция от опасного состояния, т. е. требуется найти запас прочности n . В этом случае все решение ведется в аналитической форме, включая построение эпюр нормального усилия N , нормального напряжения σ , а в выражение для n подставляется аналитическое значение σ_{\max} из эпюры σ , которое затем заменяется цифровыми данными из условия задачи.

11. По получении из института контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания.

В случае требования рецензента следует в кратчайший срок послать ему выполненные на отдельных листах исправления.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА I

ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Задача 1

Для заданных упругих систем (рис. 1 — 10) определить значения внутренних силовых факторов и построить соответствующие эпюры:

а) для двух брусьев, работающих на растяжение (сжатие), — эпюры нормального усилия N ;

б) для двух брусьев, работающих на кручение, — эпюры крутящего момента M_K ;

в) для трех балок, работающих на изгиб, — эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z ;

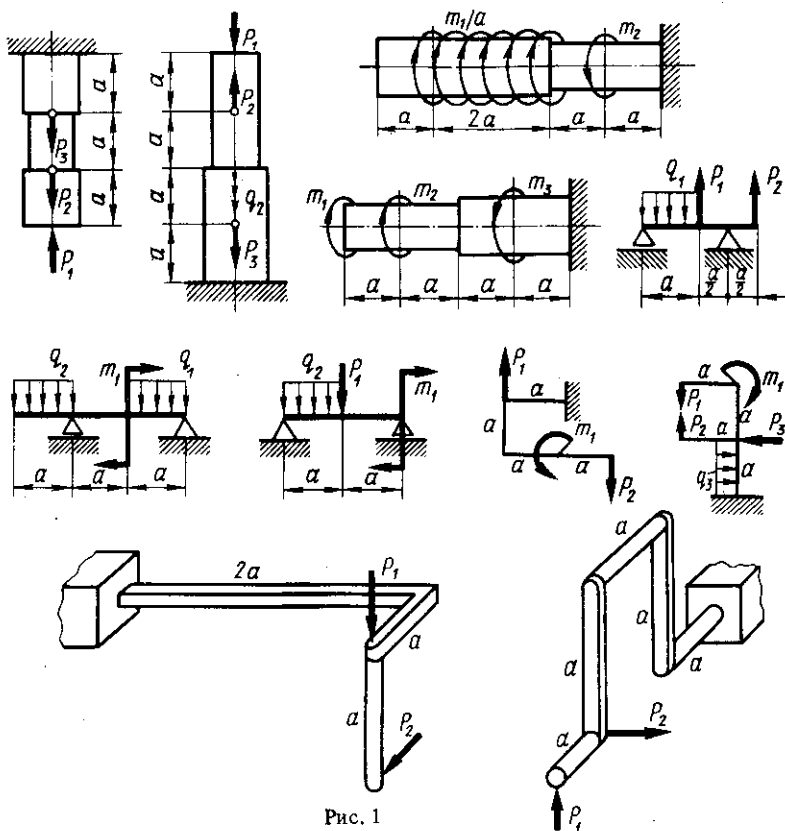


Рис. 1

г) для двух плоских рам – эпюры изгибающего момента M_z ;

д) для двух плоскопространственных ломаных брусьев – эпюры изгибающих моментов M_y и M_z , а также эпюру крутящего момента M_x . Причем для каждой рамы эпюры строят отдельно только от силы P_1 , только от силы P_2 и после этого – результирующие эпюры при одновременном действии сил P_2 и P_1 .

При построении эпюр принять следующие соотношения между внешними нагрузками m , P и длиной a : $m = Pa = qa^2$ и все построения вести не в обозначениях m_i , P_i , q_i , F_i и т.д., а в m , P , q , a или их сочетаниях. Далее, в примерах будет показано, как это делается.

Данные, необходимые для решения контрольной задачи, выбрать из табл. 1.

Ниже приводятся примеры выполнения отдельных задач первой контрольной работы. Основное внимание уделяется построению эпюры нормального усилия N при растяжении-сжатии бруса (пример 1), эпюры крутящего момента M_x (пример 2), поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z при изгибе балки (примеры 3 и 4), изгибающего момента M_z , поперечной силы Q_y , нормального усилия N в плоских рамах (пример 5) и крутящего момента M_x и изгибающих моментов M_y , M_z (пример 6) в пространственных ломаных брусьях.

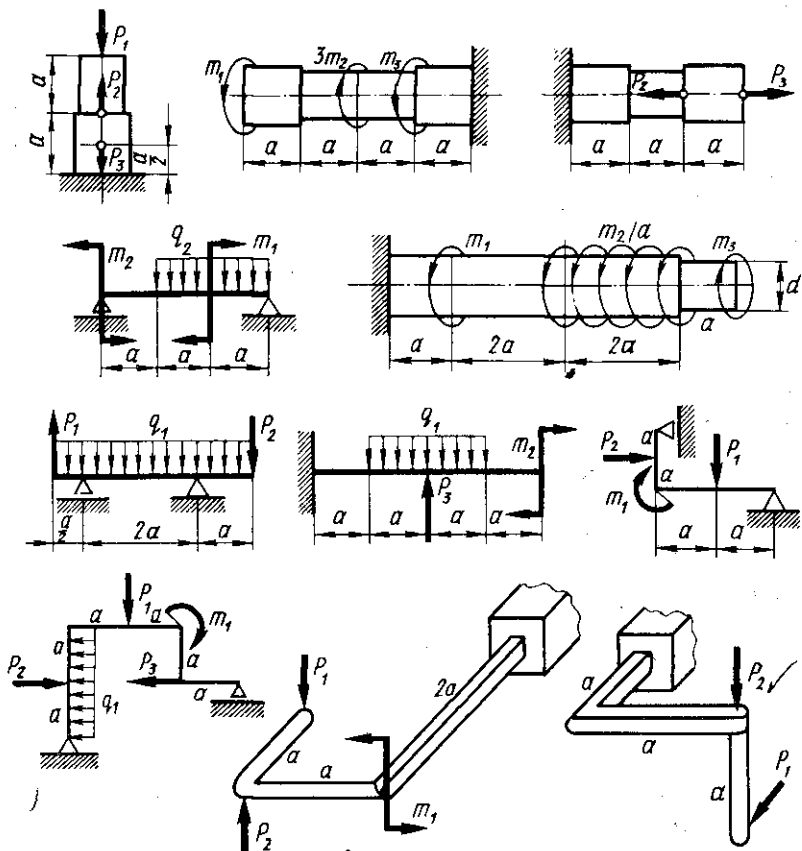


Рис. 2

От студента не требуется строить эпюры Q_y , N в плоских рамах, а также эпюры Q_y , Q_z и N в пространственных ломаных брусках, хотя студент обязан уметь это делать, что будет определяться на экзамене.

Таблица 1

№ строки	Упругая система по схеме на рис.	Внешние моменты			Внешние силы			Интенсивность равномерно распределенных сил		
		m_1	m_2	m_3	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2	q_3
1	1	$2m$	m	$2m$	P	$2P$	$3P$	$2q$	q	$3q$
2	2	$2m$	$2m$	m	P	$2P$	P	$2q$	q	q

№ строки	Упругая система по схеме на рис.	Внешние моменты			Внешние силы			Интенсивность равномерно распределенных сил		
		m_1	m_2	m_3	P_1	P_2	P_3	q_1	q_2	q_3
3	3	$2m$	m	$2m$	$2P$	P	$3P$	q	$2q$	$2q$
4	4	$3m$	$2m$	m	$3P$	$2P$	P	$2q$	q	q
5	5	m	$2m$	$3m$	$2P$	P	$2P$	q	$2q$	$2q$
6	6	$2m$	m	$3m$	$2P$	$3P$	P	$2q$	$3q$	q
7	7	m	$3m$	$2m$	$3P$	P	$2P$	q	$2q$	$3q$
8	8	m	$2m$	m	P	$2P$	$2P$	q	$2q$	$2q$
9	9	$2m$	m	$2m$	$2P$	P	$2P$	q	q	$3q$
10	10	$3m$	$2m$	m	$2P$	P	P	$2q$	$2q$	q
	а	г			б			е		д

Построение эпюр внутренних силовых факторов для бруса, балки, плоских и пространственных рам

Пример 1. Брус (рис. 11, а) зашцеилен верхним концом и нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q_2 = 2q$ и внешними силами $P_1 = 2P$; $P_2 = 2P$; $P_3 = P$. Определить значение нормального усилия в поперечных сечениях ступенчатого бруса.

Решение. Разобьем брус на силовые участки, т. е. на такие части, в пределах которых силовой фактор описывается своим одним и тем же математическим выражением. По условию брус содержит три силовых участка. При этом в данном случае нет необходимости в предварительном определении реакции заделки, так как нормальное усилие в различных сечениях бруса можно найти, двигаясь от нижнего свободного конца.

Проведем на первом силовом участке бруса сечение $I - I$ и отбросим мысленно верхнюю часть. К оставшейся нижней приложим растягивающее нормальное усилие N (рис. 11, б), которое условимся считать положительным. В этом случае нормальное усилие получится правильным по величине и знаку. Оставшаяся часть находится в равновесии (рис. 11, в). Используя уравнение $\Sigma X = 0$, получим $N + P = 0$ и $N = -P$.

Из уравнения видно, что нормальное усилие на первом участке постоянно и с учетом знака является сжимающим. Эпюра нормального усилия N ограничивается прямой, параллельной базисной линии.

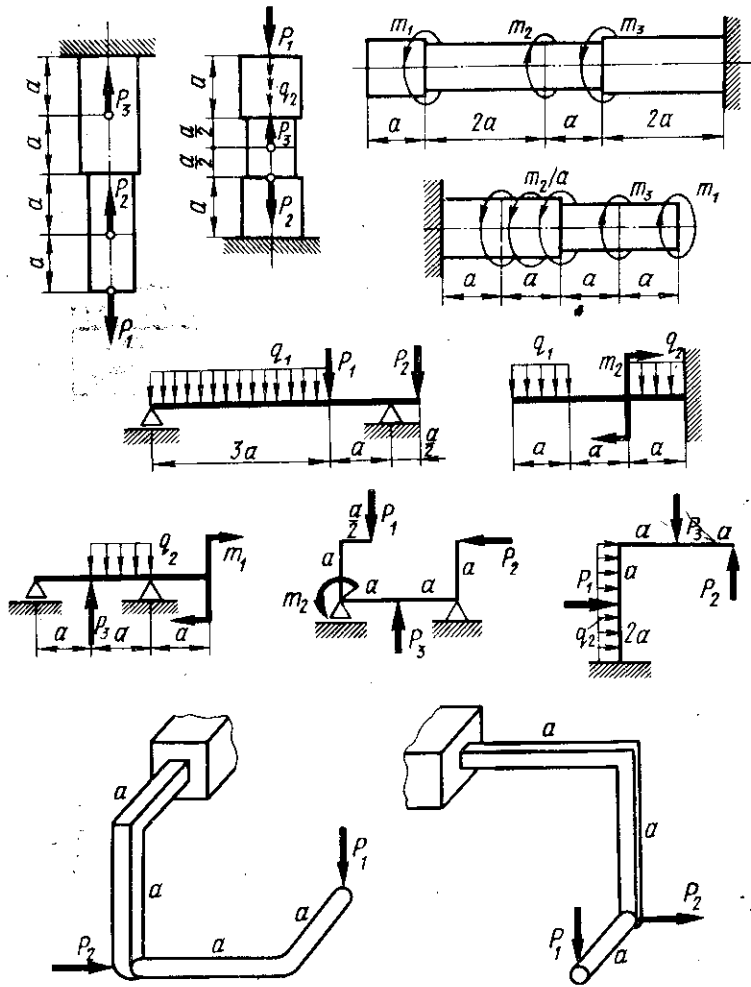


Рис. 3

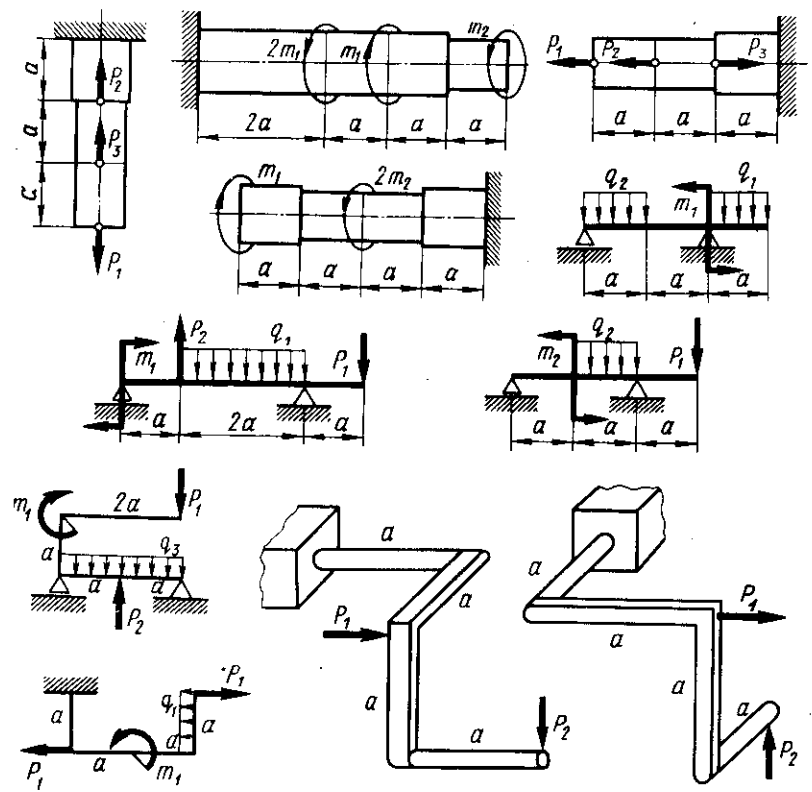


Рис. 4

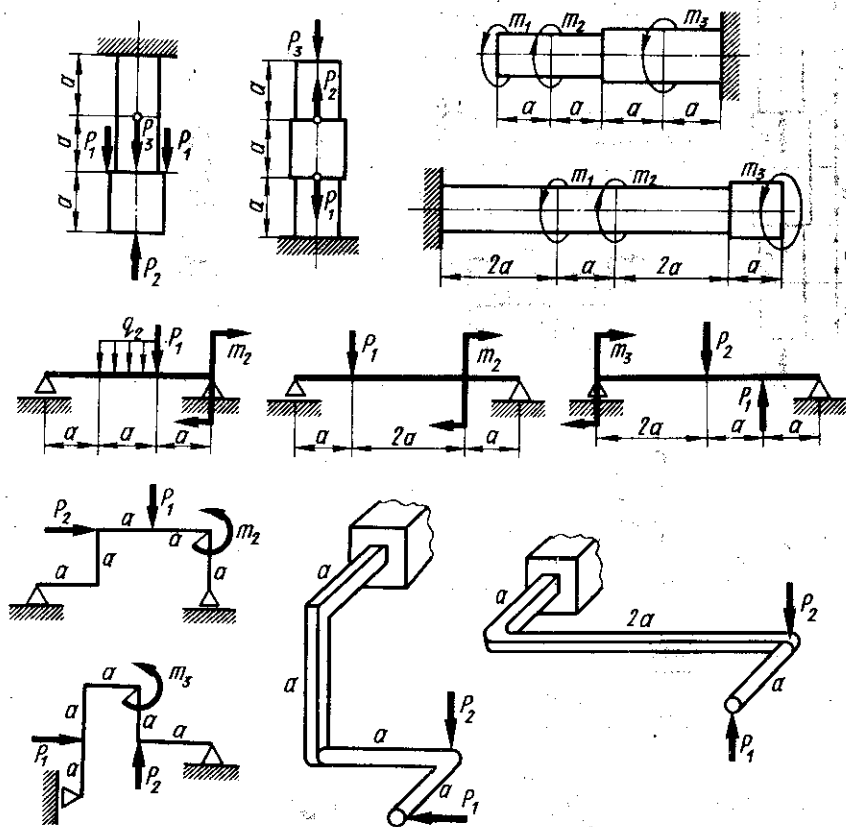


Рис. 6

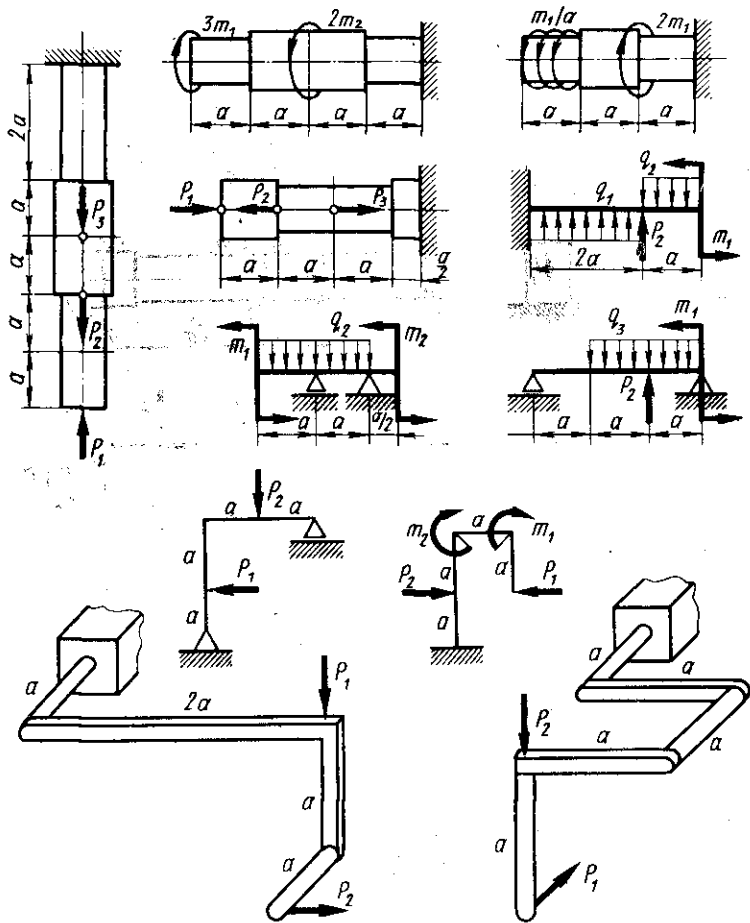


Рис. 5

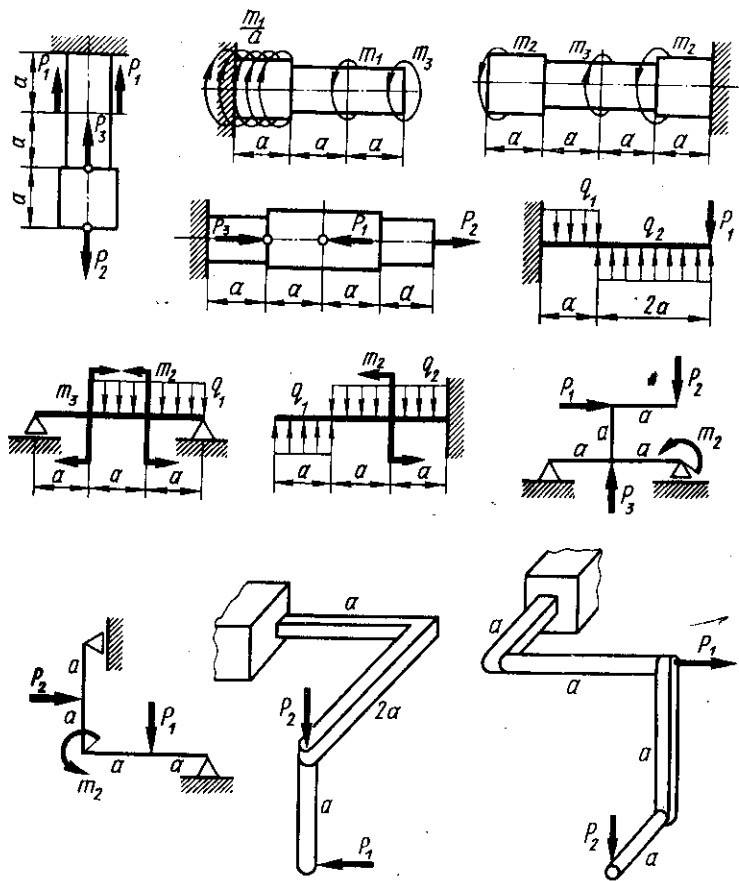


Рис. 7

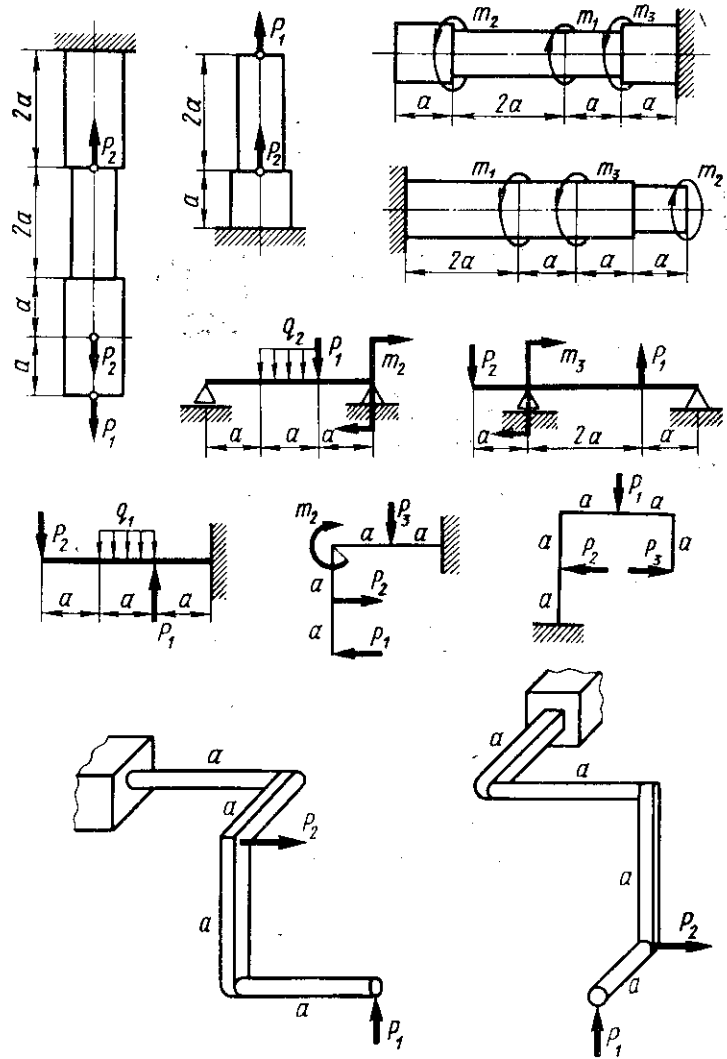


Рис. 8

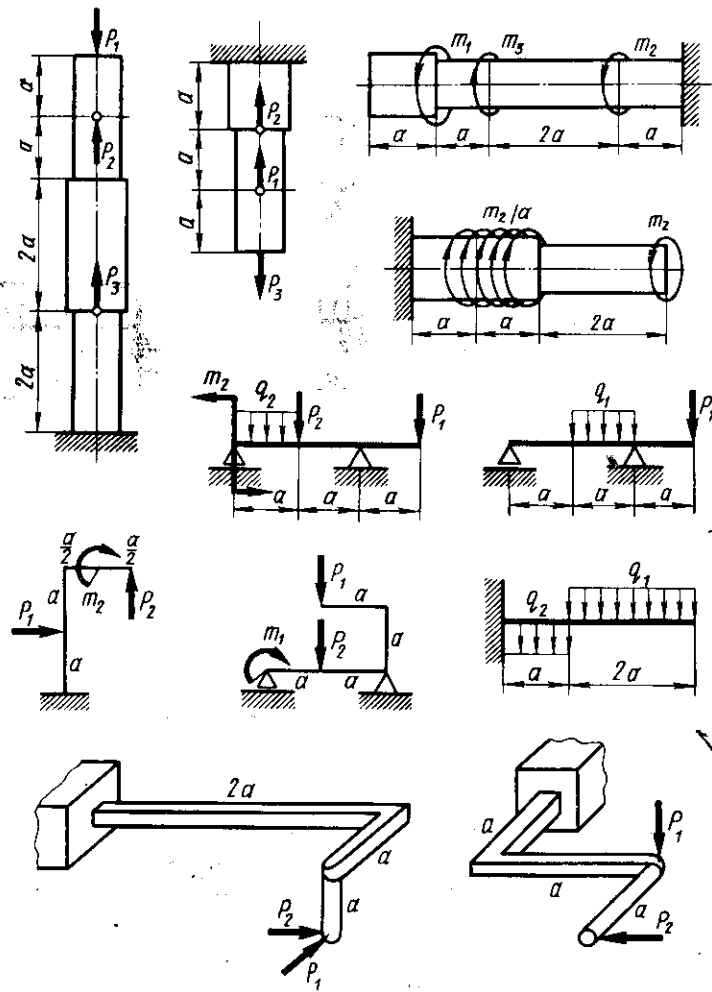


Рис. 9

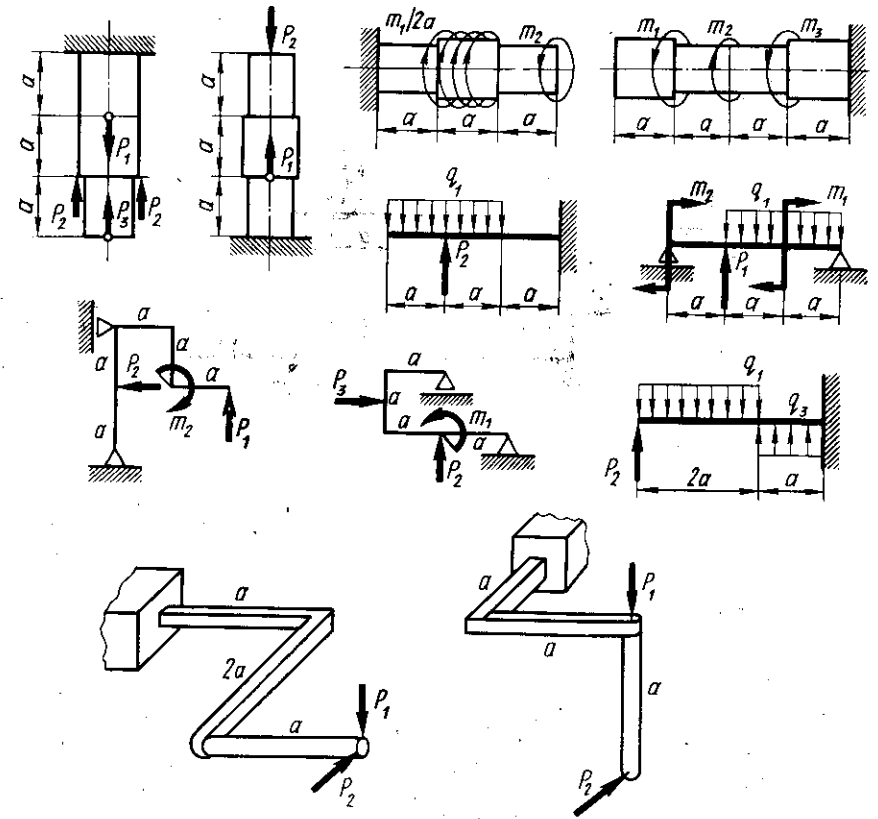


Рис. 10

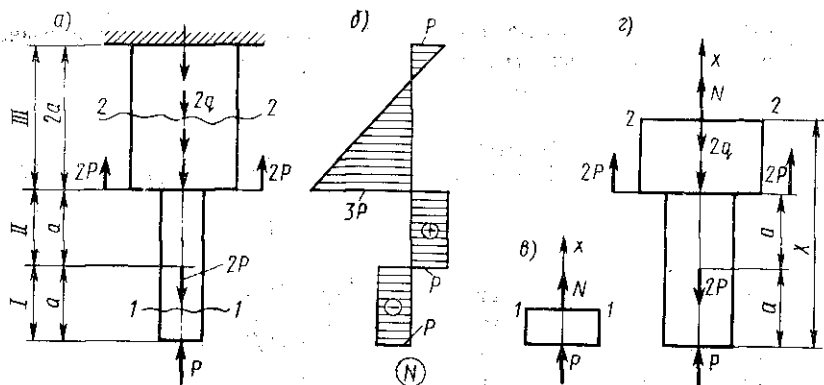


Рис. 11

Аналогично проведем сечения 2-2; 3-3; отбрасывая верхние части бруса и уравнивая оставшиеся нижние, найдем значения нормального усилия в сечениях соответственно второго и третьего участков.

Рассмотрим, как определено нормальное усилие на третьем участке. Для этого изучим равновесие части бруса ниже сечения 2-2 (рис. 11, г). Воспользуемся уравнением статики $\sum X = 0$ для нижней части бруса

$$N - 2q(x - 2a) + 4P - 2P + P = 0,$$

или, учитывая, что $P = qa$,

$$N = -7P + 2qx \quad (2a \leq x \leq 4a).$$

Поскольку $q = \text{const}$, дадим пределы x и найдем значения нормальных усилий в сечениях: $x = 2a, N = -3P$ (сжимающее усилие); $x = 4a, N = +P$ (растягивающее усилие).

С учетом найденных значений нормальных сил строим эпюру нормального усилия IV (рис. 11, б).

Надо отметить, что при определении нормального усилия нет надобности каждый раз графически изображать оставшуюся часть бруса. Необходимо мысленно провести интересующее нас сечение, направить вектор нормального усилия в сторону внешней нормали, т. е. от сечения, и сразу написать выражение для N . Внешние силы при этом записываются в правой части уравнения со знаком плюс, если они направлены от рассматриваемого сечения, и минус, если они направлены в сторону рассматриваемого сечения.

Пример 2. Брус (рис. 12, а) жестко закреплен на правом конце, нагружен скручивающими сосредоточенными парами m_i и равномерно распределенными моментами интенсивности $m_{01} = 3m/a$ и $m_{02} = m/a$.

Построить эпюру крутящего момента M_K .

Решение. Напомним, что крутящий момент M_K есть проекция вектора главного момента внутренних сил в сечении на ось бруса. А если более полно, что изучающий уже должен знать, то крутящий момент есть равнодействующая

пара касательных сил упругости, действующих в сечении, и равная по величине алгебраической сумме внешних моментов по одну сторону от сечения.

В нашем случае имеем пять силовых участков. Определим крутящий момент на I – III участках. На других – построение осуществляется аналогично.

Первый участок. Используя метод сечений (рис. 12, а), определим величину M_K на первом участке. К оставшейся левой части приложим внешнюю пару, момент которой t и крутящий момент M_K . Последний считается положительным, если смотреть на сечение со стороны внешней нормали и видеть M_K направленным против часовой стрелки. M_K всегда целесообразно задавать положительным, тогда ответ всегда будет получаться правильным по величине и знаку.

Итак, воспользуемся уравнением равновесия $\Sigma M_x = 0$, $M_K - t = 0$, $M_K = +t$. Знак плюс указывает на то, что крутящий момент направлен против часовой стрелки, и равен по величине t . Выражение крутящего момента есть уравнение первой степени. Графически – это прямая, параллельная базисной линии (рис. 12, б).

Второй участок. $\Sigma M_x = 0$ или $M_K = t - 2t = -t$. Аналогично, эпюра M_K – прямая, параллельная базисной линии.

Третий участок (рис. 12, в), $\Sigma M_x = 0$, $M_x = t - 2t + m_{01}(x - 2a) = -t + 3m/a \cdot (x - 2a)$, где $2a \leq x \leq 3a$. Выражение M_K – уравнение прямой линии

наклонной к базисной. Чтобы построить эпюру крутящего момента на участке, достаточно найти его величины при $x = 2a$, $M_K = -t$ и при $x = 3a$, $M_K = 2t$.

Аналогично строятся эпюры M_K на IV и V участках.

Пример 3. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z для балки (рис. 13, а), если она нагружена сосредоточенными нагрузками P_i и моментами m_i и равномерно распределенными силами интенсивностью q_i . Соотношения между внешними нагрузками и длиной балки приняты, как и ранее.

Решение.

1. **Определение реакций опор на балку.** Балка закреплена по концам: на левом – шарнирно-неподвижной опорой, которая накладывает на балку две

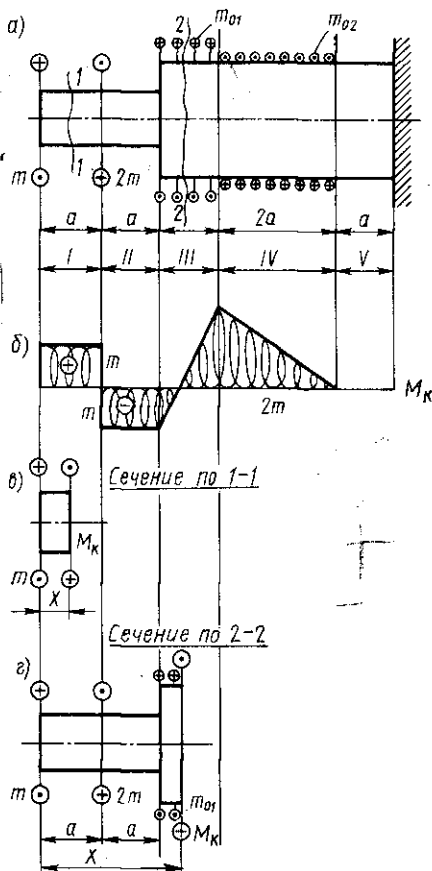


Рис. 12

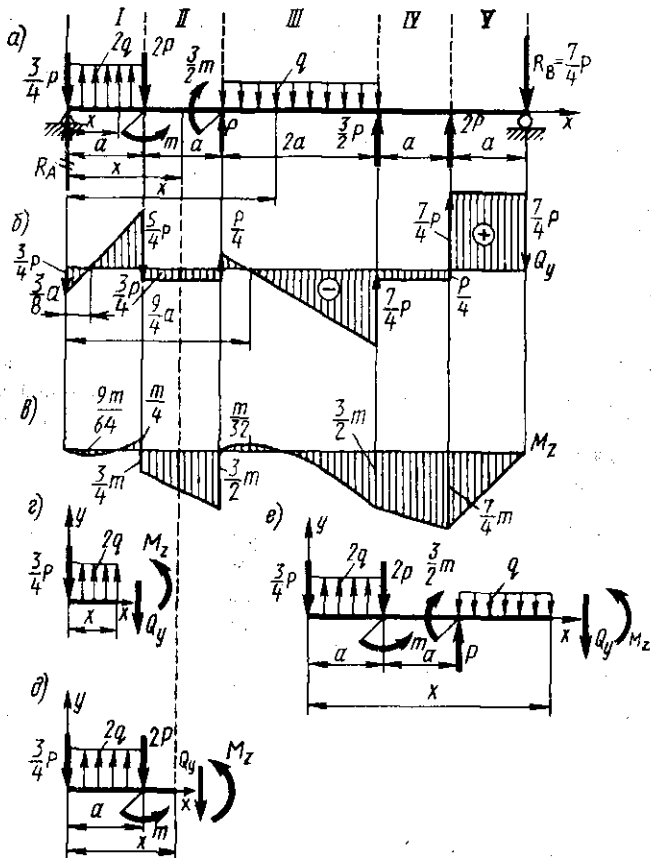


Рис. 13

связи; на правом — шарнирной. Реакция этой опоры на балку всегда перпендикулярна оси балки. Так как внешние силы, приложенные к балке, не дают проекций на горизонтальную ось, то на левом конце балки реакция опоры проектируется только на вертикальную ось. Покажем реакции R_A и R_B , как на рис. 13, а, воспользуемся уравнениями равновесия и найдем величины R_A и R_B .

$$\text{Итак, } \Sigma M_A = 0. R_B = \frac{1}{6a} \left[2P \cdot 5a + \frac{3}{2} P \cdot 4a - q \cdot 2a \cdot 3a + P \cdot 2a - \frac{3}{2} m + m - 2P \cdot a + 2q \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right] = \frac{7}{4} P.$$

Знак плюс указывает, что выбранное направление R_B правильно.

$$\Sigma M_B = 0. R_A = \frac{1}{6a} \left[-2q \cdot a \cdot \frac{11}{2} a + m + 2P \cdot 5a - \frac{3}{2} m - P \cdot 4a + q \cdot 2a \cdot 3a - \frac{3}{2} P \cdot 2a - 2Pa \right] = -\frac{3P}{4}.$$

Знак минус означает, что исходное направление R_A выбрано неправильно, в действительности оно противоположно. Рекомендуется вектор R_A зачеркнуть, что нами сделано, и показать истинное направление реакции со знаком плюс.

2. Построение эпюры поперечной силы.

Первый участок. Воспользуемся методом сечений. Мысленно отсечем часть балки в пределах первого силового участка на расстоянии x от левого конца балки (рис. 13, з). Отбросим правую часть и рассмотрим равновесие оставшейся левой части. Равнодействующие внутренних сил сводятся к поперечной силе Q_y и изгибающему моменту M_z . Дадим им положительные направления. Используя уравнение равновесия $\Sigma Y = 0$, получим:

$$Q_y = -\frac{3}{4}P + 2qx \quad (0 \leq x < a).$$

Полученное выражение есть уравнение первой степени. Следовательно, поперечная сила Q_y на первом силовом участке ограничивается прямой линией, наклонной к базисной. Учитывая это, целесообразно определить лишь ординаты крайних точек прямой линии:

$$x=0, Q_y = -\frac{3P}{4}; \quad x=a, Q_y = -\frac{3P}{4} + 2qa = \frac{5}{4}P.$$

На рис. 13, б (на первом участке бруса) изображена эпюра Q_y . Из рассмотрения эпюры видно, что прямая линия пересекает базисную линию, изменяя знак с минуса на плюс. Представляет интерес найти абсциссу сечения балки, в которой поперечная сила равна нулю. Для этого приравняем нулю выражение $Q_y = -\frac{3P}{4} + 2qx = 0$ и найдем значение $x = \frac{3a}{8}$.

Второй участок. Аналогично, как ранее, воспользуемся методом сечений, рассмотрим равновесие левой части бруса (рис. 13, д), длину которой возьмем x . Направления Q_y и M_z дадим положительные. Получим:

$$Q_y = -\frac{3P}{4} + 2qa - 2P = -\frac{3P}{4} \quad (a \leq x < 2a).$$

График поперечной силы описывается уравнением нулевой степени, поэтому эпюра Q_y ограничивается прямой линией, параллельной базисной.

Третий участок. Поперечная сила определяется из равновесия левой части бруса (рис. 13, е):

$$Q_y = -\frac{3P}{4} + 2qa - 2P + P - q(x - 2a) \quad (2a \leq x < 4a).$$

При $x=2a$ $Q_y = \frac{+P}{4}$; при $x=4a$ $Q_y = -\frac{7P}{4}$.

Как и ранее, представляет интерес определение абсциссы сечения балки, в котором $Q_y = 0$. Для нахождения величины x приравняем выражение Q_y нулю:

$$Q_y = \frac{P}{4} - q(x - 2a) = 0, \text{ откуда } x = \frac{9}{4}a.$$

На четвертом и пятом участках построение эпюры выполняется аналогично.

3. Построение эпюры изгибающего момента M_z . Для определения равнодействующей пары внутренних сил M_z пользуются также методом сечений. На рис. 13, з, д, е показаны левые рассматриваемые части балки. Направления M_z в сечениях каждый раз приняты положительными. Аналитические выражения для изгибающих моментов в сечениях в пределах участка находим из уравнений равновесия $\Sigma M_z = 0$. При этом сумма моментов сил рассматриваемой части относительно оси z берется каждый раз относительно сечения, определяемого абсциссой x .

Первый участок. Рассматривая равновесие части бруса (см. рис. 13, з), найдем

$$M_z = -\frac{3P}{4}x + 2qx \frac{x}{2} = -\frac{3P}{4}x + qx^2 \quad (0 \leq x \leq a).$$

Изгибающий момент в сечении на первом участке балки описывается уравнением второго порядка. Другими словами, эпюра M_z на первом участке балки имеет вид параболы, для построения ее необходимы, по крайней мере, три точки;

$$x = 0, M_z = 0; \quad x = \frac{3}{8}a, M_z = -\frac{9m}{64};$$

$$x = a, M_z = -\frac{3P}{4}a + qa^2 = m/4.$$

На рис. 13, в показана эпюра изгибающего момента на первом участке.

Второй участок. Сумма моментов сил, действующих на часть балки относительно сечения на расстоянии x от левого конца (рис. 13, д), равняется:

$$M_z = -3P/4 \cdot x + 2qa(x - \frac{a}{2}) - 2P(x - a) - m \quad (a \leq x \leq 2a).$$

В выражении M_z момент от распределенной нагрузки интенсивностью $2q$ определится как произведение грузовой площадки $2qa$ на расстояние от центра тяжести грузовой площадки до рассматриваемого сечения $(x - a/2)$.

На втором участке M_z является уравнением первой степени. Для построения эпюры изгибающего момента на участке достаточно знать координаты крайних точек прямой линии. Ординаты точек найдем, если подставим абсциссы: $x = a$, $M_z = -3m/4$; $x = 2a$, $M_z = -\frac{3}{2}m$.

Третий участок. В сечении балки на расстоянии x от начала отсчета (рис. 13, е)

$$M_z = -3P/4 \cdot x + 2qa(x - \frac{a}{2}) - 2P(x - a) - m + 3/2 \cdot m + P(x - 2a) - q \frac{(x - 2a)^2}{2} \quad (2a \leq x \leq 4a).$$

Момент от распределенной нагрузки интенсивностью q взят здесь как произведение величины грузовой площадки $q(x - 2a)$ на расстояние от центра тяжести этой площадки до рассматриваемого сечения $(x - 2a)/2$.

Учитывая, что эпюра M_z описывается уравнением второго порядка, она ограничивается кривой, для построения которой необходимо иметь ординаты не менее трех точек. Задавая значениями абсцисс, из выражения M_z найдены величины ординат, по которым затем построена кривая, ограничивающая эпюру M_z на участке:

$$x = 2a, M_z = 0; \quad x = \frac{9}{4}a, M_z = \frac{1}{32}m;$$

$$x = 4a, M_z = -3m/4.$$

На четвертом и пятом участках эпюра M_z строится аналогично.

Основные свойства эпюры поперечной силы (Q_y) (рис. 13, б). На участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра ограничивается прямой линией, параллельной базисной. На участках, где имеется равномерно распределенная нагрузка, эпюра ограничивается прямой линией, наклонной к базисной. В случае неравномерно распределенной нагрузки (треугольной, трапециевидальной или произвольной) эпюра ограничивается параболой. Там, где приложена сосредоточенная нагрузка, на эпюре наблюдается скачок на величину по направлению силы, если построение ведется от левого конца балки, а если от правого, то наоборот.

С учетом дифференциальной зависимости $q_x = \frac{dQ_y}{dx}$ – интенсивность распределенной нагрузки в рассматриваемом сечении равняется величине тангенса угла наклона касательной к эпюре поперечной силы с базисной линией. На участке балки, где $M_z = \text{const}$, поперечная сила $Q = 0$.

Основные свойства эпюры изгибающего момента (M_z) (рис. 13, е). На участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра ограничивается прямой линией (параллельной или наклонной к базисной). На участках балки, где имеется равномерно распределенная нагрузка, эпюра изгибающего момента ограничивается кривой – параболой второго порядка, выпуклостью навстречу нагрузке. В случае неравномерно распределенной нагрузки эпюра ограничивается кривыми более высокого порядка.

В сечении, где приложена сосредоточенная пара сил, на эпюре наблюдается скачок на величину момента пары. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре изгибающего момента будет излом.

В сечении, где поперечная сила равна нулю, на эпюре M_z будет экстремум: максимум – при изменении знака Q_y с плюса на минус и минимум – при изменении знака Q_y с минуса на плюс при движении от левого конца балки.

С учетом дифференциальной зависимости $Q_y = \frac{dM_z}{dx}$ – тангенс угла наклона касательной к эпюре изгибающего момента с базисной линией равен поперечной силе в рассматриваемом сечении.

Построение эпюр Q_y и M_z по характерным сечениям балки. Можно ускорить построение эпюр, используя способ так называемых "характерных сечений".

Характерными считаются сечения, ограничивающие участок бруса. Суть способа состоит в том, что величины Q_y и M_z определяют только в этих сечениях, а затем с учетом свойств эпюр поперечных сил и изгибающих моментов производят соответствующие построения. Аналитические выражения Q_y и M_z пишут только для участков балки, где Q_y плавно изменяет величину, меняя при этом знак на обратный. В этом случае M_z достигает экстремального значения, которое, как правило, необходимо определить.

Нахождение максимального или минимального значения M_z проводится в такой последовательности: 1) составляют аналитическое выражение Q_y , приравняв его нулю и определяют абсциссу сечения балки, в котором Q_y отсутствует; 2) составляют аналитическое выражение M_z для соответствующего участка балки и в уравнение подставляют значение абсциссы сечения, в котором $Q_y = 0$.

Пример 4. Построить эпюры Q_y и M_z для одноконсольной балки (рис. 14, а), нагруженной сосредоточенными силами P и $6P$, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и парой сил, момент которой $2m$.

Решение. Для построения эпюры Q_y выбираем систему координат x , разместив начало ее на левом конце балки.

Построение эпюры выполняем при движении от левого конца балки.

В сечении, где приложена сила P , на эпюре поперечной силы (рис. 14, б) наблюдается скачок OA по направлению и на величину силы (точка A). В пределах первого силового участка нет распределенной нагрузки, поэтому эпюру Q_y ограничивают прямой AB , параллельной базисной OK . В сечении A , где на балку действует реакция $R_A = 4,5P$, также будет скачок BC по направлению и на величину этой силы.

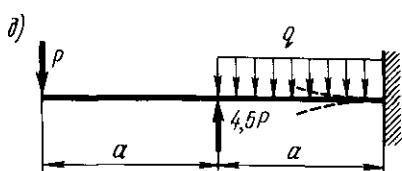
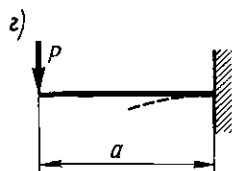
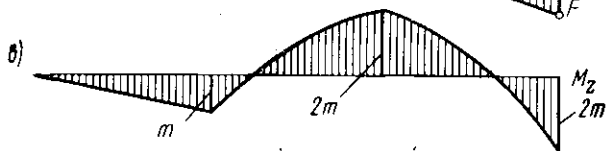
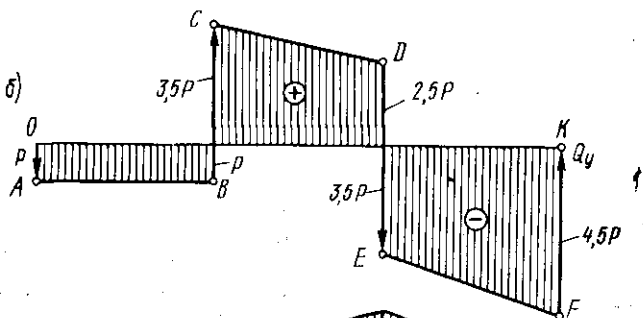
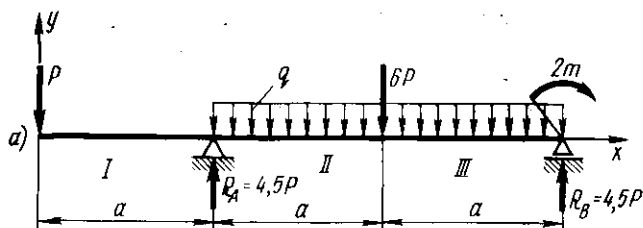


Рис. 14

На втором силовом участке балка нагружена распределенной нагрузкой, поэтому эпюра ограничивается прямой линией CD , наклонной к базисной. Чтобы найти ординату точки D , необходимо от величины поперечной силы $Q_y = 3,5P$ вычислить силу qa на втором участке.

Учитывая принятое соотношение $P = qa$, найдем, что поперечная сила в сечении на правом конце второго участка (точка D) равна $Q_y = 3,5P - qa = 2,5P$.

Чтобы найти значение Q_y в сечении балки на левом конце третьего участка (точка E), необходимо учесть сосредоточенную силу $6P$, изобразить скачок DE , равный значению этой силы и по ее направлению.

Аналогично строится эпюра поперечной силы на третьем участке.

Построение эпюры изгибающего момента M_z следует начинать с левого конца балки, каждый раз мысленно рассекая брус на границах силовых участков и рассматривая равновесие одной части балки.

В сечении, где приложена сила P , изгибающий момент $M_z = 0$. Здесь сила P имеет плечо, равное нулю.

В сечении, где приложена сила $4,5P$ изгибающий момент определим следующим путем: отсечем часть балки, отбросим правую часть, а левую — мысленно защемим (рис. 14, з); вычислим изгибающий момент в сечении, который равен Pa . Балка изогнется, как показано пунктиром (см. рис. 14, з). С учетом знака изгибающего момента найдем окончательно $M_z = -Pa$.

В сечении, где приложена сила $6P$, изгибающий момент определится так же. В этом случае рассматриваем левую часть балки (рис. 14, д), также защемленную на правом конце. Изгибающий момент:

$$M_z = -P \cdot 2a + 4,5Pa - qa \frac{a}{2} = 2m.$$

Изгибающий момент на правом конце балки всегда равен либо нулю, если нет сосредоточенного момента, либо значению момента, если он имеется. В данном случае сосредоточенный момент дает значение изгибающего момента $M_z = -2m$.

В рассмотренном случае, при переходе от второго участка к третьему, Q_y меняет знак с плюса на минус, поэтому в этом сечении изгибающий момент достигает максимальной величины $2m$.

Обычно эпюры Q_y и M_z целесообразно строить по характерным сечениям и лишь при необходимости определения экстремального значения M_z составлять их аналитические выражения в произвольном сечении соответствующего участка балки.

Пример 5. Построить эпюры изгибающего момента M_z , поперечной силы Q_y и нормального усилия N для плоской рамы (рис. 15, а).

Решение. Для построения эпюры используем метод сечений аналогично тому, как это выполнялось ранее. Эпюры будем строить по характерным сечениям, которыми являются концевые сечения каждого участка рамы.

Первый участок. В первом характерном сечении участка, где приложена сила P , $M_z = 0$; $Q_y = P$; $N = 0$. Момент M_z равен нулю, так как плечо силы равно нулю. Во втором характерном сечении участка (рис. 15, б): $M_z = Pa$; $Q_y = P$; $N = 0$.

Изгибающий момент, поперечную и нормальную силы определим, рассматривая отсеченную часть рамы. Из рис. 15, б видно, что изгибающий момент равен Pa , поперечная сила равна P , сжатое волокно балки расположено справа. Здесь и далее эпюру M_z будем строить на сжатом волокне.

Второй участок. В первом характерном сечении этого участка изгибающий момент легко найти, рассматривая равновесие узла A (рис. 15, в). Этот узел, равно как и вся упругая система (рама), находится в равновесии, поэтому в первом характерном сечении второго участка M_z равен моменту m , действующему во втором характерном сечении первого участка. Во втором характерном сечении второго участка изгибающий момент M_z , поперечная сила Q_y и нормальное усилие N легко найти из рассмотрения части рамы (рис. 15, г). Здесь: $M_z = Pa$; $Q_y = 0$; $N = -P$; сжатое волокно — сверху, и эпюра M_z строится сверху от базисной линии.

Третий участок. В сечении, где приложена сила P , $M_z = 0$; $Q_y = -P$; $N = 0$. Во втором характерном сечении участка внутренние силовые факторы можно определить, если рассмотреть равновесие частицы рамы (третий участок), точно также, как это делали для первого участка рамы. Здесь: $M_z = Pa$ (сжатое волокно — слева от оси); $Q_y = -P$ и $N = 0$.

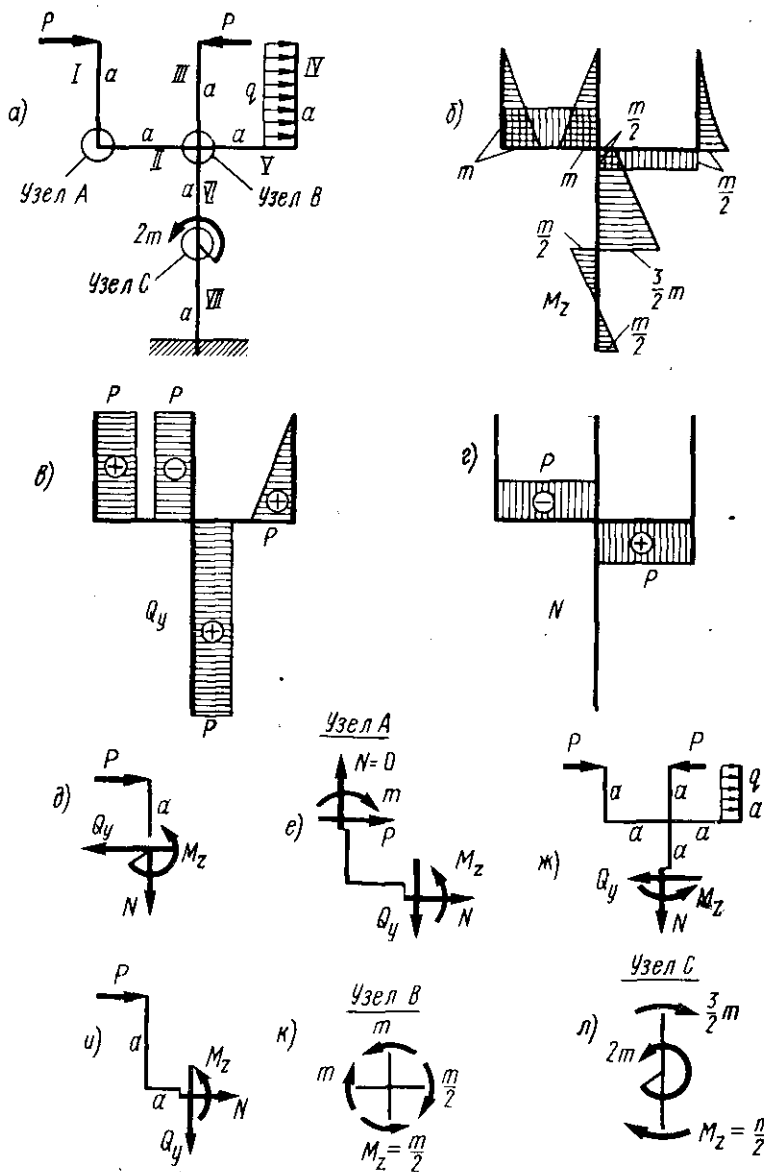


Рис. 15

Четвертый и пятый участки. Определение значения M_z , Q_y и N на участках производится аналогично тому, как на первом и втором. Различие состоит только в том, что на четвертом участке приложена распределенная нагрузка интенсивностью q . Поэтому изгибающий момент во втором характерном сечении четвер-

того участка и в первом и во втором характерных сечениях пятого участка равен произведению силы qa на расстояние $a/2$ от центра тяжести грузовой площадки до сечения, т. е. $M_z = qa^2/2 = m/2$.

Шестой участок. Значения внутренних силовых факторов в первом характерном сечении шестого участка будут: $M_z = Pa$; $Q_y = P$; $N = 0$. Величину изгибающего момента можно найти, рассматривая равновесие оставшейся части рамы. Однако легче найти значение M_z , если вырезать узел B (рис. 15, κ), приложить значения изгибающих моментов в характерных сечениях второго, третьего и пятого участков, рассмотреть равновесие узла. Из рис. 15, κ видно, что $M_z = m/2$ и что сжатое волокно находится справа от оси. Величину M_z во втором характерном сечении найдем, рассматривая часть рамы (рис. 15, λ). Причем сечение выбрано несколько выше сечения (см. рис. 15, a), в котором приложен сосредоточенный момент $2m$:

$$\Sigma M_z = 0; M_z = P \cdot 2a - P \cdot 2a + qa \cdot \frac{3}{2} a = \frac{3}{2} m \quad (\text{сжатое волокно справа от оси рамы});$$

$$\Sigma Y = 0; Q_y = P - P + qa = P; \quad \Sigma X = 0, N = 0.$$

Седьмой участок. Изгибающий момент в первом характерном сечении участка легче найти, если вырезать часть рамы вокруг сечения, где приложен сосредоточенный момент $2m$ — узел C (рис. 15, $л$). Здесь $M_z = 2m - \frac{3}{2} m = m/2$. Во втором характерном сечении, т. е. в защемлении, значение изгибающего момента найдем как алгебраическую сумму моментов сил, приложенных к раме:

$$M_z = P \cdot 3a - P \cdot 3a + qa \cdot \frac{5}{2} a - 2m = m/2.$$

Сжатое волокно рамы в этом сечении — справа от оси.

Поперечная и нормальная силы на участке будут иметь те же значения, какие были найдены на предыдущем силовом участке рамы.

На основании полученных значений M_z , Q_y и N построены эпюры изгибающего момента (рис. 15, $б$), поперечной силы (рис. 15, $в$) и нормального усилия (рис. 15, $г$).

В заключение необходимо указать на правило определения знака поперечной силы. При любом расположении участка рамы знак поперечной силы может быть найден следующим путем: *если касательную к эпюре изгибающего момента в данном сечении для совмещения ее с осью рамы надо повернуть на меньший угол по направлению движения часовой стрелки, то поперечная сила в этом сечении будет положительной, и наоборот.*

Знак нормального усилия принимается так же, как при деформации растяжения-сжатия, т. е. растягивающему усилию приписывается знак плюс, сжимающему — минус.

Построение эпюр крутящего момента M_x , изгибающих моментов M_y и M_z для пространственного плоскопараллельного ломаного бруса.

Ломаные брусья состоят из отдельных прямых брусьев, жестко соединенных между собой под прямым углом. Для ломаных брусьев строим только эпюры M_x , M_y , M_z . Эпюры поперечных сил и нормальных усилий обычно не строят. При построении эпюр для пространственных брусьев, представленных, например, на рис. 16, текущую систему координат выбирают на участке со стороны свободного

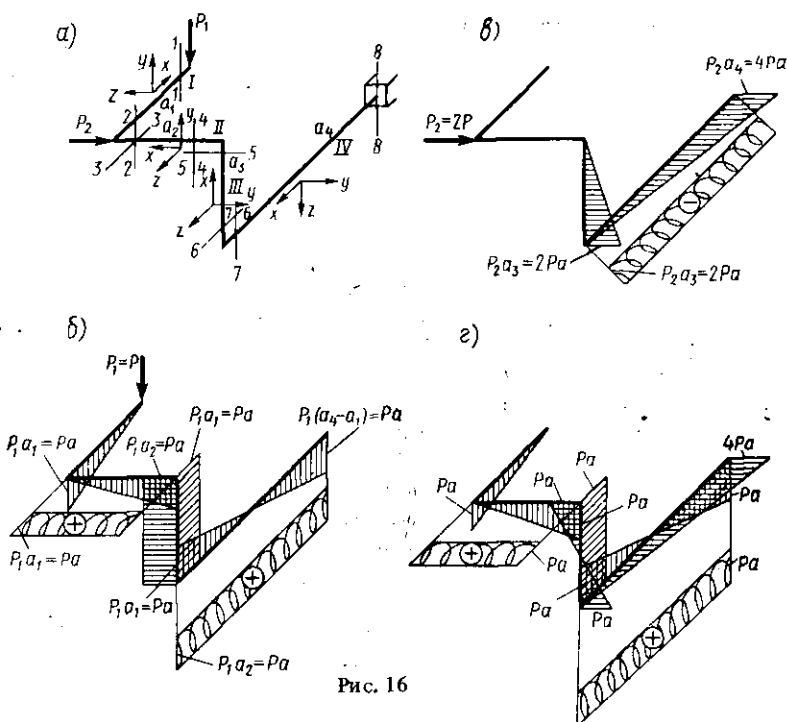


Рис. 16

конца рамы. При этом ось x всегда направляют в сторону свободного конца, а оси y и z размещают в плоскости сечения. При переходе к последующему участку производят поворот системы координат, принятой на предыдущем участке, относительно оси, которая перпендикулярна плоскости, образуемой смежными участками рамы. Поворот осуществляют так, чтобы ось x совпала с осью бруса и была направлена в сторону свободного конца рамы. При переходе от первого участка ко второму поворот системы координат первого участка осуществляют в данном случае относительно оси y , так как ось y перпендикулярна плоскости, образуемой первым и вторым участками. Поэтому направление этой оси на втором участке остается таким же, как и на первом; ось x направляется в сторону свободного конца, а третья ось z получает свое соответствующее направление.

Пример 6. Построить эпюры M_x , M_y , M_z для ломаного бруса (рис. 16, а). В задаче приняты следующие соотношения: $P_1 = P$; $P_2 = 2P$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 0,5a_4 = a$.

Решение. Построение эпюр начинаем с определения значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях каждого участка ломаного бруса. При этом для определения M_x , M_y , M_z начало текущей системы координат размещаем в первом характерном сечении участка, а затем во втором сечении, двигаясь каждый раз от свободного конца бруса в сторону заземления. Эпюры строим, предполагая, что к раме приложена только сила P_1 , а затем только сила P_2 . Результирующие эпюры внутренних силовых факторов найдем сложением эпюр, полученных при последовательном нагружении бруса отдельными силами.

Построение эпюры при действии на брус силы $P_1 = P$.

Первый участок. Ось y параллельна силе P_1 , а ось x пересекает линию действия этой силы, поэтому в пределах участка изгибающий момент M_y и крутящий момент M_x отсутствуют (рис. 16, а, б). При размещении начала системы координат в первом характерном сечении 1 - 1 участка плечо силы P_1 относительно оси z равно нулю и $M_z = 0$. При размещении системы координат во втором характерном сечении 2 - 2 можно видеть, что $M_z = P_1 a_1 = Pa$. Плоскостью действия изгибающего момента будет плоскость, образуемая осями x и y (сжатое волокно снизу). Учитывая это, эпюра M_z строится в плоскости xu ниже базисной линии (рис. 16, б).

Второй участок. Начало системы координат размещаем в первом характерном сечении 3 - 3; ось z пересекает линию действия силы P и поэтому $M_z = 0$; момент силы относительно оси y равен нулю в пределах всего участка (ось параллельна силе); $M_x = P_1 a_1 = Pa$ во всех сечениях участка. Если начало системы координат разместить в характерном сечении 4 - 4, то $M_z = P_1 a_2 = Pa$; изгибающий момент действует в плоскости двух других осей (x, y); сжатое волокно бруса - снизу. Откладывая ординату $M_z = Pa$ перпендикулярно оси x по линии оси y , строим эпюру изгибающего момента на втором участке бруса.

Третий участок. Ось x параллельна силе P_1 , поэтому в пределах всего участка $M_x = 0$. Изгибающий момент $M_z = P_1 a_2 = Pa$ (сжатое волокно слева), а момент $M_y = P_1 a_1 = Pa$ (сжатое волокно за плоскостью чертежа). Значения M_y и M_z в пределах участка постоянны.

Четвертый участок. Ось z параллельна силе P , поэтому на участке $M_z = 0$. Изгибающий момент $M_y = P_1 a_1 = Pa$ (сжатое волокно сверху). При размещении начала текущей системы координат во втором характерном сечении 8 - 8 участка (в защемлении) сжатое волокно $M_y = P_1(a_4 - a_1) = Pa$ будет внизу. Крутящий момент $M_x = P_1 a_2 = Pa$ направлен против часовой стрелки, т. е. является положительным; его величина на всей длине участка бруса постоянна.

Построение эпюр при действии силы $P_2 = 2P$. Изгибающих или крутящих моментов в пределах первого и второго участков (рис. 16, в) не будет. В этом убеждаемся, пользуясь каждый раз методом сечений и рассматривая равновесие части бруса со стороны свободного конца.

Третий участок. Размещая начало текущей системы координат в характерном сечении 5 - 5, видим, что линия действия силы $2P$ совпадает с осью y , пересекает оси x и z . Поэтому $M_x = M_y = M_z = 0$. Если начало системы координат разместить в сечении 6 - 6, то $M_x = M_y = 0$, а $M_z = P_2 a_3 = 2Pa$. Эпюру необходимо откладывать в плоскости двух других осей (плоскости xu) справа от базисной линии (на сжатом волокне).

Четвертый участок. Систему координат разместим в сечении 7 - 7. Тогда ось y параллельна силе P_2 и $M_y = 0$. Ось z пересечет линию действия силы P_2 и $M_z = 0$. Наконец, $M_x = P_2 a_3 = -2Pa$. Знак минус указывает на то, что крутящий момент направлен по часовой стрелке (это можно отметить, если смотреть на сечение со стороны оси x (рис. 16, а)).

Начало текущей системы координат расположим в характерном сечении 8 - 8. Из рассмотрения положения осей и направления силы находим: $M_y = 0$; $M_z = P_2 a_4 = 2P \cdot 2a = 4Pa$; $M_x = -P_2 a_3 = -2Pa$. Эпюры M_x и M_z на третьем и четвертом участках при действии силы $P_2 = 2P$ представлены на рис. 16, в.

Построение эпюр при одновременном действии на брус сил P_1 и P_2 .

Эпюры изгибающих и крутящего моментов при одновременном действии сил P_1 и P_2 можно построить:

а) путем геометрического сложения эпюр изгибающих моментов, лежащих в одной и той же плоскости. Например, на третьем участке в плоскости xu лежат изгибающие моменты Pa и $2Pa$. Складывая ординаты эпюр отдельно в сечении 5 – 5 и сечении 6 – 6, получим значения $M_z = Pa$. При этом в первом характерном сечении сжатое волокно будет слева, а во втором – справа от базисной линии. Вследствие этого эпюра ограничивается прямой, пересекающей базисную линию по середине;

б) путем алгебраического сложения значений крутящих моментов в пределах участка. Например, на четвертом участке крутящий момент от силы P_1 равен $M_x = Pa$, а от силы $P_2 M_x = -2Pa$. Следовательно, результирующий момент равен алгебраической сумме $M_x = -Pa$.

Суммирующие эпюры M_x, M_y, M_z при одновременном действии P_1 и P_2 представлены на рис. 16, г.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ, СЖАТИИ И КРУЧЕНИИ

Задача 2

Для стального (чугунного) бруса (рис. 17)* определить: а) как далеко конструкция от опасного состояния (найти запас прочности), если известны внешние нагрузки, площади поперечного сечения, материал и длина отдельных участков и бруса в целом; б) перемещение сечения 1 – 1 бруса.

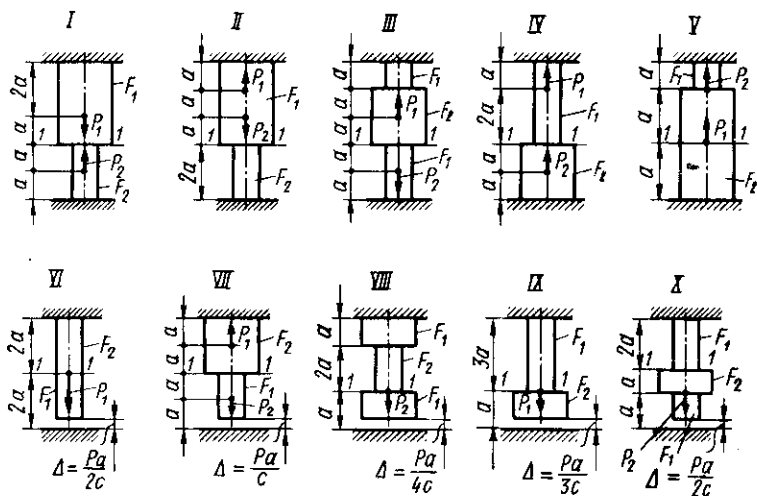


Рис. 17

При решении задачи в конечный ответ подставить: значение силы $P = 100$ кН, площадь $F = 2 \cdot 10^{-3}$ м², длину участка или бруса $a = 0,5$ м, модуль продольной упругости (для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, для чугуна $E = 1,5 \cdot 10^5$ МПа).

Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из табл. 2.

Т а б л и ц а 2

№ стро- ки	Схема по рис. 16	P_i		F_i		Материал бруса	Предельные напряжения		
		P_1	P_2	F_1	F_2		предел те- кучести σ_T МПа.	предел прочности σ_B , МПа	растяже- ние
1	I	P	$2P$	F	$2F$	Сталь 20	250	—	—
2	II	$3P$	P	F	F	Сталь 30	300	—	—
3	III	$2P$	P	$2F$	F	Чугун СЧ12-28	—	120	500
4	IV	P	$3P$	F	$2F$	Чугун СЧ38-60	—	380	1400
5	V	$3P$	P	F	F	Сталь 40	340	—	—
6	VI	P	$2P$	$2F$	F	Чугун СЧ28-48	—	280	1000
7	VII	$2P$	$3P$	$2F$	F	Сталь 50	380	—	—
8	VIII	$3P$	P	F	$2F$	Чугун СЧ12-28	—	120	500
9	IX	P	$2P$	$2F$	F	Сталь 40ХН	900	—	—
0	X	P	$3P$	F	$2F$	Сталь 40Х	800	—	—
		б	в	а	д	с		г	

Порядок выполнения задачи 2: 1) определяется степень статической неопределимости системы; 2) раскрывают статическую неопределимость системы; 3) строят эпюры нормального усилия N , нормального напряжения σ и перемещения δ ; 4) определяют запас прочности из выражения $n = \sigma_{\text{пред}}/\sigma_{\text{max}}$. При этом принимают для стального бруса $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$, для чугунного $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{вр}}$ или $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{BC}}$; 5) отыскивают перемещение искомого сечения бруса.

Задача 3

Абсолютно жесткий брус K (рис. 18) шарнирно поддерживается стальными стержнями, длина которых a_i , или крепится посредством опорных устройств; брус нагружен силами P_i . Требуется выполнить проектировочный расчет (найти площади поперечных сечений стержней), принимая для стальных стержней $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{TC}} = \sigma_T$.

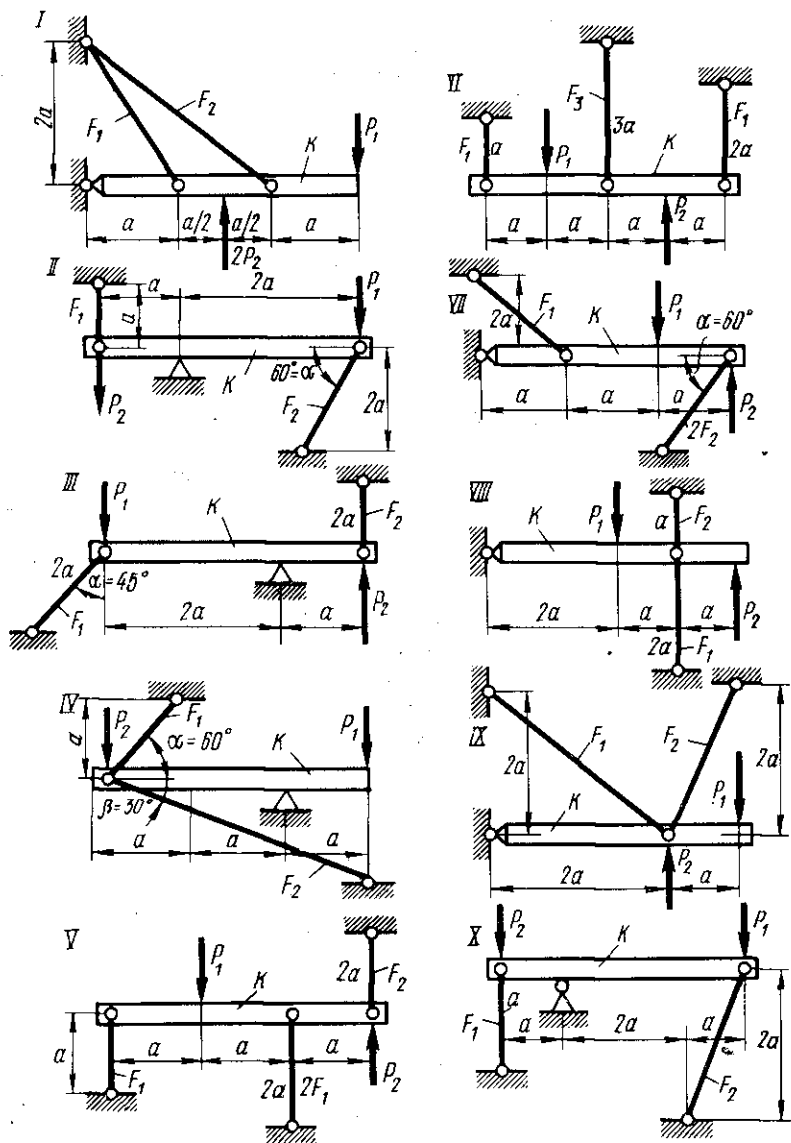


Рис. 18

В конечный ответ задачи подставить значение силы $P = 10$ кН. Запас прочности конструкции принять $n = 2,5$. Стальные стержни считать обеспеченными на устойчивость.

Данные, необходимые для решения задачи, взять из табл. 3.

Таблица 3

№ строки	Схема по рис. 17	P_i		F_i		Материал стержня — сталь марки	Предел текучести σ_T , МПа
		P_1	P_2	F_1	F_2		
1	I	P	$2P$	$2F$	F	20	250
2	II	$2P$	P	$2F$	F	30	300
3	III	$2P$	P	F	F	40	340
4	IV	P	$3P$	$3F$	F	50	380
5	V	P	$2P$	$2F$	$3F$	40XH	900
6	VI	$3P$	P	$3F$	F	40X	800
7	VII	$3P$	P	$2F$	$3F$	30	300
8	VIII	$2P$	P	$3F$	F	20	250
9	IX	P	$2P$	$2F$	$2F$	40XH	900
0	X	P	$3P$	F	$3F$	40X	800
	в	г	д	е	б	а	

Порядок выполнения задачи: 1) определяют степень статической неопределенности системы; 2) раскрывают статическую неопределенность системы; 3) находят наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения в стержнях; 4) из условия проектировочного расчета $\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$ определяют величину искомой площади сечения стержня, в котором напряжение максимально. Площади поперечного сечения остальных стержней находятся с учетом условия задачи.

Задача 4

Стальной брус зашцеилен по концам (рис. 19); нагружен парами сил, момент которых m_i ; имеет поперечные сечения: круглое, круглое кольцевое, прямоугольное или тонкостенное замкнутое. Требуется: подобрать размеры поперечного сечения бруса, принимая значение момента пары сил $m = 5 \cdot 10^3$ Н · м. Принять: величину допускаемого касательного напряжения $[\tau] = 80$ МПа; отношение среднего диаметра к толщине замкнутого контура $D_{\text{ср}}/\delta = 20$.

Данные для решения задачи выбрать из табл. 4.

Таблица 4

№ строки	Схема по рис.	m_i		Размеры поперечного сечения бруса				
		m_1	m_2	h	b	$D_{\text{ср}}$	d	D
1	I	$2m$	m	b	b	$2b$	b	$2b$
2	II	$2m$	m	$3b$	$2b$	$2b$	$1,5b$	$2b$
3	III	m	$2m$	b	$2b$	$3b$	b	$3b$

№ строки	Схема по рис. 18	m_i		Размеры поперечного сечения бруса				
		m_1	m_2	h	b	$D_{\text{ср}}$	d	D
4	IV	m	$2m$	$5b$	$2,5b$	$4b$	$3b$	$4b$
5	V	$3m$	m	$2b$	b	$2b$	$1,5b$	$2b$
6	VI	$2m$	$3m$	$3b$	$1,5b$	$3b$	$2b$	$2,5b$
7	VII	m	$2m$	$4b$	b	$3b$	$2,5b$	$3b$
8	VIII	$2m$	m	$3b$	$2b$	$2b$	$1,6b$	$2b$
9	IX	$3m$	m	$2b$	b	$2b$	$1,4b$	$2b$
0	X	$2m$	m	$4b$	$2b$	$3b$	$2b$	$3b$

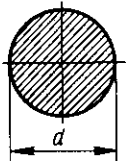
Порядок выполнения задачи: 1) определяют степень статической неопределимости системы; раскрывают ее статическую неопределимость; при решении уравнения угловых перемещений для брусьев, имеющих участки прямоугольного поперечного сечения, значения коэффициентов $\beta = f(h/b)$ выбирают из табл. 5.

Таблица 5

Кэф-фици-ент	Отношение большей стороны h сечения к меньшей b								
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313
β	0,141	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313
γ	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

2) строят эпюры крутящего момента M_K , наибольшего касательного напряжения τ_{max} и эпюру угловых перемещений φ ; при выборе значений моментов сопротивления W_K и жесткости поперечных сечений бруса $C = GJ_K$ следует использовать табл. 6.

Таблица 6

Форма сечения бруса	Момент сопротивления сечения W_K	Жесткость сечения $C = GJ_K$
	$0,2 d^3$	$G \cdot 0,1 d^4$

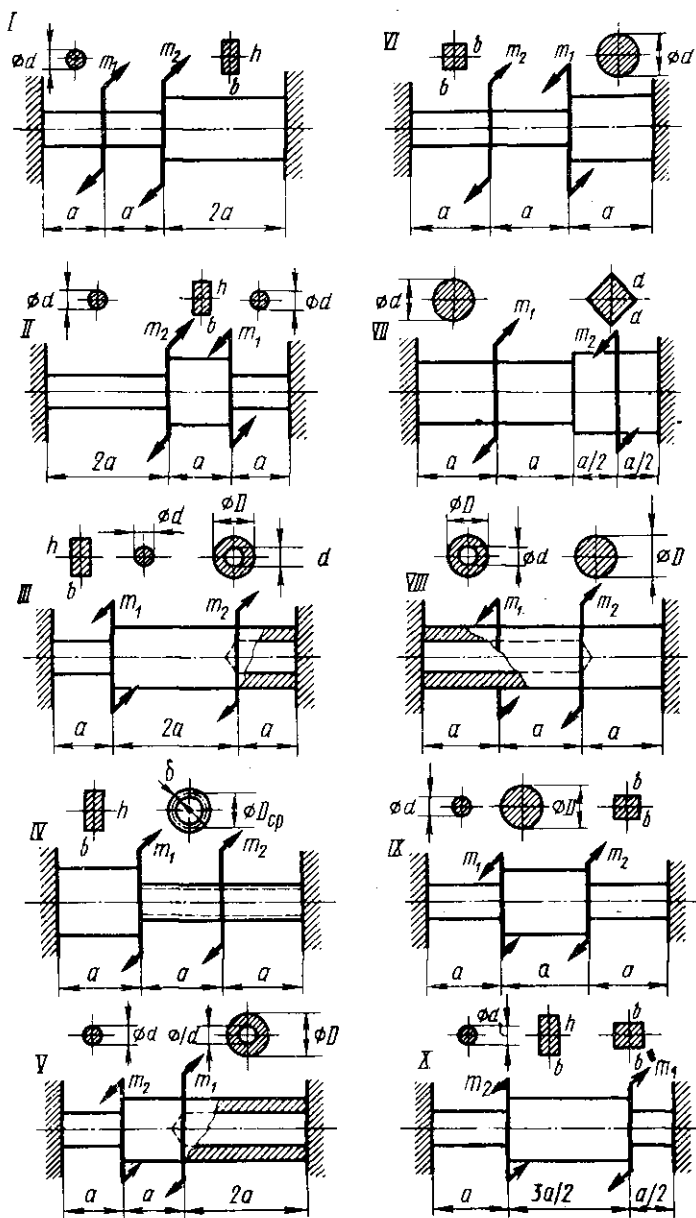
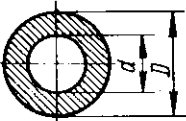
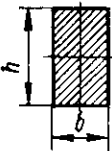



Рис. 19

Форма сечения бруса	Момент сопротивления сечения W_K	Жесткость сечения $C = GJ_K$
	$0,2D^3(1 - k^4)$	$G \cdot 0,1D^4(1 - k^4)$
	ab^2h	$G\beta b^3h$
	$2F_{ср}\delta_{\min}$	$G \frac{4F_{ср}^2}{\phi \frac{dS}{\delta}}$

В формулах, указанных в таблице, приняты: $k = d/D$; $F_{ср}$ — площадь сечения по средней линии; δ_{\min} — минимальное значение толщины стенки тонкостенного замкнутого сечения бруса.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3

РАСЧЕТ БАЛОК НА ИЗГИБ

Задача 5

Требуется:

1. Подобрать размеры поперечного сечения балки (рис. 20): а) стальной (по варианту *a* заданной схемы) для случаев: балка — двутавровая; прямоугольного поперечного сечения со сторонами h — большая, b — меньшая (отношение сторон $h/b = 2$); круглого поперечного сечения; кольцевого поперечного сечения (отношение диаметров внутреннего к наружному $k = d/D = 0,8$); тонкостенного замкнутого поперечного сечения (отношение толщины стенки к диаметру по средней линии $\delta/D_{ср} = 0,1$); б) чугунной (по варианту *б* заданной схемы), по

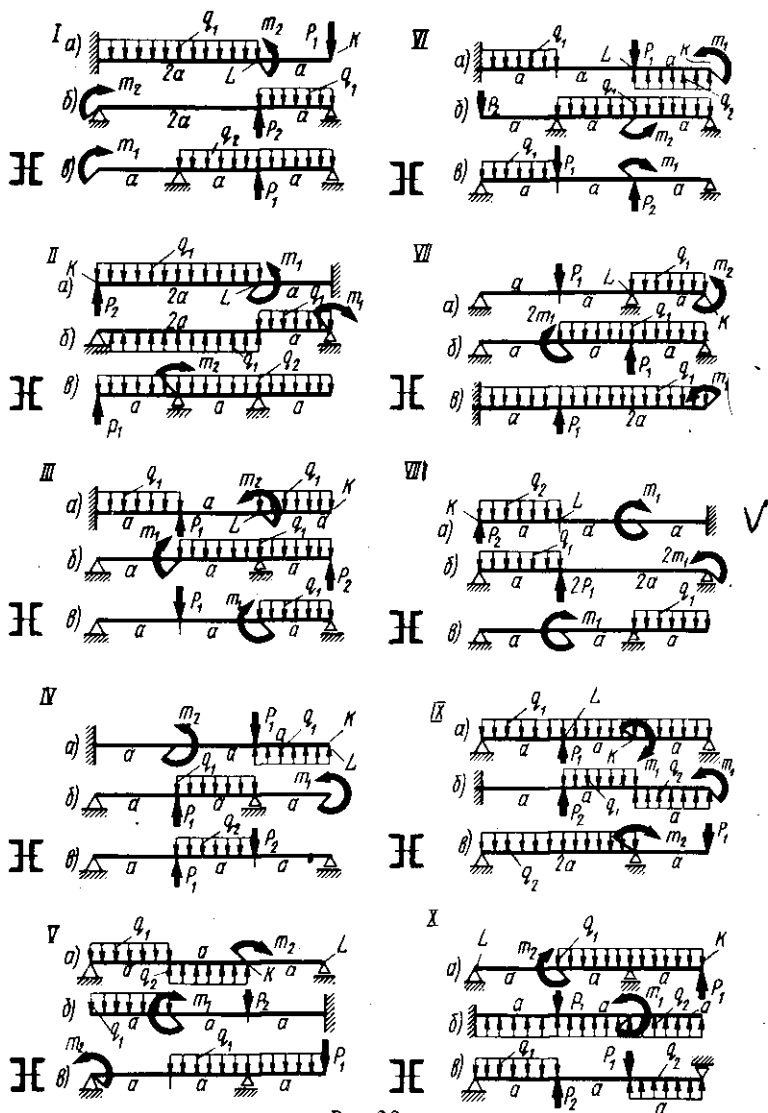


Рис. 20

перечное сечение которой, согласно варианту задания, выбрать по рис. 21; в) стальной (по варианту в заданной схеме), состоящей из двух швеллеров.

2. Начертить (в масштабе) поперечные сечения стальных балок по варианту а; определить соотношение расхода материала на единицу длины балки (путем сопоставления площадей поперечного сечения балок различного профиля), приняв площадь поперечного сечения двутавра за единицу. Высказать суждение по полученному соотношению.

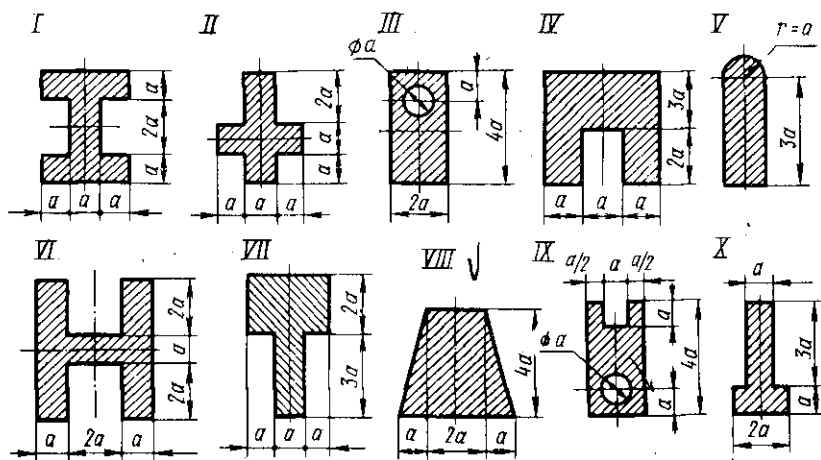


Рис. 21

3. Построить эпюры нормального напряжения σ в поперечных сечениях балок по вариантам *a* и *б*, имея в виду, что силовая линия совпадает с вертикальной осью сечения.

4. Построить эпюры касательного напряжения τ в поперечных сечениях балок по вариантам *a* и *б*, каждый раз определяя их максимальные значения.

5. Определить на основании метода начальных параметров прогиб сечения *K* и угол поворота сечения *L* двутавровой балки, рассчитанной согласно варианту *a*.

6. Показать примерное положение упругой линии балки (см. поз. 5 задачи) с учетом значений прогиба сечения *K* и угла поворота сечения *L*; особенностей опорных устройств балки; эпюры изгибающего момента.

7. Принять для всех балок следующее соотношение: $m = Pa = qa^2$, при этом считать: $q = 10$ кН/м, $a = 1$ м; запас прочности $n = 2$.

Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из табл. 7, а прочностные характеристики стали и чугуна — из табл. 2.

Указания по выполнению задачи 4.

1. Все расчеты при построении эпюр Q_y и M_z , определении перемещений сечений балки выполнить в общем виде и лишь в расчетные формулы и окончательные выражения подставить необходимые данные, определяя числовые значения искомых величин.

2. Для всех вариантов считать силовую линию совпадающей с вертикальной осью, как отмечено выше.

3. При решении вопроса о прочности: стальной балки — положение главных центральных осей инерции очевидно, чугунной — положение таких осей и величина главных центральных моментов инерции подлежит вычислению.

4. При определении значений главных центральных моментов инерции сечения чугунной балки по рис. 21 принять следующий порядок: а) выбрать исходную систему координат, например y_1, z_1 ; вычислить статические моменты сечения относительно этих осей; найти положение центра тяжести сечения; б) провести через центр тяжести сечения оси, например, y_2, z_2 параллельные исходным; вы-

числить центробежный и осевые моменты инерции относительно осей y_2 и z_2 ; в) определить положение главных центральных осей инерции u и z ; г) вычислить значения главных центральных моментов инерции относительно осей u и z^* .

5. При расчете чугунной балки на прочность величины наибольших нормальных напряжений (по модулю) определить из следующих выражений:

$$\text{по растянутому волокну } \sigma_{\max}^p = \frac{M_z}{J_z} y_1;$$

$$\text{по сжатому волокну } |\sigma^c|_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_2,$$

где M_z – максимальное значение изгибающего момента (берется из эпюры M_z); J_z – величина главного центрального момента инерции; y_1 и y_2 – координаты точек сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, в которых возникает соответственно растяжение и сжатие.

Расчетными условиями будут выражения $\sigma_{\max}^p \leq [\sigma]_p$ и $|\sigma^c|_{\max} \leq [\sigma]_c$.

Т а б л и ц а 7

№ стро- ки	Схема по рис. 20 и 21	m_i		P_i		q_i		Марка материала балки	
		m_1	m_2	P_1	P_2	q_1	q_2	стальной	чугунной
1	I	3m	2m	P	2P	2q	q	сталь 20	чугун СЧ12-28
2	II	2m	m	P	P	q	–	сталь 40X	чугун СЧ28-48
3	III	–	2m	–	2P	q	2q	сталь 30	чугун СЧ12-28
4	IV	2m	–	P	2P	2q	–	сталь 40XH	чугун СЧ28-48
5	V	m	m	2P	–	3q	2q	сталь 40	чугун СЧ12-28
6	VI	2m	m	2P	–	2q	q	сталь 20	чугун СЧ38-60
7	VII	2m	m	P	2P	2q	–	сталь 50	чугун СЧ12-28
8	VIII	3m	2m	P	–	–	2q	сталь 40XH	чугун СЧ28-48
9	IX	m	m	2P	P	q	2q	сталь 30	чугун СЧ38-60
0	X	2m	m	P	P	2q	q	сталь 40XH	чугун СЧ12-28
		а	б	е	г	в	д		

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Задача 6

Для неразрезной балки и плоской рамы (рис. 22):

1) выполнить проктировочный расчет, принимая: а) балку (вариант а в заданной схеме) стальной двутавровой; б) раму (вариант б в заданной схеме)

* При выполнении п. 4 учесть свойство оси симметрии сечения чугунной балки, что существенно сократит расчеты.

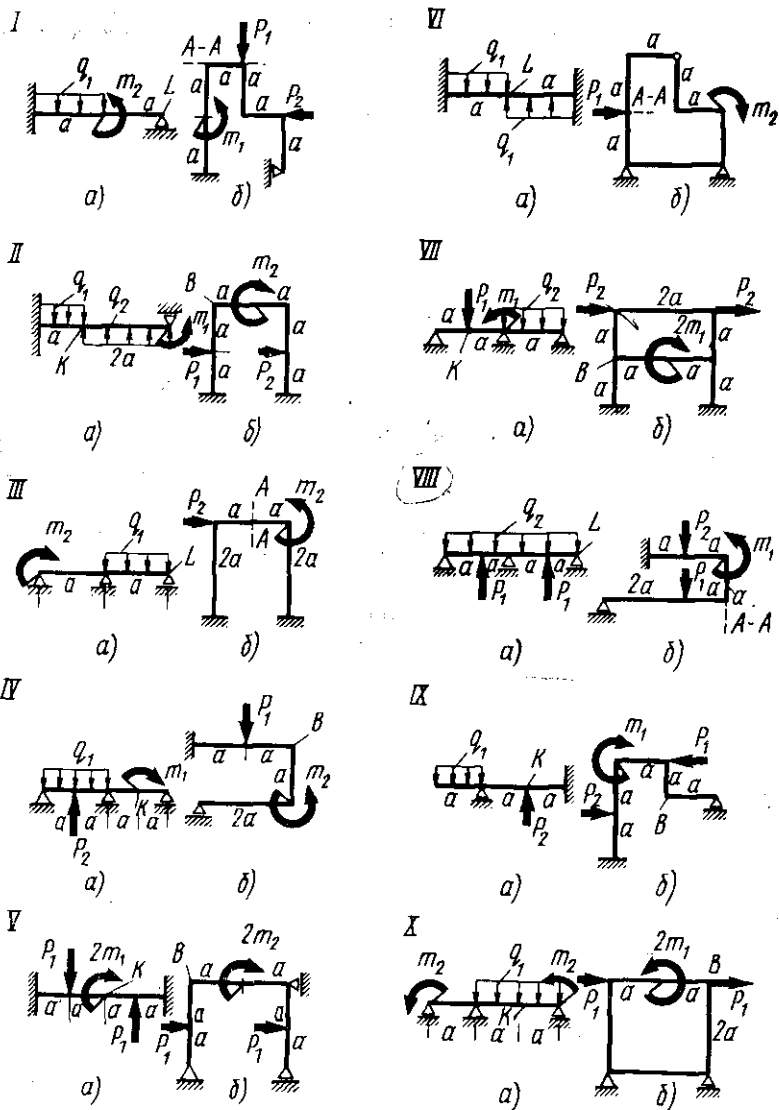


Рис. 22

стальной круглого поперечного сечения; в) силовую линию в балке совпадающей с осью наименьшей жесткости сечения;

2) определить прогиб сечения K или угловое перемещение сечения L балки (вариант a) и линейное перемещение по направлению $A - A$ или угловое перемещение сечения B рамы (вариант b);

3) расчеты при вычислении поперечной силы Q_y и изгибающего момента

M_z для плоской рамы, а также перемещений выполнить в аналитической форме и лишь в расчетные формулы или окончательные выражения подставить необходимые данные, находя числовые значения искомым величин.

Для балок и рам, как и в предыдущих задачах, принять $m = Pa = qa^2$, причем $q = 10$ кН/м; $a = 1$ м; запас прочности $n = 2$; модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Остальные данные, необходимые для решения задачи, выбрать по табл. 7.

Порядок выполнения контрольной работы 4 аналогичен решению примеров 6 и 7.

Пример 6. Для неразрезной двутавровой балки (рис. 23, а) выполнить проектировочный расчет, если дано $m = Pa = qa^2$; $q = 20$ кН/м; $a = 1,6$ м; запас прочности $n = 3$, предел текучести при растяжении и сжатии $\sigma_{Tr} = \sigma_{Tc} = \sigma_T = 480$ МПа, модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение 1. Определим степень статической неопределимости балки. На балку наложены четыре связи; система плоская и можно использовать три уравнения равновесия; система один раз статически неопределима ($4 - 3 = 1$).

2. Образует основную O (рис. 23, б) и эквивалентную \mathcal{E} (рис. 23, в) системы.

3. Построим в системе O эпюру изгибающего момента отдельно от силы P (рис. 23, г), сосредоточенного момента m (рис. 23, д) и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 23, е, ж). При построении эпюры от распределенной нагрузки дано расслоение эпюры относительно сечения, совпадающего с опорой C . В этом случае: а) определена реакция в левой опоре правого пролета, равная $R_B = qa/4$; б) отброшена опора и защемлена балка в сечении, которое совпадает с правой опорой; в) построена эпюра изгибающего момента от $qa/4$ (верхняя эпюра) и отдельно от распределенной нагрузки интенсивностью q (нижняя эпюра). Эпюры от заданных сил в основной системе обозначены P (рис. 23, и).

4. Строим в основной системе эпюру изгибающего момента от единичных моментов по направлению неизвестного X_1 (рис. 23, к).

5. Пишем каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы $\delta_{1p} + \delta_{11}X_1 = 0$.

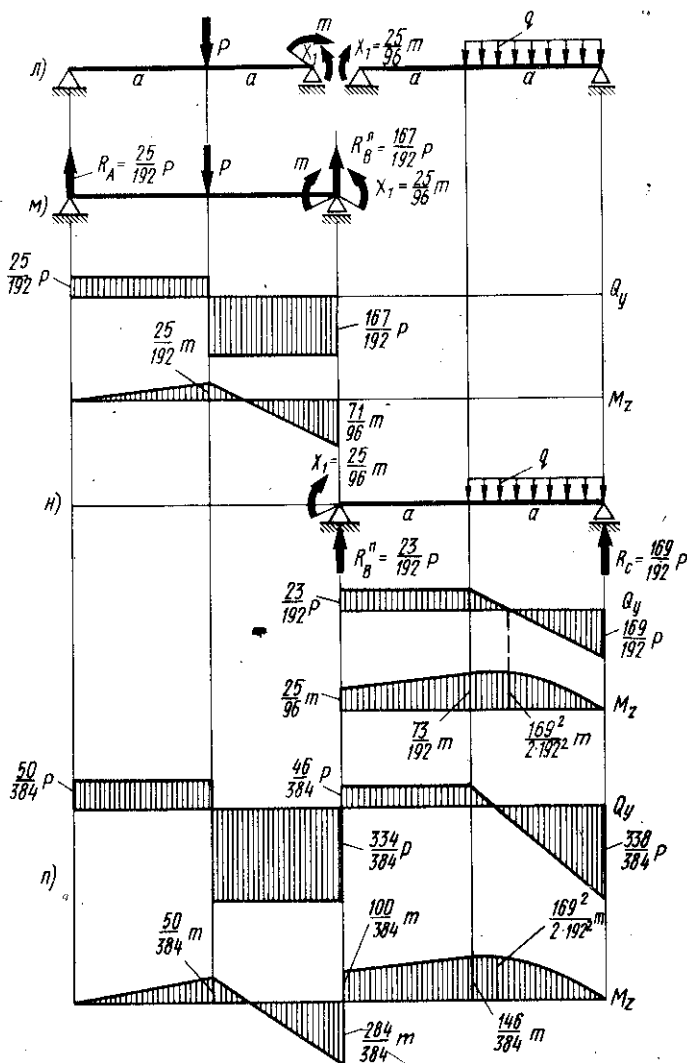
6. Определяем δ_{1p} и δ_{11} , используя способ Верещагина, по формуле $\delta_{pk} = \Sigma \frac{F_i h_i}{(EJ_z)_i}$, где F — площадь эпюры, h — ордината, взятая с другой эпюры под центром тяжести первой эпюры. Находим δ_{1p} как произведение площадей эпюры P на ординаты, взятые с эпюры I каждый раз под центром тяжести эпюры P . Учитывая, что $m = Pa = qa^2$, имеем:

$$\delta_{1p} = \frac{1}{EJ_z} [F_1 h_1 + \dots + F_4 h_4] = \frac{Pa^2}{EJ_z} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} - \left(1 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{8} \right] = -\frac{25}{96} \cdot \frac{Pa^2}{EJ_z}$$

Находим δ_{11} , перемножая эпюру саму на себя, т. е. берем составляющие площади эпюры I и умножаем на ординаты, проходящие через центр тяжести площадей той же эпюры I ;

$$\delta_{11} = \frac{a}{EJ_z} \left[1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] 2 = \frac{4a}{3EJ_z}$$

7. Решая каноническое уравнение, получим $X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{25}{128} m$. Знак



Продолжение рис. 23 (I)

плюс указывает на то, что направление X_1 первоначально выбрано правильно. Поэтому в эквивалентной системе такое направление сохраняем (рис. 23, л).

8. Строим эпюры Q_y и M_z известными приемами отдельно для левого и правого пролетов (рис. 23, м, н) и сочленяем соответствующие эпюры обоих пролетов (рис. 23, п).

9. Пишем условие проектировочного расчета

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} < [\sigma]; [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$$

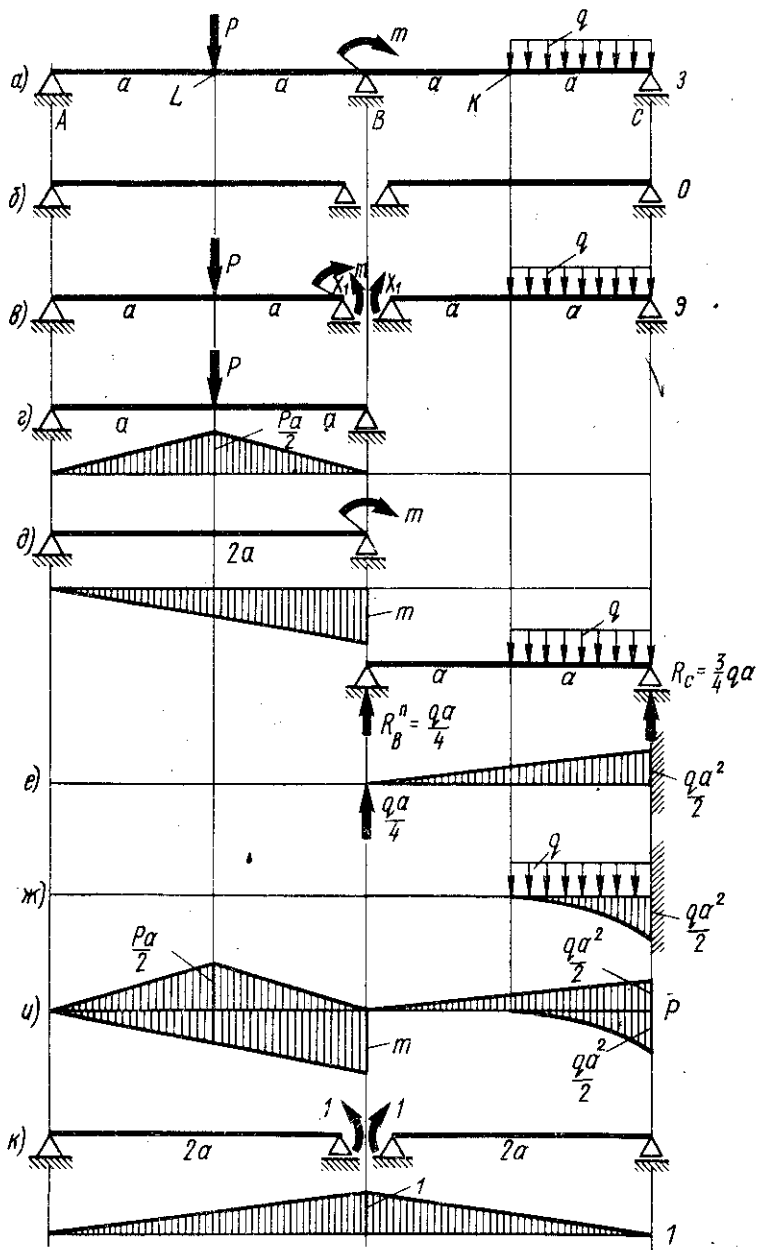
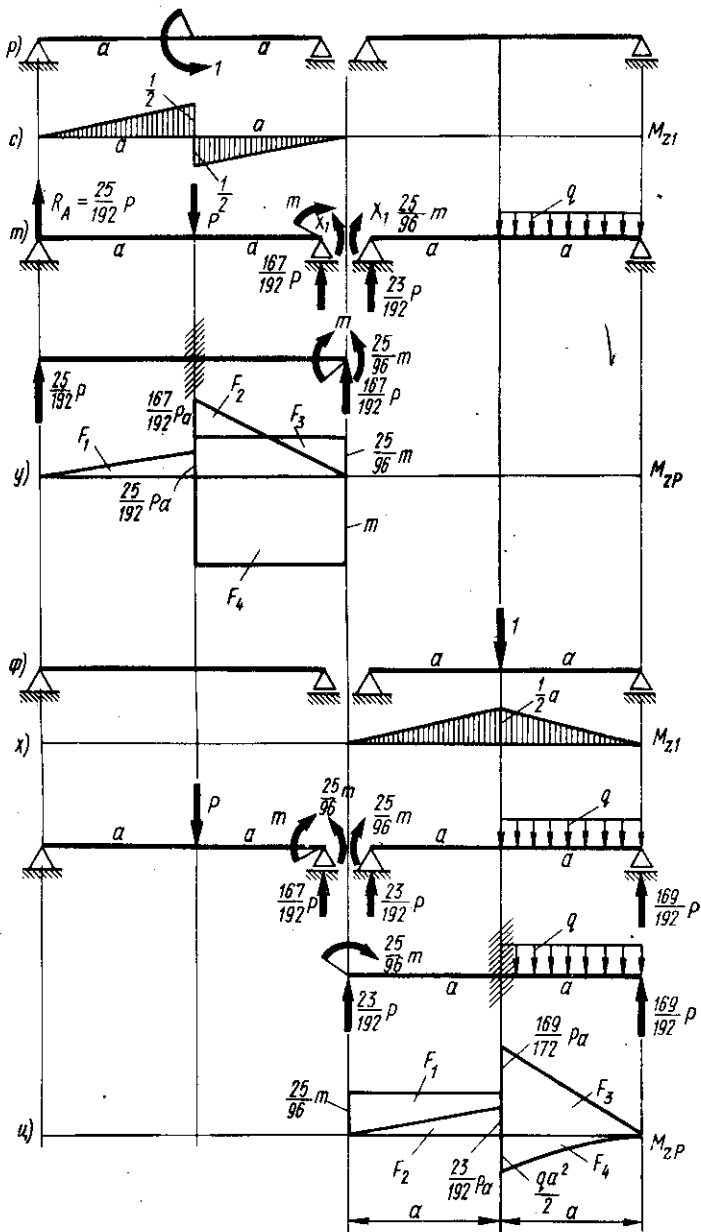


Рис. 23



Продолжение рис. 23 (II)

и находим момент сопротивления изгибу

$$W_z = \frac{M_z n}{\sigma_T} = \frac{284 q a^2 n}{384 \sigma_T} = \frac{284 \cdot 20 \cdot 160^2 \cdot 3 \cdot 10^5}{384 \cdot 480 \cdot 10^6} \approx 240 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем номер двутавра (№ 22). Для него $W'_z = 230 \text{ см}^3$, что меньше необходимого значения момента сопротивления.

Допускаемое значение перенапряжения K не должно превышать 5%:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W'_z} = \frac{284 \cdot 20 \cdot 160^2 \cdot 10^5}{384 \cdot 230 \cdot 10^6} \approx 165,2 \text{ МПа};$$

$$K = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\text{доп}}}{\sigma_{\text{доп}}} \cdot 100\% \approx 3\%.$$

Если $K > 5\%$, то выбирают по сортаменту следующий за предыдущим номер двутавра.

10. Определяем угол поворота сечения L . Для этого: а) приложим в основной системе единичный момент в сечении L (рис. 23, p) и построим эпюру изгибающего момента M_{z1} (рис. 23, c); б) покажем эквивалентную систему (рис. 23, m) и, поскольку эпюра M_{z1} имеется только на левом пролете балки, построим эпюру M_{zp} только для этой части балки (рис. 23, y), расславив ее относительно сечения, где приложен единичный момент.

Перемножая эпюры M_{zp} и M_{z1} (по правилу Верещагина), находим

$$\varphi_L = \frac{1}{EJ_z} [(F_1)h_1 + \dots + (F_4)h_4] = \frac{ma}{EJ_z} \left[\left(+ \frac{25}{192} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) - \left(- \frac{167}{192} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} - \left(- \frac{26}{96} \cdot 1 \cdot 1 \right) \frac{1}{4} + (1 \cdot 1) \frac{1}{4} \right] = \frac{-69 q a^3}{3 \cdot 384 \cdot EJ_z}.$$

Подставив в выражение φ_L значения $q, a, E, J_z = 2530 \text{ см}^4$, (для двутавра № 22), получим:

$$\varphi_L = \frac{-69 \cdot 20 \cdot 160^3 \cdot 10^5}{3 \cdot 384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2530} = -0,001 \text{ рад} = -0,057 \text{ град}.$$

11. Определяем прогиб сечения K балки. Для этого в основной системе в сечении K приложим единичную силу (рис. 23, ϕ) и построим эпюру M_{z1} (рис. 23, x). А далее, аналогично тому, как это делали при определении угла поворота сечения, строим для правого пролета балки эпюру M_{zp} (рис. 23, z). Перемножая эпюры M_{zp} и M_{z1} , определяем прогиб сечения K балки:

$$y_k = \frac{1}{EJ_z} [(F_1)h_1 + \dots + (F_4)h_4] = \frac{ma^2}{EJ_z} \left[\left(\frac{25}{96} \cdot 1 \right) \frac{1}{4} + \left(\frac{23}{192} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} + \left(- \frac{169}{192} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \frac{3}{8} \right] = \frac{211 q a^4}{3 \cdot 384 EJ_z}.$$

Подставив в выражение y_k необходимые значения, найдем:

$$y_k = \frac{211 \cdot 20 \cdot 160^4 \cdot 10^5}{3 \cdot 384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2530} \approx 0,47 \text{ см}.$$

Пример 7. Для плоской рамы (рис. 24, a) выполнить проектировочный расчет. Определить линейное перемещение δ_A по направлению $A - A$ и угловое перемещение φ_B - сечения B , если дано: $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 1,6 \text{ м}$, $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{с}} = 480 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, запас прочности $n = 3$.

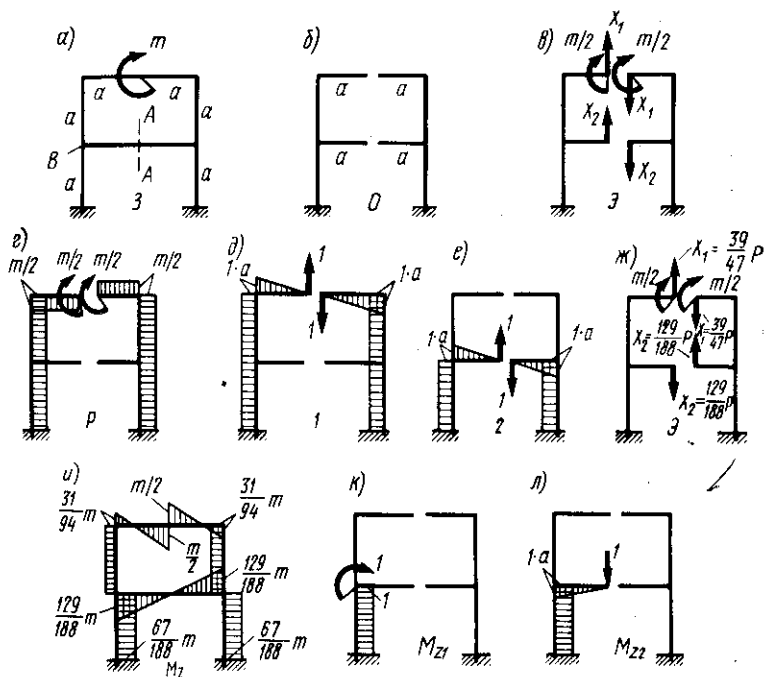


Рис. 24

Решение.* 1. Определим степень статической неопределимости. Система трижды внутренне (имеет замкнутый контур) и трижды внешне статически неопределима (всего статически неопределима 6 раз, так как имеет связей 9, а уравнений равновесия для плоской задачи лишь 3).

2. Образует основную O (рис. 23, б) и эквивалентную \mathcal{E} системы (рис. 23, в). Система является обратносимметричной, поэтому в плоскости геометрической симметрии симметричные внутренние силовые факторы равны нулю. В системе возникают только поперечные силы X_1 и X_2 . Таким образом, задача сводится к решению дважды статически неопределимой системы.

3. Напишем канонические уравнения метода сил; для дважды статически неопределимой системы имеем:

$$\delta_{1p} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0;$$

$$\delta_{2p} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

4. Определим свободные члены δ_{1p} и δ_{2p} и коэффициенты при неизвестных X_1, X_2 . Для этого:

а) построим в основной системе эпюру от заданных сил Pi (рис. 23, е) и эпюры от единичных сил по направлению усилий X_1 и X_2 по лишним связям 1 и 2 (рис. 23, д, е);

* Аналогично примеру 6, поэтому излагается кратко.

б) перемножим эпюры по правилу Верещагина, определим значения:

$$\delta_{1P} = -\frac{5ma^2}{2EJ_z}; \quad \delta_{2P} = \frac{ma^3}{EJ_z}; \quad \delta_{11} = \frac{14a^3}{3EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{8a^3}{3EJ_z}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2a^3}{EJ_z};$$

в) подставим результаты в систему канонических уравнений, учитывая, что $m = Pa$

$$-\frac{5}{2}P + \frac{14}{13}X_1 + 2X_2 = 0; \quad P + X_1 + \frac{3}{8}X_2 = 0.$$

$$\text{Откуда } X_1 = \frac{39}{47}P; \quad X_2 = \frac{-129}{4 \cdot 47}P.$$

Значения X_2 получены со знаком минус, что означает – направление X_2 выбрано неправильно. Изменим направление вектора X_2 на противоположное (рис. 24, ж);

г) построим эпюру M_Z (рис. 24, и) и определим сечение, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Подставляя его значения в условие проектировочного расчета, найдем диаметр сечения d :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_Z}{W_Z} \leq \frac{\sigma_T}{n};$$

$$W_Z = \frac{M_Z n}{\sigma_T} = \frac{mn}{2\sigma_T} = \frac{qa^2 n}{2\sigma_T} = \frac{20 \cdot 160^2 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 480 \cdot 10^6} = 160 \text{ см}^3;$$

$$W_Z = 0,1d^3 = 160; \quad d \cong 12 \text{ см}.$$

5. Определим угол поворота сечения B . В основной системе построим эпюру M_{Z1} от единичного момента (рис. 24, к), приложенного в сечении B . Перемножим по правилу Верещагина эпюры M_Z и M_{Z1} :

$$\varphi_B = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{167}{188} ma \cdot 1 \right] = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{167}{188} qa^3 \right] = \frac{167 \cdot 20 \cdot 160^3 \cdot 10^5}{188 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,05 \cdot 12^4} =$$

$$= 0,0035 \text{ рад} = 0,1995 \text{ град}.$$

6. Определим перемещение $A - A$: в основной системе построим эпюру M_{Z2} от единичной силы (рис. 24, л), приложенной по направлению $A - A$; перемножим эпюры M_Z и M_{Z2} (рис. 24, л):

$$\delta_A = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{67}{188} ma \cdot a + \frac{129}{188} ma \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} a \right] = \frac{110 qa^4}{188 EJ_z} =$$

$$= \frac{110 \cdot 20 \cdot 16^4 \cdot 10^4}{188 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,05 \cdot 12^4} = 3,69 \text{ см}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 5

РАСЧЕТЫ НА СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Задача 7

Стальной ломаный плоскопараллельный брус (рис. 25) нагружен внешними силами P_i . Требуется выполнить проектировочный расчет, если дано: длина участков бруса a_i ; $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 420 \text{ МПа}$; запас прочности $n = 3$. Отношение большей сто-

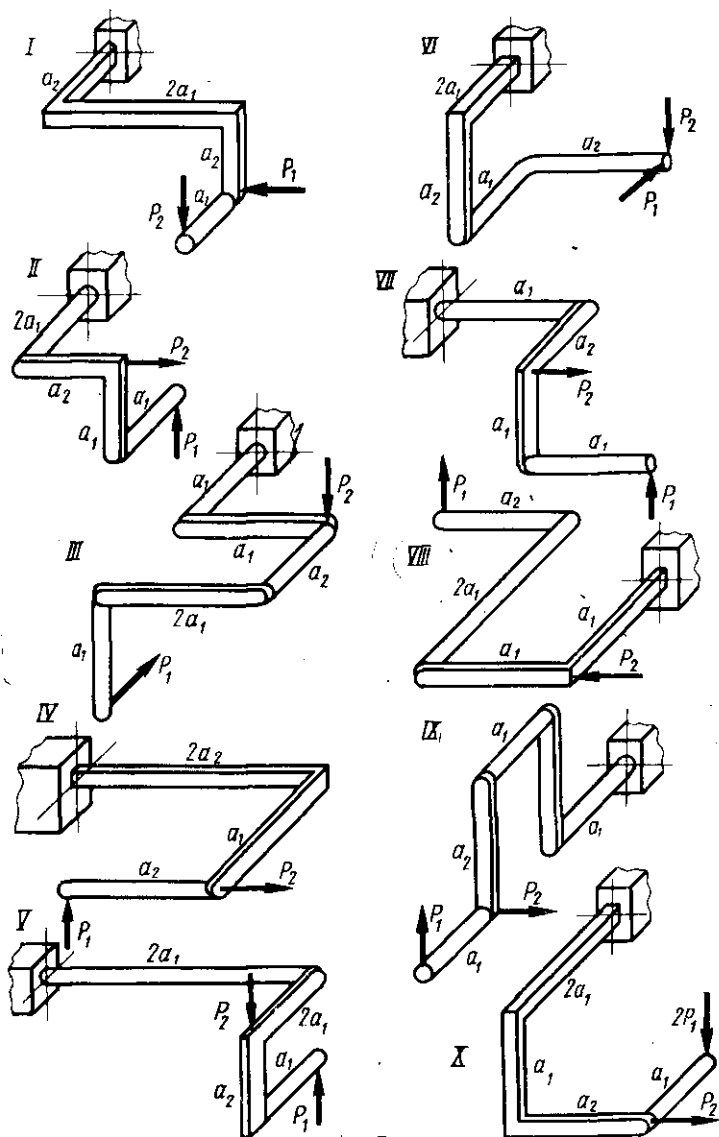


Рис. 25

роны h к меньшей b в поперечном прямоугольном сечении бруса равно h/b . (Диаметр круглого поперечного сечения бруса следует обозначать через d .) Остальные данные, необходимые для расчета, выбрать из табл. 8, а значения величин $a = f_1 \times (h/b)$ и $\gamma = f_2(h/b)$ — из табл. 5. Принять $P = 1000$ Н; $a = 1$ м; силовую линию считать совпадающей с осью наименьшей жесткости на участках бруса, имеющих прямоугольное поперечное сечение.

№ строки	Схема по рис. 24	P_i		a_i		Отношение h/b
		P_1	P_2	a_1	a_2	
1	I	$(2P)$	$2P$	a	a	2
2	II	$2P$	P	a	$2a$	3
3	III	$2P$	P	a	a	1,5
4	IV	$3P$	$2P$	a	a	2
5	V	$1,5P$	$2P$	a	a	2,5
6	VI	$2P$	P	a	$2a$	2
7	VII	P	$2P$	a	a	2
8	VIII	$1,5P$	P	a	$2a$	3
9	IX	P	$2P$	a	a	2
0	X	$2P$	P	a	a	1

а в г д е б

Порядок выполнения контрольного задания аналогичен примеру 8.

Пример 8. Произвести проектировочный расчет ломаного бруса (рис. 26, а), если дано: $P_1 = P_2 = P = 1$ кН; $a = 1,4$ м; $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 420$ МПа; запас прочности $n = 3$; форма поперечного сечения – по чертежу.

Решение 1. Построим эпюры изгибающих M_y и M_z и крутящего M_x моментов отдельно от силы P_1 (рис. 26, б) и силы P_2 (рис. 26, в). Затем дадим суммарную эпюру $P_1 + P_2$ при одновременном действии сил P_1 и P_2 (рис. 26, г); брус на участках I – IV имеет круглое сечение, а на участках V и VI – прямоугольное поперечное сечение. Техника построения эпюр на ломаном брус показана в контрольной работе 1.

2. Подберем размеры поперечного сечения бруса на участках I – IV (сечение круглое).

Определим опасный участок бруса и опасное сечение. Из рассмотрения суммарной эпюры (см. рис. 26, г) находим – опасным будет участок IV, опасным сечением – сечение I – I (см. рис. 26, а). Здесь $M_x = -m$; $M_y = 2m$; $M_z = 2m$.

Определим в опасном сечении рассматриваемого участка опасную точку (точки).

На основании метода сечений покажем часть бруса, величину и направления M_x , M_y , M_z (рис. 27, а). Напомним – крутящий момент против часовой стрелки считается положительным, по часовой – отрицательным; эпюры изгибающих моментов строятся на сжатом волокне.

С учетом M_y и M_z строим эпюры нормальных напряжений соответственно σ_{M_y} , σ_{M_z} в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рис. 27, б): знак плюс указывает, что напряжение растягивающее, а знак минус – сжимающее. Эпюра касательных напряжений, например, в вертикальном направлении, от M_x , представлена на рис. 27, в. Определим в опасном сечении возможные опасные точки. Для этого напомним, что пару сил можно изобразить вектором, направленным перпендикулярно плоскости действия момента так, чтобы можно было видеть

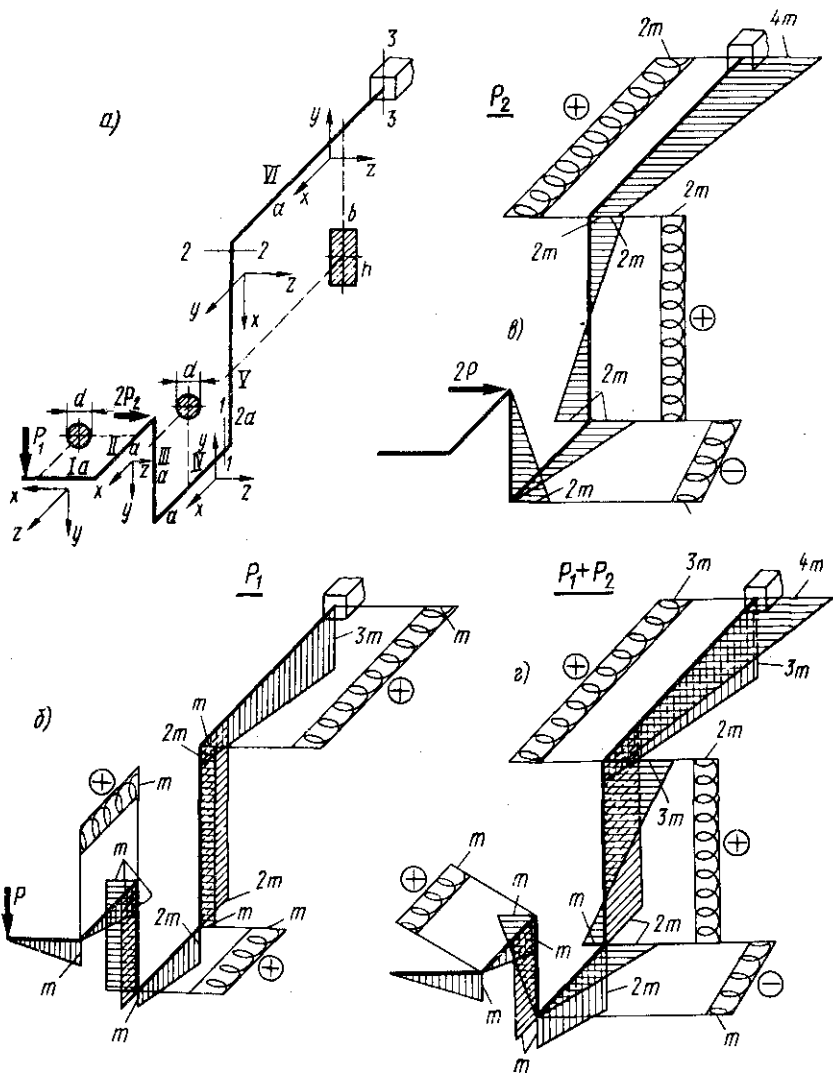


Рис. 26

эту пару, если смотреть со стороны этого вектора, вращающейся против часовой стрелки. Моменты M_y и M_z изображены векторами \vec{M}_y и \vec{M}_z (рис. 27, в). Складывая их геометрически, находим результирующий изгибающий момент $\vec{M}_{рез}$. Пойдем затем в обратном направлении, посмотрим со стороны вектора $\vec{M}_{рез}$ и видим пару сил в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{M}_{рез}$. Это будет силовая плоскость, которая даст след $A - A$. На пересечении $A - A$ с поперечным сечением в точке 1 возникнет наибольшее растягивающее, а в точке 2 наибольшее (по абсолютной величине) сжимающее нормальное напряжение. Обозначим его $\sigma_{рез}$.

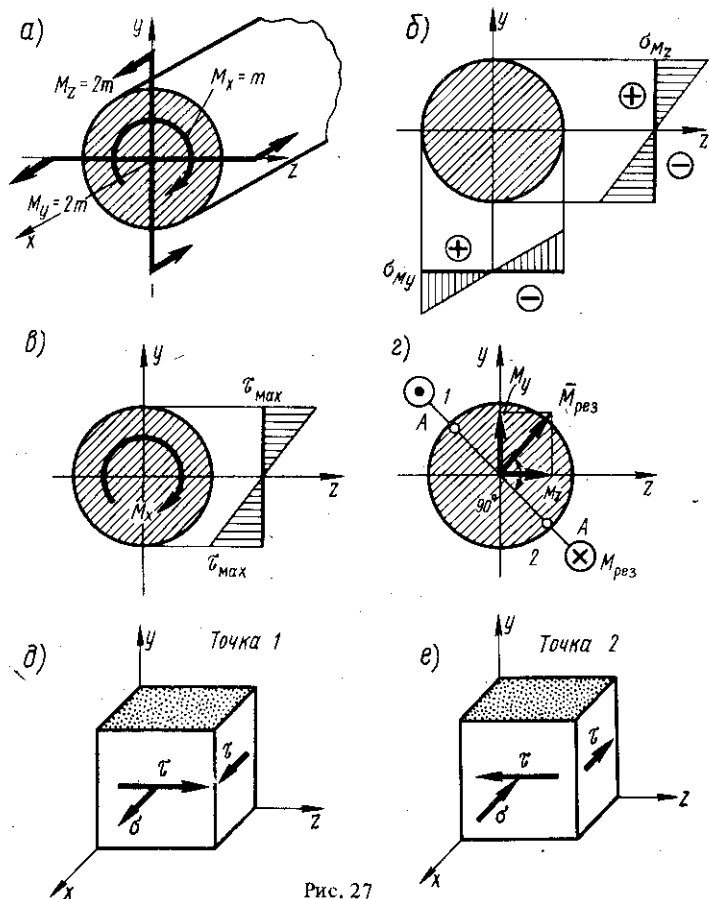


Рис. 27

Так как τ_{\max} равны во всех точках контура сечения, включая точки 1 и 2, то эти точки и будут возможными опасными.

В нашем случае пределы текучести материала при растяжении и сжатии по абсолютной величине равны, поэтому на основании теорий прочности напряженные состояния в точке 1 (рис. 27, д) и точке 2 (рис. 27, е) равноопасны. Можно выполнить прочностной расчет по любой из этих точек. Остановимся на точке 1. Здесь $\sigma_{\text{рез}}$ является растягивающим напряжением. С учетом точечной симметрии круглого сечения силовую линию 1 – 2 (см. рис. 27, г) повернем по часовой стрелке до совмещения с осью y . Напряженные состояния в точках 1 и 2 (см. рис. 27, д, е) и положение элементов вокруг точек соответствуют такому повороту.

Определим значения $\sigma_{\text{рез}}$ и τ_{\max} :

$$\sigma = \sigma_{\text{рез}} = \frac{M_{\text{рез}}}{W_z} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{(2m)^2 + (2m)^2}}{0,1 d^3} = \frac{2,82 m}{0,1 d^3};$$

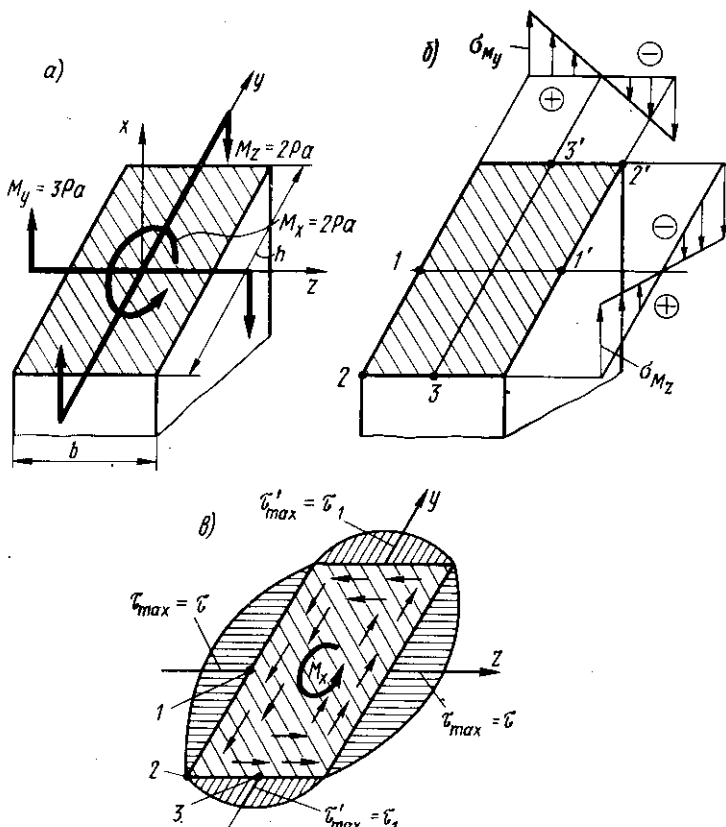


Рис. 28

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{m}{0,2 d^3}$$

Так как $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{с}}$, то d определим по теории наибольших касательных напряжений. Условием проектировочного расчета для случая плоского напряженного состояния будет выражение:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{m}{0,1 d^3} \sqrt{2,82^2 + 4 \cdot \frac{1}{2^2}} \cong \frac{3m}{0,1 d^3} \leq \frac{\sigma_T}{n}$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{3mn}{0,1 \sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{3Pan}{0,1 \sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^2 \cdot 10^4 \cdot 3}{0,1 \cdot 420 \cdot 10^6}} \cong 6,7 \text{ см.}$$

3. Подберем теперь размеры прямоугольного поперечного сечения ломаного бруса на участках V и VI. Определим возможные опасные сечения. Ими (см. рис.

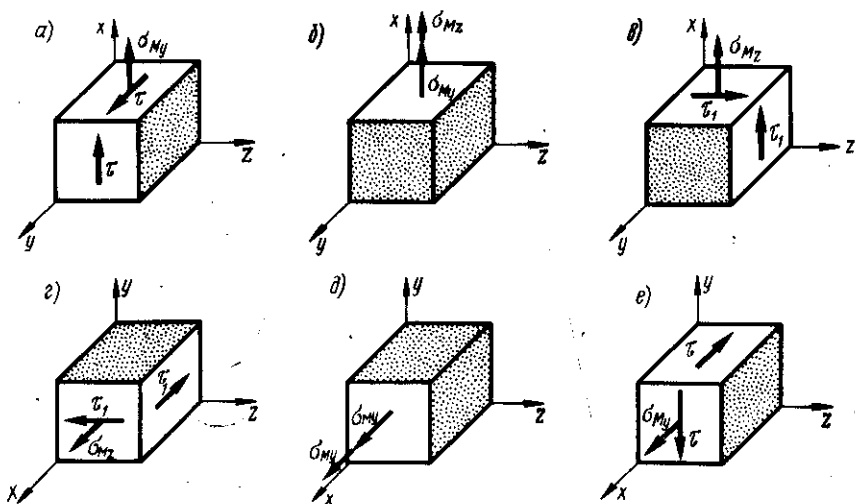


Рис. 29

26, а, з) будут – на участке V сечение 2 – 2 ($M_x = 2m$; $M_y = 3m$; $M_z = 2m$), на участке VI – сечение 3 – 3 ($M_x = 3m$; $M_y = 4m$; $M_z = 3m$).^{*} Для определения в указанных сечениях опасных точек изучим напряженные состояния в возможных опасных точках сечений 2 – 2 и 3 – 3. Используя метод сечений, покажем часть бруса на участке V в сечении 2 – 2, величину и направление M_x , M_y и M_z (рис. 28, а).

Учитывая направления изгибающих моментов M_y и M_z , построим эпюры σ_{M_y} и σ_{M_z} (рис. 28, б), а также эпюру касательного напряжения τ по контуру прямоугольного сечения от крутящего момента M_x (рис. 28, в). Изучая закономерности изменения напряжений, находим, что возможными опасными точками сечения будут точки 1, 2, 3, 1', 2' и 3' (см. рис. 28, б). Так как $\sigma_{\text{тр}} = |\sigma_{\text{т}}|$, τ_{max} в точках 1 и 1' а τ'_{max} в точках 3 и 3' по абсолютной величине равны, то можно изучить напряженные состояния лишь в точках 1, 2 и 3.

Найдем значения σ_{M_y} , σ_{M_z} , τ_{max} , τ'_{max} :

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{3Pa}{hb^2/6} = \frac{18Pa}{2b \cdot b^2} = \frac{9Pa}{b^3};$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{2Pa}{bh^2/6} = \frac{3Pa}{b^3};$$

$$\tau = \tau_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_k} = \frac{2Pa}{ab^2h} = \frac{2Pa}{0,246 \cdot b^2 \cdot 2b} \approx \frac{4Pa}{b^3};$$

$$\tau_1 = \tau'_{\text{max}} = \tau_{\text{max}} \gamma = \frac{4Pa}{b^3} \cdot 0,795 \approx \frac{3,2Pa}{b^3}.$$

Вырежем элементы с бесконечно малыми гранями вокруг точек 1, 2 и 3 (рис. 29), покажем компоненты напряженного состояния и определим $\sigma_{\text{экр}}$, ис-

^{*} Из двух возможных опасных сечений опасным будет сечение 3 – 3, что видно с учетом значений моментов. Однако рассмотрим напряженные состояния в обоих сечениях.

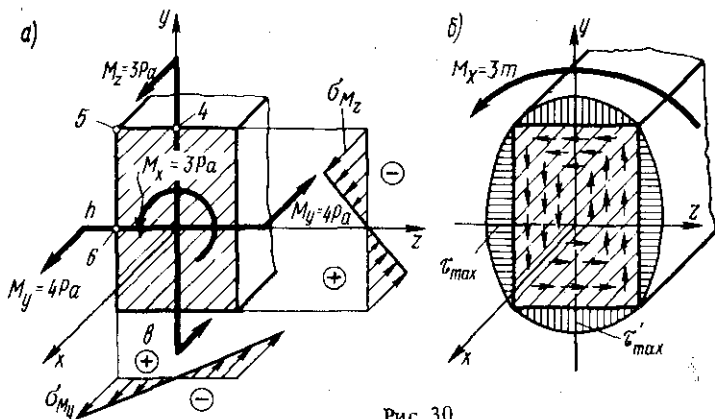


Рис. 30

пользуя теорию наибольших касательных напряжений. Для точки 1 (рис. 29, а) получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{M_y}^2 + 4\tau^2} = \frac{Pa}{b^3} \sqrt{9^2 + 4 \cdot 4^2} \approx \frac{12,1 Pa}{b^3};$$

для точки 2 (рис. 29, б):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = \frac{9Pa}{b^3} + \frac{3Pa}{b^3} = \frac{12Pa}{b^3};$$

и для точки 3 (рис. 29, в):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{M_z}^2 + 4\tau_1^2} = \frac{Pa}{b^3} \sqrt{3^2 + 4 \cdot 3,2^2} \approx \frac{7Pa}{b^3}.$$

Изучим напряженные состояния в возможных опасных точках сечения 3 – 3 участка VI ломаного бруса. Покажем сечение, внутренние силовые факторы, возможные опасные точки 4, 5 и 6 и закономерности изменения нормальных σ_{M_y} , σ_{M_z} и касательных τ_{max} , τ'_1 напряжений (рис. 30, а, б). Так как наибольшие напряжения σ_{M_z} и τ'_1 возникают в точке 4; σ_{M_z} и σ_{M_y} – в точке 5 и σ_{M_y} и τ_{max} в точке 6, то указанные точки следует считать возможно опасными. Исследуем напряженное состояние в точках, определив предварительно значения компонентов напряженного состояния:

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{4Pa}{hb^2/6} = \frac{12Pa}{b^3}; \quad \sigma_{M_z} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{3Pa}{bh^2/6} = \frac{4,5Pa}{b^3};$$

$$\tau = \tau_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_k} = \frac{3Pa}{ab^2h} = \frac{3Pa}{0,246 \cdot 2b^3} \approx \frac{6Pa}{b^3};$$

$$\tau_1 = \tau'_1 = \tau_{\text{max}} \gamma = \frac{6Pa}{b^3} \cdot 0,795 \approx \frac{4,8Pa}{b^3}.$$

В точке 4 (см. рис. 29, з):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{M_z}^2 + 4\tau_1^2} = \frac{Pa}{b^3} \sqrt{4,5^2 + 4 \cdot 4,8^2} = \frac{10,5Pa}{b^3}.$$

В точке 5 (см. рис. 29, д):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{12Pa}{b^3} + \frac{9Pa}{2b^3} = \frac{16,5Pa}{b^3}.$$

В точке *b* (см. рис. 29, *e*)

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{M_y}^2 + 4\tau^2} = \frac{Pa}{b^3} \sqrt{12^2 + 4 \cdot 6^2} = \frac{16,7Pa}{b^3}.$$

Сравнивая значения $\sigma_{\text{экв}}$ для шести точек, находим – опасной является точка *b*.

Выполним проектировочный расчет и определим размеры поперечного сечения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{16,7Pa}{b^3} \leq [\sigma]; \quad b = \sqrt[3]{\frac{16,7Pan}{\sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{16,7 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^2 \cdot 10^4 \cdot 3}{420 \cdot 10^6}} \approx$$

$$\approx 5,5 \text{ см};$$

$$h = 2b \approx 11 \text{ см}.$$

Задача 8

Для детали, схематически изображенной на рис. 31 (применительно к своему варианту условия задачи), требуется:

- 1) исследовать напряженное состояние детали в отдельных наиболее напряженных точках и определить значения компонентов напряженного состояния;
- 2) провести анализ напряженного состояния в намеченных точках и определить главные нормальные напряжения;
- 3) найти значение эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ в опасной точке, вычислить запас прочности детали *n*.

Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из табл. 9. Контрольную задачу решать аналогично примеру 9.

Варианты условий задачи 8

1. Тонкостенная замкнутая трубка подвергается действию внутреннего давления p_1 и моментов *m*. Материал трубки – сталь; предел текучести при сжатии $\sigma_{\text{ТС}} = 400$ МПа, растяжении $\sigma_{\text{ТР}} = 300$ МПа.

2. Тонкостенная замкнутая трубка подвергается действию внутреннего давления p_1 и сил *P*, представленных на схеме. Материал трубки – сталь; $\sigma_{\text{ТР}} = 280$ МПа, $\sigma_{\text{ТС}} = 320$ МПа.

3. Плунжер *AB* проходит через камеру, в которой поддерживается давление p_2 , и подвергается действию силы *P*. Исследовать напряженное состояние плунжера в местах, удаленных от сальников. Материал плунжера – ковкий чугун; предел прочности при растяжении $\sigma_{\text{ВР}} = 250$ МПа, предел прочности при сжатии $\sigma_{\text{ВС}} = 600$ МПа.

4. Валик *AB* пропущен через камеру, в которой поддерживается давление p_2 . Изучить напряженное состояние валика в местах, удаленных от сальников. Валик скручивается моментами *m*. Местные напряжения в переходах от диаметра d_2 к диаметру d_1 не учитывают. Материал валика – сталь 50; $\sigma_{\text{ТР}} = 250$ МПа; $\sigma_{\text{ТС}} = 300$ МПа.

5. Тонкостенная замкнутая трубка подвержена действию внутреннего давления p_1 и внешних моментов *m*. Материал трубки – сталь; $\sigma_{\text{ТР}} = 120$ МПа; $\sigma_{\text{ТС}} = 180$ МПа.

Таблица 9

№ строки	Схема по рис. 30	Вариант условия задачи 8	Давление, МПа			Момент m , Н·м	P , кН	P_1 , кН	Диаметр по средней линии $D_{ср}$, мм	Толщина δ , мм	Диаметр, мм	
			p_1	p_2	p_3						d_1	d_2
1	I	1	0,8	20	3	10^4	15	10	200	1	50	60
2	II	2	1,0	30	4	$7,5 \cdot 10^3$	20	15	250	2	60	80
3	III	3	0,9	40	3	$8 \cdot 10^3$	18	20	300	1	70	90
4	IV	4	0,7	37	2	$9 \cdot 10^3$	10	15	150	1,5	55	75
5	V	5	0,7	25	2	$11 \cdot 10^3$	14	20	180	1	65	85
6	VI	6	0,6	42	10	$12 \cdot 10^3$	15	15	160	1,6	50	70
7	VII	7	0,5	41	12	$8 \cdot 10^3$	16	10	200	1,6	60	80
8	VIII	8	1,2	50	5	$7,8 \cdot 10^3$	10	20	250	1,7	70	90
9	IX	9	1	36	3	$9 \cdot 10^3$	12	15	280	1,8	80	95
0	X	10	0,8	45	2	10^4	10	20	250	1,5	50	70
		а	б	г		е			д		в	

Примечание. Из таблицы выбирают только данные, которые необходимы.

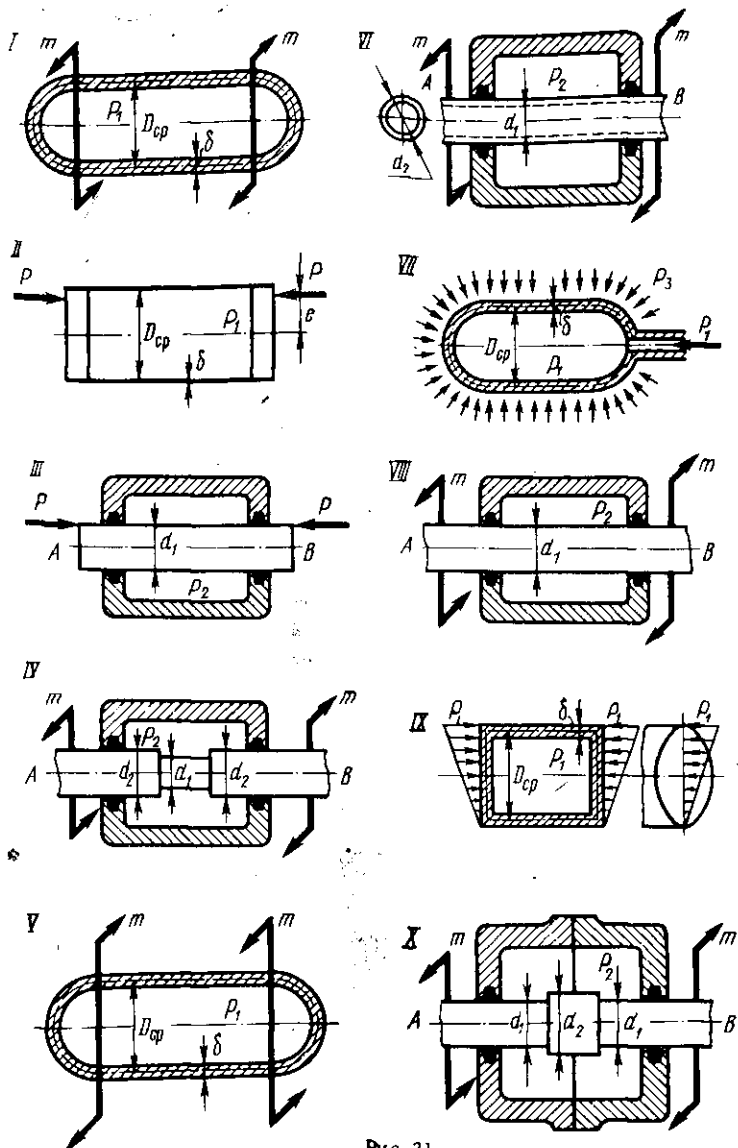


Рис. 31

6. Тонкостенная трубка AB проходит через камеру, в которой поддерживается давление p_1 , и скручивается моментами m . Изучить напряженное состояние трубки в местах, удаленных от сальников. Материал трубки – бронза; $\sigma_{\text{Тр}} = 100$ МПа; $\sigma_{\text{Тс}} = 200$ МПа.

7. Длинная трубка с тонкими стенками подвержена действию внешнего давления p_3 и внутреннего p_1 . Материал трубки – дюраль; $\sigma_{\text{Тр}} = 90$ МПа; $\sigma_{\text{Тс}} = 120$ МПа.

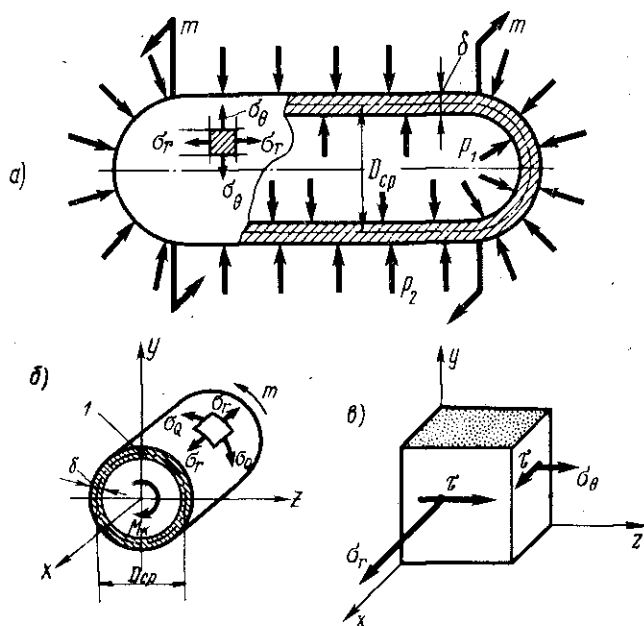


Рис. 32

8. Круглый валик AB проходит через камеру, в которой поддерживается давление p_3 , и одновременно скручивается моментами m . Изучить напряженное состояние валика в местах, удаленных от сальников. Материал валика – каленая сталь У8А; $\sigma_{вр} = 1700$ МПа, $\sigma_{вс} = 2400$ МПа.

9. Тонкостенная замкнутая трубка подвергается действию внутреннего давления p_1 и сил P_1 , распределенных по торцовым сечениям по закону, указанному на рисунке. Материал трубки – дюраль; $\sigma_{тр} = 120$ МПа; $\sigma_{тс} = 200$ МПа.

10. Валик AB проходит через камеру, в которой поддерживается давление p_2 и скручивается моментами m . Изучить напряженное состояние валика в местах, удаленных от сальников. Местные напряжения в местах перехода от диаметра d_1 к диаметру d_2 не учитывать. Материал валика – ковкий чугун; $\sigma_{вр} = 250$ МПа, $\sigma_{вс} = 600$ МПа.

Пример 9. Определить запас прочности тонкостенного осесимметричного сосуда (рис. 32, а), если давление внутри сосуда $p_1 = 1$ МПа, давление снаружи сосуда $p_2 = 0,4$ МПа, скручивающая пара сил, момент которой $m = 5 \cdot 10^3$ Н · м. Материал сосуда – малоуглеродистая сталь; $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 280$ МПа; диаметр сосуда по средней линии $D_{ср} = 150$ мм; толщина стенок сосуда $\delta = D_{ср}/100$.

Решение. 1. Определим величину и знак меридионального напряжения σ_r в оболочке сосуда от давления $p = p_1 - p_2$. Напряжение σ_r найдем по формуле

$$\sigma_r = \frac{pD_{ср}}{4\delta} = \frac{pD_{ср}}{4D_{ср}/100} = \frac{0,6 \cdot 100}{4} = 15 \text{ МПа.} \quad (3)$$

Напряжение σ_r – растягивающее, так как $p_1 > p_2$.

2. Определим значение и знак окружного напряжения σ_θ из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_r}{\rho_r} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{p}{\delta}$$

Так как $\rho_r = \infty$, $\rho_\theta = \frac{D_{\text{ср}}}{2}$, то

$$\sigma_r = \frac{p D_{\text{ср}}}{2\delta} = \frac{0,6 \cdot 100}{2} = 30 \text{ МПа}$$

Полученное напряжение σ_θ является также растягивающим ($p_1 > p_2$).

3. Найдем касательное напряжение в поперечном сечении оболочки сосуда от скручивающей пары сил. Воспользуемся методом сечений и определим значение крутящего момента (рис. 32, б):

$$M_K = m; \tau = \frac{M_K}{W_p} = \frac{m}{\pi D_{\text{ср}}^2 \delta \frac{1}{2}} = \frac{2m}{\pi D_{\text{ср}}^2 D_{\text{ср}}/100} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{3,14 \cdot 0,15^3 \cdot 10^6} = 94,3 \text{ МПа}$$

4. Определим опасное сечение и в этом сечении опасную точку. Так как внешние нагрузки действуют по всей длине сосуда, поэтому все поперечные сечения и все точки по контуру каждого сечения будут равноопасными.

5. Исследуем напряженное состояние в какой-нибудь точке сечения сосуда, например в точке 1. Для этого вырежем элемент с бесконечно малыми гранями вокруг точки и покажем компоненты напряженного состояния (рис. 32, в). Как видим, элемент находится в плоском напряженном состоянии.

Воспользуемся известными формулами и определим величину главных нормальных напряжений:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} = \frac{15 + 30}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{15^2 + 4 \cdot 94,3^2} = 22,5 \pm 94,5 \text{ МПа}$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то в нашем случае $\sigma_1 = 117 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -72 \text{ МПа}$.

6. Воспользуемся теорией наибольших касательных напряжений и найдем эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 = +117 + 72 = 189 \text{ МПа}$.

7. Запас прочности сосуда

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{экр}}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{экр}}} = \frac{280}{189} = 1,48$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 6

РАСЧЕТЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Задача 9

(ударная нагрузка)

На упругую систему (рис. 33) с высоты h падает груз Q . Подобрать размеры круглого поперечного сечения из малоуглеродистой стали, если $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 320 \text{ МПа}$ и запас прочности стержней рамы $n = 2$. Массу упругой системы не учитывать. Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из табл. 10.

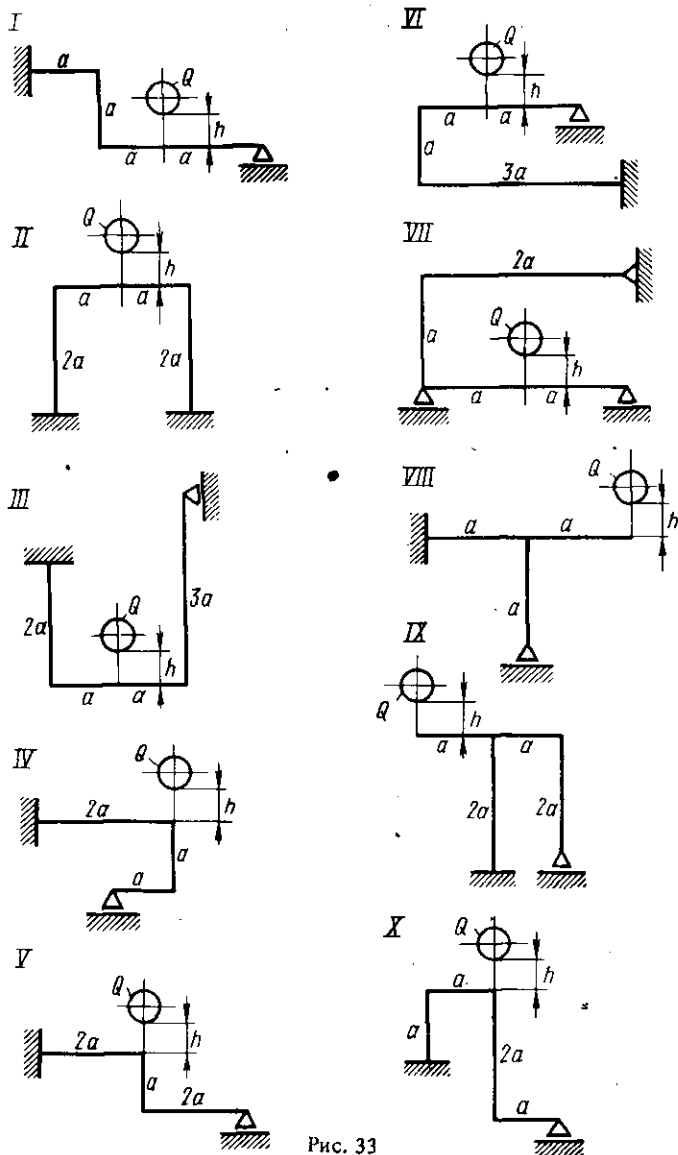


Рис. 33

Указания по выполнению задачи 9.

1. К упругой системе прикладывается статическая сила, равная весу падающего груза Q .

2. Определяем линейное перемещение сечения упругой системы от силы Q . Для этого раскрываем статическую неопределенность системы (аналогично приме-

№ строки	Схема по рис. 32	Q_i , Н	h_i , м	a_i , м
1	I	200	0,6	1
2	II	400	0,5	1
3	III	600	0,3	1,5
4	IV	800	0,4	1
5	V	1000	0,3	2
6	VI	500	0,8	1
7	VII	750	0,3	1,2
8	VIII	800	0,2	1,5
9	IX	900	0,2	1,4
0	X	100	0,5	1

г

в

б

д

рам 6, 7); строим эпюру изгибающего момента M_Z от статически приложенной силы Q ; по направлению движения падающего груза в основной системе прикладываем статически единичную силу; строим эпюру M_{Z1} ; эпюры M_Z и M_{Z1} перемножаем по правилу Верещагина; вычисляем перемещение $\delta_{ст}$ по направлению движения падающего груза при его статическом приложении. Подставляя $\delta_{ст}$ в приближенное выражение коэффициента динамичности, определяем его:

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \approx \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}$$

3. Обращаясь к эпюре M_Z , находим сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения, и определяем величину $\delta_{ст}$, выраженную через значение наибольшего изгибающего момента, и диаметр круглого поперечного сечения стержня рамы:

$$\sigma_{ст} = \max M_Z / W_Z \approx \max M_Z / 0,1d^3$$

4. Подставляя значения $\sigma_{ст}$ и λ в условие проекторочного расчета, получим

$$\sigma_{дин} = \lambda \sigma_{ст} \leq [\sigma], \text{ где } [\sigma] = \frac{\sigma_{гр}}{n}$$

5. После этого можно определить величину d поперечного сечения стержня.

Задача 10

(расчеты на выносливость)

Для передачи мощности N служит зубчатый двухступенчатый цилиндрический редуктор, схема которого изображена на рис. 34. Число оборотов входного вала редуктора n ; передаточное число $i = i_1 i_2$, где i_1 — передаточное число верхней, а i_2 — нижней пары шестерен. Требуется выполнить проверочный расчет на прочность по выносливости для одного из валов редуктора, если принять:

- 1) в выходных концах валов возникают только крутящие моменты;
- 2) по площадкам зацепления шестерен возникает усилие, которое можно разложить на окружную P и радиальную R составляющие, причем $R \approx 0,4P$;
- 3) потерей мощности на трение в подшипниках и в зацеплении — пренебречь;

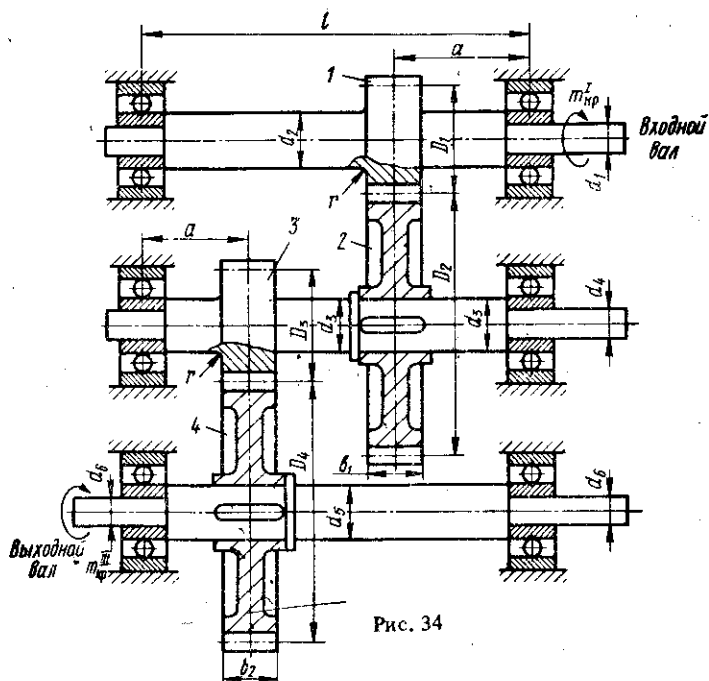


Рис. 34

4) шестерни 1 и 3 выполнены заодно с валом; r – радиусы галтелей.

Данные, необходимые для решения контрольной задачи, в том числе механические характеристики углеродистых конструкционных сталей, выбрать из табл. 11 (а, б).

Таблица 11 а

№ строки	Вариант задачи	Вал редуктора	i_1	i_2	D_1	D_3	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	r
1	I	Входной	2	4	60	80	30	40	40	30	50	40	2
2	II	Средний	3	4	60	80	30	40	40	30	50	40	2
3	III	Выходной	4	3	60	80	30	40	42	28	60	50	2
4	IV	Входной	4	2	80	60	30	40	42	30	60	50	2
5	V	Средний	3	4	80	60	30	40	44	30	52	46	2
6	VI	Выходной	3	3	80	60	30	40	44	30	50	42	3
7	VII	Средний	3	2	70	80	25	35	48	32	50	40	2
8	VIII	Выходной	2	3	70	80	25	35	50	40	60	50	2
9	IX	Входной	4	4	60	70	30	40	50	38	60	50	3
0	X	Средний	4	4	60	70	30	40	42	36	60	50	2

а

б

д

е

№ строки	Вариант задачи	мм				l	N , кВт	n , об/мин	Материал вала (марка)	Предел прочности σ_B	Предел текучести σ_T	Предел выносливости σ_{-1}
		a	b_1	b_2								
МПа												
1	I	60	30	40	250	15	1500	сталь 30	$5 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	(20-27)10	
2	II	60	32	40	300	16	1400	сталь 40	$5,8 \cdot 10^2$	$3,4 \cdot 10^2$	(23-32)10	
3	III	70	30	42	300	15	1400	сталь 45	$6,1 \cdot 10^2$	$3,6 \cdot 10^2$	(25-34)10	
4	IV	70	32	44	280	14	1300	сталь 50	$6,4 \cdot 10^2$	$3,8 \cdot 10^2$	(27-35)10	
5	V	60	30	42	250	16	1200	сталь 55	$6,6 \cdot 10^2$	$3,9 \cdot 10^2$	(28-36)10	
6	VI	50	30	44	200	17	1500	сталь 60	$6,9 \cdot 10^2$	$4,1 \cdot 10^2$	(31-38)10	
7	VII	60	34	42	280	19	1400	сталь 30ХМ	$9,5 \cdot 10^2$	$7,5 \cdot 10^2$	(31-41)10	
8	VIII	70	32	40	280	20	1300	сталь 40ХН	$10 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^2$	40 · 10	
9	IX	80	30	40	300	18	1400	сталь 12ХН3А	$9,5 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^2$	(39-47)10	
0	X	84	36	42	300	19	1500	сталь 20ХН3А	$9,5 \cdot 10^2$	$7,5 \cdot 10^2$	(43-45)10	

е

г

в

Оглавление

Введение	3
Общие методические указания	3
Список литературы	4
Методические указания к темам курса	4
Тема 1. Основные понятия	4
Тема 2. Растяжение, сжатие	5
Тема 3. Кручение	6
Тема 4. Геометрические характеристики плоских сечений	7
Тема 5. Изгиб	9
Тема 6. Общие методы определения перемещений в произвольных произвольно нагруженных системах. Статически неопределимые системы	11
Тема 7. Основы теории напряженного и деформированного состояния. Гипотезы возникновения пластических деформаций и разрушений	13
Тема 8. Расчет тонкостенных оболочек и толстостенных цилиндрических труб	16
Тема 9. Устойчивость равновесия деформированных систем	18
Тема 10. Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени	19
Тема 11. Динамическая нагрузка	20
Тема 12. Упругие колебания	20
Порядок выполнения контрольных работ	21
Контрольная работа 1	22
Контрольная работа 2	46
Контрольная работа 3	52
Контрольная работа 4	55
Контрольная работа 5	63
Контрольная работа 6	75

Учебное издание

Долинский Федор Васильевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Зав. редакцией А.В. Дубровский. Редактор О.Г. Подобедова. Мл. редакторы: Т.Ф. Артюхина, Н.М. Иванова. Художественный редактор М.Г. Мицкевич. Технический редактор Л.А. Овчинникова. Корректор В.В. Кожуткина. Оператор Н.В. Хазраткулова.

Н/К

Изд. № ОТ-748. Сдано в набор 12.04.90. Подп. в печать 27.07.90. Формат 60x90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Объем 5,0 усл. печ. л. 5,13 усл. кр.-отт. 5,05 уч. изд. л. Тираж 90 000 экз. Зак. № 202 Цена 15 коп.

Издательство "Высшая школа", 101430, Москва, ГСП-4. Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано на наборно-пишущей технике издательства.

Отпечатано в типографии "Московская правда" 123825, ГСП, Москва, Д-22 ул. 1905 года, д. 7.