

Правило интегрирования по частям: $\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$,

Далее действуем по правилу:

$$I = \int_e^{e^2} x \ln x dx = x^2 \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) dx = x^2 \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \ln x dx - \int_e^{e^2} x dx =$$

$$= x^2 \ln x \Big|_e^{e^2} - I - \frac{x^2}{2} \Big|_e^{e^2},$$

$$2I = e^4 \ln e^2 - e^2 \ln e - \frac{e^4 - e^2}{2} = 2e^4 - e^2 - \frac{e^4 - e^2}{2} = \frac{3}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2,$$

$$I = \frac{e^2}{4} (3e^2 - 1).$$