Для нахождения собственных векторов нужно при каждом λ решить систему

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или в матричной записи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

1) $\lambda = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Здесь все уравнения пропорциональны и сводятся к одному $x_1 - x_2 = 0$. Переменные x_2 и x_3 можно задавать произвольно, по ним из уравнения находим x_1. Придавая значения $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$ ($x_1 = 1$), а затем $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ ($x_1 = 0$), получаем базис собственного подпространства

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы, отвечающие $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

где C_1 и C_2 одновременно не равны нулю.

2) $\lambda = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Здесь можно выбросить первое уравнение так как оно совпадает со вторым. Остаются второе и третье

$$\begin{gathered} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{gathered}$$

Задавая $x_2 = 1$, из первого уравнения находим находим $x_1 = -1$, а затем из второго $x_3 = -1$. Все собственные векторы пропорциональны вектору

$$e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы, отвечающие $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

где C не равно нулю.