2. ЛОГІКА

Математична логіка – це формальна система, носієм якої є символи і послідовності символів формальної мови, а безліч операцій використовується для формування і виведення нових висновків формальної мови. Між символами немає інших зв'язків і відношень, окрім тих, які описані засобами формальної системи.

Математична логіка розглядає мови, основна мета яких – забезпечити символізм (систему формальних позначень) для міркувань, що зустрічаються не тільки в математиці, але і в повсякденному житті.

Виділяють декілька типів формальних систем: логіка висловів і логіка предикатів, логіка відношень і нечітка логіка та ін.

Логіка висловів (*prepositional calculus*) – це модель формальної системи, предметом якої є оповідні речення, взяті цілком без урахування їх внутрішньої структури.

Логіка предикатів (*predicate calculus*) – це формальна система, предметом якої є речення з урахуванням його внутрішнього складу і структури.

Логіка відношень (*relation calculus)* – це формальна система, предметом якої є відношення у вигляді множини однорідних речень, що істотно розширюють логіку предикатів. Частіше цю логіку називають реляційною.

Логіка нечітка (*fuzzi calculus)* – це формальна система, предметом якої є речення при нечіткому заданні характерних ознак окремих складових елементів, або відношень між ними.

Двозначна логіка має справу з такими об'єктами, які приймають одне з двох можливих значень (істинний або хибний вислів, висока або низька напруга, наявність або відсутність заданої ознаки в об'єкта і т. ін.). Об'єкти, які можуть набувати значень зі скінченної множини, що містить більше двох елементів, називають *багатозначними.* Вони або зводяться яким-небудь способом до двозначних об'єктів, або обслуговуються апаратом *багатозначної логіки.*

Об'єктами математичної логіки є будь-які дискретні скінченні системи, а її **головне завдання –** структурне моделювання таких систем.

Об'єкти з двома можливими станами характеризуються *булевими змінними,* які здатні набувати лише два різні значення. Для позначення цих двох значень зазвичай використовуються цифри 0 та 1 або букви *х* (хибно) та *і* (істинно).

Відношення між булевими змінними представляються *булевими функціями,* які подібно до числових функцій можуть залежати від однієї, двох і, взагалі, *n* змінних (аргументів). Запис $y = f(x_1, x_2 ..., x_n)$ означає, що *y* – функція аргументів $x_1, x_2 ..., x_n$. Найважливіша особливість булевих функцій полягає в тому, що вони, як і їх аргументи, набувають своїх значень з двоелементної множини {0,1}, або (*і, х*), тобто характеризуються одним з двох можливих станів.

2.1. Логіка висловів. Загальні поняття

Первинним поняттям математичної логіки є «вислів». Будь-яке стверджувальне речення, яке може бути визнане істинним або хибним (але не тим та іншим одночасно), називають *висловом*. Приклади висловів: «Сніг білий», «Цукор – вуглеводень», «Місяць більше Землі». Такі вислови називають простими або *елементарними*.

При формальному дослідженні складних текстів поняття «Прості вислови» заміщають поняттям «*Пропозиційні змінні*», які позначають прописними буквами латинського алфавіту «*A*», «*B*», «*C*». «Істина» або «хибність», приписана деякому вислову, називається *істиннісним значенням* цього вислову. Істинність або хибність вислову відзначають символами «1» – *істина* або «0» – *хибність*.

Наприклад, можна позначити вислови таким чином:

P = Сніг білий;

Q = Цукор – вуглеводень;

R = Місяць більше Землі.

Символи P, Q, R і т. д., які використовуються для позначення висловів, називаються *атомарними формулами* або *атомами.*

Тоді істиннісне значення формул таке: $P = 1$; $Q = 1$; $R = 0$.

Якщо є декілька простих висловів, то за допомогою логічних зв'язок і заперечень з них можна утворити різні нові вислови, які називаються *складними*.

Приклад 1. Нехай є вислови: «На вулиці світить сонце», «У класі йдуть заняття». З цих простих висловів можливо різними способами побудувати складні вислови:

1) На вулиці світить сонце, і в класі йдуть заняття;
2) На вулиці не світить сонце;
3) На вулиці світить сонце, проте в класі йдуть заняття;
4) У класі йдуть заняття, а на вулиці світить сонце;
5) Або на вулиці світить сонце, або в класі йдуть заняття;
6) Якщо на вулиці світить сонце, то в класі йдуть заняття;
7) Якщо в класі йдуть заняття, то на вулиці світить сонце.

В алгебрі висловів допускаються будь-які граматично правильні способи утворення складних висловів й абсолютно ігнорується смислова характеристика отриманого речення.

Будь-яке з наведених складних речень допустимо з погляду алгебри висловів і називається *правильно побудованою формулою*.

Правила виконання логічних операцій над висловами формує *алгебру висловів*. Правила виведення нових висловів, основані на аксіомах і відношеннях між висловами, формують числення висловів. Вислови, з яких роблять виведення нових висловів, називають *засновком*, а отримуваний вислів – *висновком*.

Множина $V = \{A, B, C, ...\}$ із заданими над нею логічними операціями $F = \{\rceil; \&; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow\}$ формують *модель алгебри висловів* $A_в = <V; F>$.

У логіці висловів використовують п'ять логічних зв'язок: $\rceil$ (ні), & (і), $\vee$ (або), $\rightarrow$ (якщо ... , то), $\leftrightarrow$ (тоді і тільки тоді).

2.1.1. Логічні зв'язки (операції).

● Заперечення ($\rceil F$) – операція, значенням якої є заперечення значення операнда. Тобто $\rceil F$ істинна, коли F хибна, і хибна, коли F істинна.

F	$\rceil F$
1	0
0	1

Приклад 2. Вислів A = «2 · 2 = 5». Такий вислів хибний, отже $A = 0$, тобто $\rceil A = 1$.

● Кон'юнкція (F_1 & F_2) або ($F_1 \wedge F_2$)– операція, значенням якої є істина тоді і тільки тоді, коли істинні обидва вислови F_1 і F_2.

F_1	F_2	F_1 & F_2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

На природній мові ця операція виражається сполучними словами: «..і..» «..також..», «як ..,так..», «..незважаючи на..» і тому подібне.

Приклад 3. Нехай є вислови E = «число 6 ділиться на 1, 2, 3» та G = «число 6 є сума дільників 1, 2, 3». Тоді вислів «число 6 ділиться на 1, 2, 3 і представляє суму дільників 1, 2, 3» відображає формула $F = E$ & G.

● Диз'юнкція ($F_1 \vee F_2$) – операція, значенням якої є хибність тоді і тільки тоді, коли хибні обидва вислови F_1 і F_2.

F_1	F_2	$F_1 \vee F_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

На природній мові ця операція виражається роз'єднувальними словами «..або..», «..чи..» і тому подібне.

Приклад 4. Нехай є вислови: «Я піду в театр» (X_1) і «Я зустріну друга» (X_2). Формула $A = X_1 \vee X_2$ відображає вислів «Я піду в театр або зустріну друга».

● Імплікація ($F_1 \to F_2$) – операція, значенням якої є хибність тоді і тільки тоді, коли істинне значення F_1 і хибне F_2.

F_1	F_2	$F_1 \to F_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

На природній мові ця операція висловлюється «якщо ..., то ...», «тоді ..., коли ...», «остільки ..., оскільки ...», «за наявності ..., слідує ...», і т. ін. Вислів F_1 називають засновком, а F_2 – висновком.

Приклад 5. Якщо людина не читає книг (A), то вона буде неписьменною (B). Формула даного вислову це $F = A \to C$.

● Еквіваленція ($F_1 \leftrightarrow F_2$) – операція, значенням якої є істина тоді і тільки тоді, коли значення F_1 і F_2 однакові.

F_1	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

На природній мові це висловлюється «.. для того, щоб..» , «..необхідно і достатньо..», «..лише за умовою..» і т. ін. Еквіваленція дозволяє виконувати заміщення однієї формули іншою.

Приклад 6. Дані вислови P := «йому потрібний лікар»; S := «він хворий». Тоді формула $F = P \leftrightarrow S$ означає такий вислів: «Йому потрібний лікар, лише за умови, що він хворий».

2.2. Формули алгебри висловів

Пропозиціональними змінними називаються такі змінні, замість яких можна підставляти конкретні вислови. Поняття формули алгебри висловів визначається таким чином:

а) всяка пропозиціональна змінна є формулою;

б) якщо F_1 і F_2 – формули, то вирази $\rceil F$, (F_1 & F_2), ($F_1 \vee F_2$), ($F_1 \to F_2$), ($F_1 \leftrightarrow F_2$) також є формулами;

в) ніяких формул, крім породжених застосуванням вказаних вище правил, немає.

Зазвичай зовнішні дужки біля формули домовляються не писати. Підформулою формули називається всяка її частина, яка сама є формулою.

2.2.1. Правила запису складних формул

- кожне входження логічної зв'язки «$\neg$» належить до пропозиціональної змінної або формули, що безпосередньо іде слідом за логічною зв'язкою справа;
- кожне входження логічних зв'язок «&»,«$\vee$» після розставлення дужок зв'язує пропозиціональні змінні або формули, що безпосередньо оточують ці логічні зв'язки;
- у формулах немає двох логічних зв'язок, що стоять поряд, – вони повинні бути роз'єднані формулами;
- у формулах немає двох формул, що стоять поряд, – вони повинні бути роз'єднані логічною зв'язкою;
- логічні зв'язки за силою і значущістю впорядковані так: $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, тобто найсильнішою зв'язкою є заперечення, потім кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація і, нарешті, еквіваленція; знання про силу логічних зв'язок дозволяють опускати дужки, без яких і так ясний порядок виконання логічних операцій.

2.2.2. Інтерпретація формул логіки висловів

Інтерпретацією формули називається приписування атомам істиннісних виразів. Припустимо, що P і Q – два атоми, їх істиннісні значення $P = 1$, $Q = 0$. Тоді, істиннісні значення ($\neg P$), (P & Q), ($P \vee Q$), ($P \rightarrow Q$) та ($P \leftrightarrow Q$) дорівнюють 0, 0, 1, 0, 0 відповідно. Істиннісне значення будь-якої формули можливо таким самим чином обчислити, виходячи з істиннісних значень атомів.

Приклад 7. Розглянемо формулу $G = (P \,\&\, Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg S)$.

Атомами в цій формулі є P, Q і S. Приймемо, що істиннісні значення P, Q і S дорівнюють істина, хибність, істина відповідно. Тоді (P & Q) є хибність, оскільки Q хибне; ($\neg S$) є хибність, оскільки S є істина; ($P \leftrightarrow \neg S$) є хибність, оскільки P є істина і ($\neg S$) є істина; та (P & Q) $\rightarrow$ ($P \leftrightarrow \neg S$) є істина, оскільки (P & Q) є хибність і ($P \leftrightarrow \neg S$) є хибність. Таким чином, формула G є істина, якщо атомам P, Q і S приписані значення істина, хибність, істина відповідно.

Приписування істиннісних значень істина, хибність , істина атомам P, Q і S відповідно називається *інтерпретацією формули G*. Оскільки кожному з атомів P, Q і S можна приписати або істина, або хибність, то є $2^3 = 8$ інтерпретацій формули G. У табл. 2.1 дані істиннісні значення формули G для всіх таких 8 інтерпретацій.

Таблиця 2.1 – Істиннісна таблиця формули $G = (P \& Q) \to (P \leftrightarrow \rceil S)$

P	Q	S	$P \& Q$	$\rceil S$	$P \leftrightarrow \rceil S$	$(P \& Q) \to (P \leftrightarrow \rceil S)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Визначення. Кажуть, що формула G *істинна при деякій інтерпретації,* тоді і тільки тоді, коли G набуває значення істина в цій інтерпретації; інакше говорять, що G хибна в цій інтерпретації. Якщо в деякій формулі є n різних атомів, то у цієї формули буде 2^n різних інтерпретацій.

2.2.3. Загальнозначущість та суперечність у логіці висловів

Якщо формула G істинна при всіх інтерпретаціях, то така формула називається *загальнозначущою формулою (або тавтологією)*. Якщо формула G хибна при всіх інтерпретаціях, то така формула називається *суперечливою формулою (або суперечністю)*.

Приклад 8. Розглянемо формулу $G = (P \to Q) \& P \to Q$.

Атоми цієї формули – P і Q. Отже, формула G має $2^2 = 4$ інтерпретації. Істиннісні значення G при всіх її чотирьох інтерпретаціях дані в табл. 2.

Таблиця 2.2 – Істиннісна таблиця формули $G = (P \to Q) \& P \to Q$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \& P$	$(P \to Q) \& P \to Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Формула G істинна при всіх інтерпретаціях, отже, G – *загальнозначуща формула.*

Приклад 9. Розглянемо формулу $G = (P \to Q) \& (P \& \rceil Q)$.

Істиннісна таблиця для G дана в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Істиннісна таблиця формули $G = (P \to Q) \& (P \& \rceil Q)$

P	Q	$P \to Q$	$\rceil Q$	$P \& \rceil Q$	$(P \to Q) \& (P \& \rceil Q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

Формула G хибна при всіх інтерпретаціях, отже, G – *суперечлива формула.*

Часто необхідно перетворювати формули з однієї форми в іншу, особливо – в «нормальну форму». Перетворення виконуються шляхом заміни в даній формулі деякої її підформули на деяку формулу, «еквівалентну» замінюваній, і повторенням цієї процедури до тих пір, поки не вийде бажана форма.

Визначення. Говорять, що дві формули F і G *еквівалентні* або що F *еквівалентна* G (позначається $F \cong G$), тоді і тільки тоді, коли істиннісні значення F і G збігаються при кожній інтерпретації F і G.

Приклад 10. Довести еквівалентність формул $P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q)\ \&\ (Q \to P)$.

Наведемо таблиці істинності для цих формул:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q)\ \&(Q \to P)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Якщо порівняти значення логічних функцій в третьому і шостому стовпцях, то можна зробити висновок, що виконання операції еквіваленції завжди можна замістити виконанням операцій імплікації і кон'юнкції.

Приклад 11. Довести еквівалентність формул $P \to Q \cong \rceil P \vee Q$.

Наведемо таблиці істинності для цих формул:

P	Q	$P \to Q$	$\rceil P$	$\rceil P \vee Q$
1	*2*	*3*	*4*	*5*
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Операцію імплікації можна замістити виконанням операцій заперечення і диз’юнкції (див. стовпці 3 і 5).

Необхідний достатній запас еквівалентних формул, щоб проводити перетворення формул.

2.3. Розв'язання «логічних» задач

Алгебра висловів може бути з успіхом застосована для вирішення одного типу задач, які називають «логічними». Ці задачі можна вирішувати і безпосереднім міркуванням, але не завжди очевидний шлях таких міркувань, а методи алгебри висловів забезпечують гарантований успіх. У таких задачах, як правило, є ряд висловів, про які відомо, що стільки-то з них істинні, а стільки-то хибні, але не відомо, які саме істинні, а які хибні. Наприклад, є три

вислови U, V, W, з яких два істинні, а один хибний. Враховуючи ці умови, потрібно скласти з цих висловів будь-який складний вислів, який буде свідомо істинний (або хибний). Потім, використовуючи закони логіки, перетворити його до вигляду, з якого визначиться відповідь на питання задачі. У даному прикладі такий складний вислів будується виходячи з таких міркувань. Оскільки з висловів U, V, W два істинні, то всі диз'юнкції пар цих висловів також будуть істинні: $U \vee V$, $U \vee W$, $V \vee W$. Отже, буде істинною і кон'юнкція цих висловів: $(U \vee V)$ & $(U \vee W)$ & $(V \vee W)$. Рівносильне перетворення цього виразу залежатиме від структури висловів U, V, W.

Приклад 12. Один з трьох братів Вітя, Толя або Коля розбив вікно. У розмові беруть участь ще двоє братів – Андрій та Діма.

– Це міг зробити тільки або Вітя, або Толя, – сказав Андрій.

– Я вікно не розбивав, – заперечив Вітя, – і Коля теж.

– Ви обидва говорите неправду, – заявив Толя.

– Ні, Толя, один з них сказав правду, а інший сказав неправду, – заперечив Діма.

– Ти, Діма, не маєш рації, – втрутився Коля.

Їх батько, якому, зазвичай, можна довіряти, впевнений, що троє братів сказали правду. Хто розбив вікно?

Рішення. Введемо позначення для висловів:

B: «Вітя розбив вікно»;

T: «Толя розбив вікно»;

K: «Коля розбив вікно».

Тоді вислови братів можна записати в символічній формі таким чином:

$A = B \vee T$;

$V = \neg B \,\&\, \neg K$;

$L = \neg A \,\&\, \neg V = \neg (B \vee T) \,\&\, \neg (\neg B \,\&\, \neg K) = \neg B \,\&\, \neg T \,\&\, (B \vee K) =$

$= \neg T \,\&\, ((\neg B \,\&\, B) \vee (\neg B \,\&\, K)) = \neg T \,\&\, \neg B \,\&\, K$;

$D = (A \,\&\, \neg V) \vee (\neg A \,\&\, V) = ((B \vee T) \,\&\, \neg (\neg B \,\&\, \neg K)) \vee (\neg (B \vee T) \,\&$

$\&\, (\neg B \,\&\, \neg K)) = ((B \vee T) \,\&\, (B \vee K)) \vee (\neg B \,\&\, \neg T \,\&\, \neg K) = B \vee (T \,\&\, K) \vee$

$\vee (\neg B \,\&\, \neg T \,\&\, \neg K) = (B \vee \neg B) \,\&\, (B \vee \neg T) \,\&\, (B \vee \neg K) = B \vee (\neg T \,\&\, \neg K)$;

$M = \neg D = \neg (B \vee (\neg T \,\&\, \neg K)) = \neg B \,\&\, (T \vee K)$.

Утворюємо з висловів A, V, L, D, M всілякі кон'юнкції по три вислови: $A \,\&\, V \,\&\, L$, $A \,\&\, V \,\&\, D$, $A \,\&\, L \,\&\, D$, $A \,\&\, L \,\&\, M$, $A \,\&\, D \,\&\, M$, $V \,\&\, L \,\&\, D$, $V \,\&\, L \,\&\, M$, $V \,\&\, D \,\&\, M$, $L \,\&\, D \,\&\, M$, $A \,\&\, V \,\&\, M$. Оскільки з висловів A, V, L, D, M тільки три істинні, то з десяти кон'юнкцій істинна лише одна. Легко перевірити, що кон'юнкції $A \,\&\, L$, $V \,\&\, L$, $L \,\&\, D$ хибні, тому вісім перерахованих кон'юнкцій помилкові.

Залишаються дві кон'юнкції: $A \,\&\, V \,\&\, D$, $A \,\&\, V \,\&\, M$. Проведемо їх перетворення:

$A \,\&\, V \,\&\, D = (B \vee T) \,\&\, \neg B \,\&\, \neg K \,\&\, (B \vee (\neg T \,\&\, \neg K)) = (B \vee (T \,\&\, \neg T \,\&$

$\&\, \neg K)) \,\&\, \neg B \,\&\, \neg K = B \,\&\, \neg B \,\&\, \neg K = 0$;

$A \,\&\, V \,\&\, M = (B \vee T) \,\&\, \neg B \,\&\, \neg K \,\&\, \neg B \,\&\, (T \vee K) = T \,\&\, \neg B \,\&\, \neg K \,\&\, T =$

$= T \,\&\, \neg B \,\&\, \neg K$.

Отже, робимо висновок, що істинним може бути тільки вислів A & V & M або (еквівалентний йому) T & $\rceil B$ & $\rceil K$, тобто істинні вислови T, $\rceil B$, $\rceil K$, і виходить, що вікно розбив Толя.

2.5. Логіка першого порядку (логіка предикатів). Загальні поняття

Початкові елементи в логіці висловів називаються атомами. З атомів будуються формули. Атом являє собою оповідне речення, яке може бути або істинним або хибним, але не те й інше разом. Атом розглядається як єдине ціле. Його структура і склад не аналізуються.

Часто вислови виражають властивості одного або декількох об'єктів. Змістовна частина вислову відіграє роль визначальної властивості сукупності об'єктів, для яких цей вислів істинний, і називається *предикатом (або висловлювальною функцією*). Наприклад, вислів «Іванов – відмінник» істинний або помилковий залежно від оцінок, які має даний студент. У той же час предикат «x – відмінник» визначає підмножину відмінників на деякій множині студентів (група, курс, факультет). Підставивши замість x прізвища студентів, отримаємо множину висловів. Сукупність дійсних висловів і відповідатиме підмножині відмінників.

Предикат є логічною функцією $P(x)$, що приймає, як і булеві функції, значення 0 або 1, але на відміну від них, значення аргументу x вибираються з деякої множини M об'єктів $\{x \in M\}$.

Приклад 13. Представити твердження «x більше 3». Спочатку визначається предикат *БІЛЬШЕ* (x, y), який означає «x більше y». Тоді вираз «x більше 3» представляється виразом *БІЛЬШЕ* (x, 3).

У логіці першого порядку можна використовувати *функціональні символи*. Наприклад, можемо використовувати *плюс* (x, y), щоб позначити «$x + y$». Пропозицію «x + 1 більше x» можна символічно представити у вигляді *БІЛЬШЕ* (*плюс* (x, 1), x).

У наведеному прикладі вирази *БІЛЬШЕ* (x, 3), *БІЛЬШЕ* (*плюс* (x, 1), x) є атомами логіки першого порядку, де *БІЛЬШЕ – предикативний символ*; x – *змінна*; 3 – *константа*; *плюс – функціональний символ*.

Якщо висловлювальна функція містить один аргумент, то заданий *одномісний предикат*, якщо вона містить n аргументів, то – *n-місний предикат*. Одномісний предикат, як правило, описує наявність будь-якої ознаки у предмета, а n-місний предикат – наявність відношень між n предметами.

Для змінних використовуються два спеціальні символи – $\forall$ і $\exists$. Символи $\forall$ і $\exists$ називаються відповідно кванторами спільності та існування. Якщо x – змінна, то ($\forall x$) читається як «*для всіх x*», «*для кожного x*» або «*для всякого x*», тоді як ($\exists x$) читається «*існує x*», «*для деяких x*» або «*принаймні для одного x*».

Множина предметних змінних $T_1 = \{x, y, ...\}$, предметних постійних $T_2 == \{a, b,..\}$, функціональних символів $T_3=\{f_1, f_2, ...\}$ і предикативних символів $T_4 = (P_1, P_2, ...\}$ із заданими над множиною $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$

операціями $F = \{\neg; \&; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow; \forall; \exists\}$ формують *алгебру предикатів*, тобто $A_n = \langle T; F \rangle$.

Будь-яку предметну змінну і предметну постійну в алгебрі предикатів називають *термом*.

Приклад 14. Записати такі твердження:

а) «Кожне раціональне число є дійсне число».

Позначимо «x є дійсне число» через $R(x)$, «x є раціональне число» через $Q(x)$. Тоді твердження може бути записане виразом

$$(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)).$$

б) «Для кожного числа x існує таке число y, що $x < y$».

Позначимо «x менше y» через *МЕНШЕ* (x, y). Тоді твердження може бути записане виразом

$$(\forall x)(\exists y)\ \textit{МЕНШЕ}\ (x, y) \quad \text{або} \quad (\forall x)(\exists y)\ (x < y)$$

2.6. Інтерпретація формул логіки предикатів

У логіці висловів інтерпретація є приписування атомам істиннісних значень. Щоб визначити інтерпретацію для формули логіки першого порядку, необхідно вказати предметну область (область значень предметних *змінних*) і значення *констант*, *функціональних* і *предикативних символів*, що зустрічаються у формулі.

Визначення. Інтерпретація формули F логіки першого порядку складається з непорожньої (предметної) області D і зазначення «оцінки» (значення) всіх констант, функціональних символів і предикативних символів, що зустрічаються в F.

Коли шукається «оцінка», тобто визначається істиннісне значення формули в інтерпретації на області D, $(\forall x)$ інтерпретуватиметься як «для всіх елементів x з D» і $(\exists x)$ – як «існує елемент x з D».

Для кожної інтерпретації формули на області D формула може набути істиннісного значення 1 або 0 згідно з таким правилом:

1. Якщо задані значення формул G і H, то істиннісні значення формул $\neg G$, $(G \& H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ і $(G \leftrightarrow H)$ отримуються за допомогою таблиць істинності з логіки висловів.

2. $(\forall x)G$ набуває значення *істина*, якщо G набуває значення *істина* для кожного x з D; інакше вона набуває значення *хибність*.

3. $(\exists x)G$ набуває значення *істина*, якщо G набуває значення *істина* хоч би для одного x з D; інакше вона набуває значення *хибність*.

Приклад 15. Розглянути формули

$$(\forall x)P(x) \quad \text{і} \quad (\exists x)\neg P(x).$$

Нехай їхня інтерпретація така:

Область: $D = \{1,2\}$.

Оцінка для P:

$P(1)$	$P(2)$
1	0

Легко переконатися, що $(\forall x)P(x)$ є *хибність* в цій інтерпретації тому, що за правилом 2 $P(x)$ повинне набувати значення *істина* для кожного x з D, а тут $P(2)$ = *хибність.*

Формула $(\exists x)\rceil P(x)$ – *істина* в цій інтерпретації, оскільки за правилом 3 хоч би для одного x з D $\rceil P(x)$ повинне набувати значення *істина,* тут $\rceil P(2)$ = = *істина.*

Приклад 16. Розглянути формулу

$$(\forall x)(\exists y)\ \mathrm{P}(x, y).$$

Інтерпретація визначена таким чином:

Область: $D = \{1,2\}$.

Оцінка для P:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
1	0	1	0

Якщо $x = 1$, можна бачити, що існує такий x (а саме 1), що $P(1, y)$ є *істина*.

Якщо $x = 2$, також існує такий y, що $P(2, y)$ є *істина* .

Отже, у вказаній інтерпретації для кожного x з D існує такий y, що $P(x, y)$ є *істина*, тобто $(\forall x)(\exists y)\ P(x, y)$ є істина в цій інтерпретації.

Приклад 17. Розглянути формулу

$$(\forall x)\ (P(x) \to Q(\ f(x), a)).$$

У формулі є одна константа a, один одномісний функціональний символ f, один одномісний предикативний символ P і один двомісний предикативний символ Q. Нижче наводиться інтерпретація формули.

Область: $D = \{1, 2\}$.

Оцінки для a: $a = 1$.

Оцінки для f:

$f(1)$	$f(2)$
2	1

Оцінки для P і Q:

$P(1)$	$P(2)$	$Q(1,1)$	$Q(1,2)$	$Q(2,1)$	$Q(2,2)$
0	1	1	1	0	1

Якщо $x = 1$, то

$P(x) \to Q(f(x), a) = P(l) \to Q(f(l), a) = P(l) \to Q(2, 1) = 0 \to 0 = 1.$

Якщо $x = 2$, то

$P(x) \to Q(\ f(x), a) = P(2) \to Q(f(2), a) = P(2) \to Q(1, 1) = 1 \to 1 = 1.$

Оскільки $P(x) \to Q(\ f(x), a)$ істинно для всіх елементів x з області D, то формула $(\forall x)\ (P(x) \to Q(\ f(x), a))$ є *істина* в даній інтерпретації.

Формально предикат як відображення може бути визначений так:

$$P : M^n \to B, \qquad (10)$$

де B = {істинний, хибний}; n – показник степеня (тут декартів добуток). Наприклад, предикат $Pl(x_1, x_2) = (x_1 \geq x_2)$ має значення „істинний”, якщо x_1 не менше ніж x_2. Область істинності цього предикату має геометричну інтерпретацію. На рис. частина площини, що не віще лінії, де $x_1 = x_2$ (затемнена), може бути описана кортежами (x_1, x_2), у яких $x_1 > x$. Затемнена частина є область істинності предиката $Pl(x_1, x_2)$.

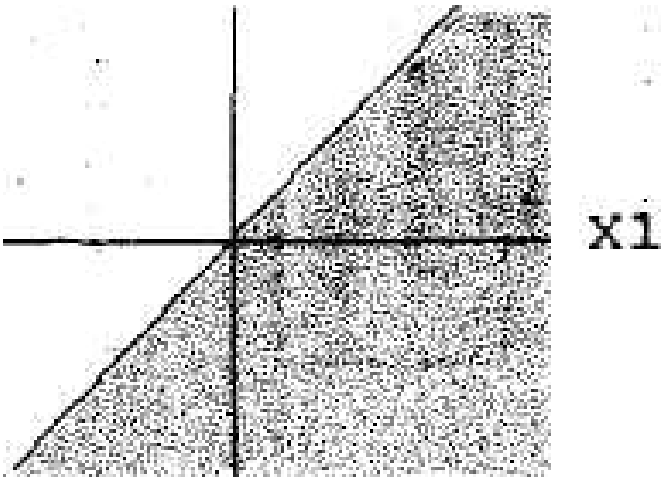

Рис. Геометрична інтерпретація області істинності предиката

Інший приклад.

Розглянемо предикат

$$P(x, y, z, n) = (x^n + y^n = z^n), \qquad (11)$$

де x, y, z, n – натуральні числа.

Цей предикат при n = 2 істинний на всіх єгипетських трикутниках (прямокутних трикутниках з цілочисельними сторонами)

P(3, 4, 5, 2) = „істинний”,
P(5, 12, 13, 2) = „істинний”,
P(8, 15, 17, 2) = „істинний”,
P(9, 12, 15, 2) = „істинний”.

Цей предикат при n > 2 є частина формулювання відомої теореми Ферма, відносно якої є різні думки (щодо існування хоча б одного прикладу істинності предиката).

Ще приклад. Умова закінчення циклічних операцій у програмі може виглядати, як предикат $P(x, y, i) = (x = y) \wedge (i > 100)$.

Контрольне завдання

Номер варіанта відповідає номеру в списку групи. Виконане завдання у будь-якому форматі (фото, WORD тощо) надсилається на електронну пошту лектору Кучуку Г.А. (kuchuk56@ukr.net) до 6 травня 2020 року, в темі обов'язково вказати групу, ім'я та прізвище студента.

№ варіанта	Номера завдань								
1.	1,а)	3,а)	4,а)	5,а)	6,а)	7,а)	9,а)	11,а)	
2.	1.б)	3.б)	4.б)	5.б)	6.б)	7.б)	9.б)	11.б)	
3.	1,в)	3,в)	4,в)	5,в)	6,в)	7,в)	9,в)	11,в)	
4.	1,г)	3,г)	4,г)	5,г)	6,г)	7,г)	9,г)	12,а)	
5.	2,а)	3,д)	4,д)	5,д)	6,а)	7,д)	9,д)	12,б)	
6.	2.б)	3.е)	4.е)	5.е)	6.б)	7.а)	9.а)	12.в)	
7.	2,в)	3,ж)	4,ж)	5,а)	6,в)	7,б)	9,б)	11,а)	
8.	2,г)	3,а)	4,з)	5,б)	6,г)	7,в)	9,в)	12,а)	
9.	1,а)	3,а)	4,а)	5,а)	6,а)	7,а)	9,а)	11,а)	
10.	1.б)	3.б)	4.б)	5.б)	6.б)	7.б)	9.б)	11.б)	
11.	1,в)	3,в)	4,в)	5,в)	6,в)	7,в)	9,в)	11,в)	
12.	1,г)	3,г)	4,г)	5,г)	6,г)	7,г)	9,г)	12,а)	
13.	2,а)	3,д)	4,д)	5,д)	6,а)	7,д)	9,д)	12,б)	
14.	2.б)	3.е)	4.е)	5.е)	6.б)	7.а)	9.а)	12.в)	
15.	2,в)	3,ж)	4,ж)	5,а)	6,в)	7,б)	9,б)	11,а)	
16.	2,г)	3,а)	4,з)	5,б)	6,г)	7,в)	9,в)	12,а)	
17.	1,а)	3,а)	4,а)	5,а)	6,а)	7,а)	9,а)	11,а)	
18.	1.б)	3.б)	4.б)	5.б)	6.б)	7.б)	9.б)	11.б)	
19.	1,в)	3,в)	4,в)	5,в)	6,в)	7,в)	9,в)	11,в)	
20.	1,г)	3,г)	4,г)	5,г)	6,г)	7,г)	9,г)	12,а)	
21.	2,а)	3,д)	4,д)	5,д)	6,а)	7,д)	9,д)	12,б)	
22.	2.б)	3.е)	4.е)	5.е)	6.б)	7.а)	9.а)	12.в)	
23.	2,в)	3,ж)	4,ж)	5,а)	6,в)	7,б)	9,б)	11,а)	
24.	2,г)	3,а)	4,з)	5,б)	6,г)	7,в)	9,в)	12,а)	
25.	1,а)	3,а)	4,а)	5,а)	6,а)	7,а)	9,а)	11,а)	
26.	1.б)	3.б)	4.б)	5.б)	6.б)	7.б)	9.б)	11.б)	
27.	1,в)	3,в)	4,в)	5,в)	6,в)	7,в)	9,в)	11,в)	
28.	1,г)	3,г)	4,г)	5,г)	6,г)	7,г)	9,г)	12,а)	
29.	2,а)	3,д)	4,д)	5,д)	6,а)	7,д)	9,д)	12,б)	
30.	2.б)	3.е)	4.е)	5.е)	6.б)	7.а)	9.а)	12.в)	
31.	2,в)	3,ж)	4,ж)	5,а)	6,в)	7,б)	9,б)	11,а)	
32.	2,г)	3,а)	4,з)	5,б)	6,г)	7,в)	9,в)	12,а)	

Тексти завдань

1. Які з цих речень є висловами:
   а) Місяць є супутником Марса;
   б) 2 + 2 – 5;

в) кисень – газ;

г) залізо легше за воду.

2. Які з висловів попереднього завдання істинні, а які хибні?

3. Визначити значення істинності таких висловів:

а) Київ розташований на Дніпрі та $2 + 3 = 5$;

б) 7 – просте число і 9 – просте число;

в) 7 – просте число або 9 – просте число;

г) число 2 парне або це число просте;

д) $2 \cdot 2 = 4$ або білі ведмеді живуть в Африці;

е) $2 \cdot 2 = 4$ та $2 \cdot 2 < 5$ та $2 \cdot 2 > 4$;

ж) $3 \cdot 3 = 9$ та $4 + 7 = 11$.

4. Визначити значення істинності висловів *A, B, C, D, E, F, G, H*:

а) $A \,\&\, (2 \cdot 2 = 4) = 1$;

б) $B \vee (2 \cdot 2 = 5) = 1$;

в) $C \vee (2 \cdot 2 = 4) = 1$;

г) $\rceil D \,\&\, (2 \cdot 2 = 4) = 1$;

д) $\rceil E \vee (2 \cdot 2 = 5) = 1$;

е) $F \,\&\, (2 \cdot 2 = 4) = 0$;

ж) $G \vee (2 \cdot 2 = 5) = 0$;

з) $H \,\&\, (2 \cdot 2 = 5) = 0$.

5. Визначити значення істинності таких висловів:

а) якщо 9 ділиться на 3, то 4 ділиться на 2;

б) якщо 11 ділиться на 6, то 11 ділиться на 3;

в) 12 ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли 12 ділиться на 3;

г) $4 > 5$ тоді і тільки тоді, коли $-4 > -5$;

д) 15 ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли 15 ділиться на 4;

е) 11 ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли 11 ділиться на 3.

6. Визначити значення істинності висловів *A*, *B*, *C*, *D*:

а) $A \leftrightarrow (2 < 3) = 1$;

б) $B \leftrightarrow (2 > 3) = 1$;

в) $(6 < 7) \leftrightarrow \rceil C = 1$;

г) $(6 > 7) \leftrightarrow \rceil D = 1$.

7. Записати такі положення за допомогою формул:

а) вважаємо, що команда виграла турнір (*A*), якщо забито 10 голів (*B*), не було програшів (*C*) і не було порушень (*D*);

б) потрібно отримати зарплату (*A*), для того, щоб діти отримали подарунки (*C*) або пішли на новорічне свято (*B*);

в) якщо вологість така висока (*A*), то або пополудні (*B*), або ввечері (*C*) піде дощ;

г) задача має бути сформульованою (*B*) і мати рішення (*C*), для того, щоб її можна було вирішити (*A*);

д) якщо студент складе заліки (*A*), лабораторні роботи (*B*) і курсові (*C*), то його допустять до складання іспитів (*D*).

8. Нехай є вислови

P := «йому потрібний лікар»; Q := «йому потрібний адвокат»;

R := «з ним стався нещасний випадок»; S := «він хворий»; U := «він поранений».

Записати такі положення за допомогою формул:

а) якщо він хворий, йому потрібний лікар, і якщо з ним стався нещасний випадок, йому потрібний адвокат;

б) якщо йому потрібний лікар і адвокат, то стався нещасний випадок;

в) якщо йому потрібний лікар, то він хворий або поранений;

г) потрібний лікар і адвокат лише за умови, що він хворий або поранений;

д) якщо він не хворий або не поранений, то йому не потрібний лікар.

9. Заповнити істиннісні таблиці для формул:

а) $G = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow (\neg P))$;

б) $G = (\neg P \,\&\, \neg Q) \rightarrow (P \vee Q)$;

в) $G = (\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg (P \,\&\, Q))$;

г) $G = (P \rightarrow \neg Q) \,\&\, (\neg P \vee Q)$;

д) $G = (P \,\&\, \neg Q) \vee (\neg P \leftrightarrow Q)$.

10. Визначити для формули властивість загальнозначущості або суперечності:

а) $\neg P \,\&\, (\neg (P \rightarrow Q))$;

б) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$;

в) $(P \,\&\, \neg Q) \,\&\, (\neg P \vee Q)$;

г) $(P \,\&\, (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$;

д) $(\neg Q \leftrightarrow P) \,\&\, (\neg (P \vee Q))$.

11. Перевірити еквівалентність таких формул, перетворюючи формули з обох боків від знака $\cong$ до однієї і тієї ж нормальної форми:

а) $(P \rightarrow Q) \,\&\, (P \rightarrow R) \cong (P \rightarrow (Q \,\&\, R))$;

б) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \,\&\, Q) \cong (\neg P \rightarrow Q) \,\&\, (Q \rightarrow P)$;

в) $P \,\&\, Q \,\&\, (\neg P \vee \neg Q) \cong \neg P \,\&\, \neg Q \,\&\, (P \vee Q)$.

12. Довести еквівалентність таких формул:

а) $(A \vee B) \,\&\, (A \vee \neg B) \cong A$;

б) $(A \vee B) \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (C \vee A) \cong (A \,\&\, B) \vee (B \,\&\, C) \vee (C \,\&\, A)$;

в) $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C) \,\&\, (B \vee D) \,\&\, (C \vee D) \cong ((A \,\&\, D) \vee (B \,\&\, C))$.

13. Один з трьох братів поставив на скатертину пляму.

– Вітя не ставив пляму, – сказав Олексій. – Це зробив Борис.

– Це Вітя поставив пляму, – сказав Борис. – А Олексій не бруднив скатертину.

– Я знаю, що Борис не міг це зробити. А я сьогодні не готував уроки, – сказав Вітя.

Виявилось, що двоє хлопчиків в кожному з двох випадків сказали правду, а один обидва рази сказав неправду. Хто поставив на скатертину пляму?

Вказівка. Утворюйте перш за все всілякі попарні диз'юнкції з висловів братів. Всі вони будуть істинні. Потім розглянете кон'юнкцію всіх дійсних диз'юнкцій. Вона теж буде істинна. Перетворивши її до кон'юнкції елементарних висловів, встановите винного.

14. Один з чотирьох хлопчиків зіпсував вимикач. На запитання «Хто це зробив?» були отримані такі відповіді:

1) «Це зробив або Міша, або Коля»;
2) «Це зробив або Вітя, або Коля»;
3) «Це не могли зробити ні Міша, ні Толя»;
4) «Це зробив або Вітя, або Міша».

Чи можна за цими даними встановити, хто винен у поломці вимикача, якщо з чотирьох висловів три – істинні?

15. Нехай $P(x)$ означає вислів «x – раціональне число» і $Q(x)$ – «x – дійсне число». Записати символами такі речення:

а) кожне раціональне число є дійсне число;
б) деяке дійсне число є раціональне число;
в) не кожне дійсне число є раціональне число.

16. Нехай $C(x)$ означає «x – торговець старими автомобілями» і $H(x)$ означає «x – чесна людина». Перекласти такі вирази українською мовою:

а) $(\exists x)\ C(x)$;
б) $(\exists x)\ H(x)$;
в) $(\forall x)(C(x) \to \neg H(x))$;
г) $(\exists x)\ (C(x)\ \&\ H(x))$;
д) $(\exists x)(H(x) \to C(x))$.

17. Для цієї інтерпретації $D = \{a,\ b\}$,

$P(a,a)$	$P(a,b)$	$P(b,a)$	$P(b,b)$
1	0	1	0

визначити істиннісні значення таких формул:

а) $(\forall x)(\exists y)\ P(x, y)$;

б) $(\forall x)(\forall y)\ P(x, y)$;

в) $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$;

г) $(\exists y)\rceil P(a, y)$;

д) $(\forall x)(\forall y)\ (P(x, y) \leftrightarrow P(y, x))$;

е) $(\forall x)P(x, x)$.

18. Розглянемо таку формулу:

$$(\exists x)\ P(x) \rightarrow (\forall x)\ \mathrm{P}(x).$$

а) Довести, що ця формула завжди істинна, якщо область D містить тільки один елемент.

б) Нехай $D = \{a, b\}$. Знайти інтерпретацію з областю D, в якій a має значення *хибність*.

19. Дана така інтерпретація:

Область: $D = \{1, 2\}$.

Значення констант a і b: $a = 1$; $b = 2$.

Значення функції f: $f(1) = 2$; $f(2) = 1$.

Значення предиката P:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
1	1	0	0

Знайти істиннісні значення цих формул у вказаній інтерпретації:

а) $P(a, f(a))\ \&\ P(b, f(b))$;

б) $(\forall x)(\exists y)\ P\ (y, x)$;

в) $(\forall x)(\forall y)\ (P(x, y) \rightarrow P\ (f\ (x), f\ (y)))$.