Если
$$N = pp^2p^3 \cdots p^9 = p^{45},$$
то число N имет 46 делителей (1, p, p^2, ... p^{45}). Покажем, что меньше делителей быть не может. Для этого будем рассматривать только те числа, у который число делителей меньше 46.

Рассмотрим разложение нашего числа на простые множители
$$N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$
где все $k_i \geqslant 1$ и все простые множители p_i различны. Число делителей числа N равно
$$m = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1)$$
Так как все $k_i \geqslant 1$, то $m \geqslant 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$. Отсюда следует, что $2^n < 46$ и поэтому $n \leqslant 5$. Рассмотрим случаи с разным числом множителей по отдельности.

1) Случай $m = 5$. Здесь также нужно составить 9 множителей из степеней 5 простых чисел. Если создавать 4 оставшихся разных множителя из степеней одного простого числа, то получим 5 множителей с одним основанием и суммой их степеней не меньше, чем 1+2+3+4+5=15. Поэтому число делителей N не меньше, чем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16 = 256 > 46$. Отсюда следует, что по крайней мере два значения из k_i должны быть не меньше 2. В этом случае число делителей N не меньше $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 72 > 46$. Этот случай нам не подходит.

2) Случай $m = 4$. Здесь также нужно составить 9 множителей из степеней 4 простых чисел. Если создавать 5 оставшихся разных множителей из степеней одного простого числа, то получим 6 множителей с одним основанием и суммой их степеней не меньше, чем 1+2+3+4+5+6=21. Поэтому число делителей N не меньше, чем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 22 = 176 > 46$. Отсюда следует, что по крайней мере два значения из k_i должны быть не меньше 2. Если одно из них равно 2, то оно может отдать свой сомножитель не более, чем одному из 5 оставшихся множителей N. Поэтому остальные

4 нужно сформировать из другого простого числа и сумма их степеней (вместе с тем, из которого множители формируются) не менее, чем 1+2+3+4+5=15. В этой ситуации число делителей N не меньше $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16 = 192 > 46$. Остается вариант когда первое не меньше 3, а второе не меньше 2. Число делителей N не меньше $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48 > 46$. Поэтому случай $m = 4$ отпадает.

3) Случай $m = 3$. Здесь также нужно составить 9 множителей из степеней 3 простых чисел. Если создаем оставшиеся 6 множителей только из одного простого числа, то получаем 7 множителей с суммой степеней, не меньшей, чем 1+2+3+4+5+6+7=28. Число делителей N не меньше $2 \cdot 2 \cdot 29 = 116 > 46$. Таким образом, по крайней мере два значения из k_i должны быть не меньше 2.

Пусть 9 множителей N создаются из степеней двух простых чисел. Если степень одного из них равно 2, то ему отвечает не более двух из 9 множителей N. Оставшиеся 5 множителей вместе с тем, из которого они создаются, дают степень простого числа не меньшую, чем 1+2+3+4+5+6=21. Число множителей N не меньше $2 \cdot 3 \cdot 22 = 132 > 46$. Таким образом, степени обеих этих числа не могут быть меньше 3. Если степень одного из них равна 3, то ему отвечает не более трех из 9 множителей N (p и p^2). Оставшиеся 4 множителя вместе с тем, из которого они создаются, дают степень простого числа не меньшую, чем 1+2+3+4+5=15. Число множителей N не меньше $2 \cdot 4 \cdot 16 = 128 > 46$. Таким образом, степени обеих этих числа не могут быть меньше 4. Число делителей N не меньше $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 > 46$. Этот вариант не реализуется.

Остается последний случай, когда в формировании множителей N участвуют все три простых множителя и их степени не меньше 2. Пусть степень одного из них равна 2. Тогда ему может отвечать только два из 9 множителей N. Остальные 7 создаются из степеней двух других простых чисел.

Если степень одного из этих двух равна 2, то ему отвечает не более 2 из оставшихся 7 множителей N, поэтому оставшиеся 5 являются различными степенями третьего простого числа и его степень в разложении N на простые числа не меньше

1+2+3+4+5=15. Число делителей N не меньше $3 \cdot 3 \cdot 16 = 144 > 46$. Следовательно, обе степени не меньше 3. В этом случае число делителей N не меньше $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48 > 46$. Этот случай также отпадает. Поэтому степени всех трех множителей в разложении N на простые числа должны быть не менее 3. Число делителей N в этой ситуации не меньше $4 \cdot 4 \cdot 4 = 48 > 46$ и случай трех простых множителей отпадает полностью.

4) Случай $m = 2$. Здесь также нужно составить 9 множителей из степеней 2 простых чисел. Если степень одного равна 1, то оставшиеся 8 множителей N создаются из степеней второго простого числа. В этом случае он входит в разложение N со степенью не меньшей, чем 1+2+3+4+5+6+7+8=36. Число делителей NN не меньше $2 \cdot 37 = 74 > 46$. Этот вариант не проходит. Так как простые множители равноправны, то степени обоих в разложении N не менее 2.

Рассмотрим случай когда одно из простых чисел входит в разложение N со степенью 2. На долю второго простого числа остаются не менее 7 множителей N и оно входит в разложение N на простые множители со степенью не меньшей

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Число делителей N не меньше $3 \cdot 29 = 87 > 46$. Этот вариант также не проходит. Оба простых числа входят со степенями не меньшими 3.

Пусть одно их этих простых чисел входит со степенью 3. Оно может дать сомножителями только свою первую и вторую степень. Поэтому на долю второго простого числе остается не менее 6 множителей N и оно входит в разложение N на простые множители со степенью не меньшей 1+2+3+4+5+6=21. Число делителей N не меньше $4 \cdot 22 = 88 > 46$. Отсюда следует, что оба простых числа входят со степенями не меньшими 4.

Пусть одно их этих простых чисел входит со степенью 4. Оно может дать сомножителями только свою первую, вторую и третью степени. На долю второго простого числа остаются не менее 5 множителей N и оно входит в разложение N на простые множители со степенью не меньшей 1+2+3+4+5=15. Число делителей N не меньше $5 \cdot 16 = 80 > 46$. Отсюда следует, что оба простых числа входят со степенями не меньшими 5.

Пусть одно их этих простых чисел входит со степенью 5. Оно может дать сомножителями только свою первую, вторую, третью и четвертую степени. На долю второго простого числа остаются не менее 4 множителей N и оно входит в разложение N на простые множители со степенью не меньшей 1+2+3+4=10. Число делителей N не меньше $6 \cdot 11 = 66 > 46$. Отсюда следует, что оба простых числа входят со степенями не меньшими 6. Однако, в таком случае получается, что число делителей N не меньше $7 \cdot 7 = 49 > 46$. Поэтому случай двух простых множителей также отпадает.

5) Случай $m = 1$. Простой множитель входит со степенью не меньшей 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 и N имеет не менее 46 делителей.