Тема 1.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лабораторная работа 1.1.

Моделирование процессов управления в электроприводе с регулированием скорости по разомкнутому контуру на основе решения дифференциальных уравнений

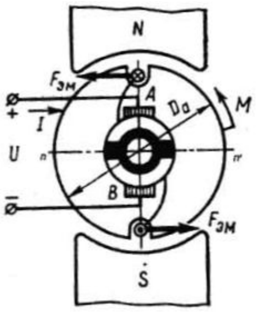
ЦЕЛЬ РАБОТЫ - получение навыков моделирования систем управления путем решения численным методом обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение исследуемой системы, на примере моделирования процессов управления в электроприводе постоянного тока с коллекторным двигателем и регулирование скорости по разомкнутому контуру.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Распространенным элементом разнообразных средств автоматизации в промышленности, на транспорте, в оборонной технике и в быту является электропривод, позволяющий регулировать скорость вращения его выходного вала. В качестве электродвигателя в нем часто используется коллекторный двигатель постоянного тока. Изменяя напряжение $U(t)$ на концах роторной обмотки (якорной цепи) такого двигателя можно регулировать скорость вращения его выходного вала $\omega(t)$ (здесь и далее t - время). Электронный усилитель, формирующий напряжение $U(t)$ из маломощного управляющего сигнала $u(t)$, в сочетании с двигателем образуют управляемый электропривод. В нем скорость вращения выходного вала управляется сигналом $u(t)$. В таком варианте управление реализуется без измерения реально полученной скорости и опирается лишь на знание номинальной зависимости скорости $\omega(t)$ от величины сигнала $u(t)$.

Такой вариант управления (регулирования) называют управлением (регулированием) по разомкнутому контуру.

Зависимость скорости $\omega(t)$ от величины управляющего сигнала $u(t)$ определяется следующими уравнениями:



$$U=i\cdot R+L\cdot di/dt+\omega\cdot Ce, \qquad (1)$$

$$Mдв=J\cdot d\omega/dt+M_{нагр}, \qquad (2)$$

$$Mдв=i\cdot Cm, \qquad (3)$$

$$U=u\cdot k. \qquad (4)$$

Рис.1 К принципу действия двигателя постоянного тока.

В уравнениях использованы обозначения:

Ce - коэффициент, определяющий величину противо ЭДС, равную ωCe, создаваемую двигателем при вращении его ротора в магнитном поле статора. Именно из-за возникновения противо-ЭДС, направленной встречно (противодействующей) напряжению *U*, вал двигателя при достижении достаточно большого значения ω перестает разгоняться и в конечном итоге вращается с постоянной скоростью (достигается установившийся режим работы двигателя),

Cm - коэффициент, определяющий зависимость момента *Mдв*, развиваемого двигателем, от величины тока *i*, протекающего в якорной цепи двигателя. *J* - момент инерции, приведенный к валу двигателя (объединяет в себе момент инерции ротора двигателя и момент инерции, обусловленный вращаемой массой нагрузки), *k* - коэффициент передачи усилителя мощности сигнала управления.

Уравнение (1) отражает баланс падений напряжений в цепи якоря двигателя. Напряжение *U*, создаваемое на концах цепи, уравновешивается в каждый момент времени перепадом напряжений, обусловленным омическим сопротивлением цепи на величину *iR*, индуктивным сопротивлением - на величину $L\,di/dt$ и величиной противо ЭДС ωCe.

Уравнение (2) отражает баланс моментов на валу двигателя. Момент, развиваемый двигателем *Мдв* уравновешивается моментом сил инерции $J \cdot \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ и моментом, потребляемым нагрузкой *Мнагр*.

Уравнение (3) определяет зависимость момента *Мдв*, развиваемого двигателем, от величины тока i в цепи якоря.

Уравнение (4) определяет зависимость напряжения $U(t)$ на концах якорной цепи от сигнала управления $u(t)$.

Моделирование поведения двигателя и изучение характера изменения характеризующих его поведение величин (t), $i(t)$ требует решения уравнений (1-3).

Представленная задача является задачей моделирования поведения динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее распространенным подходом при моделировании динамических систем является решение описывающих их поведение дифференциальных уравнений одним из численных методов. Известными методами такого рода являются: метод Эйлера, методы Рунге-Кутты, метод Адамса и ряд других. Для использования указанных методов исходное математическое описание должно быть приведено к нормальной форме Коши, предполагающей, что все уравнения преобразованы к дифференциальным уравнениям первого порядка и каждое уравнение содержит в правой части производную неизвестной величины, а правая его часть не содержит производных искомых величин.

Система (1-3) после приведения к нормальной форме Коши примет вид:

$$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=(u \cdot k - i \cdot R - \omega \cdot Ce)/L, \quad (5)$$

$$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=(i \cdot Cm - Mнагр)/J. \quad (6)$$

С целью применения численных методов решения уравнения (5-6) замещаются уравнениями:

$$\Delta i/\Delta t = [\ (u \cdot k - i \cdot R - \omega \cdot Ce)/L],$$

$$\Delta\omega/\Delta t=[\ (i \cdot Cm\ -\ Mнагр)/J\ ].$$

В них бесконечно малые величины dt, di, dω заменены малыми, но конечными приращениями Δt, Δi, $\Delta\omega$.

Если для решения системы (5-6) используется метод Эйлера, приращения Δi, $\Delta\omega$ находят как

$$\Delta i=[(u\cdot k\text{-}i\cdot R\text{-}\omega\cdot Ce)/L]\Delta t,$$

$$\Delta\omega=[(i\cdot Cm\text{-}M\textit{нагр})/J]\Delta t.$$

Новые значение переменных вычисляют по формулам:

$$i:=i+\Delta i;$$

$$\omega:=\omega+\Delta\omega;$$

или

$$i:=i+[(u\cdot k\text{-}i\cdot R\text{-}\omega\cdot Ce)/L]\Delta t;$$

$$\omega:=\omega+[(i\cdot Cm\text{-}M\textit{нагр})/J]\Delta t.$$

Графики функций $i(t)$, $\omega(t)$ можно построить, увеличивая время t с шагом Δt и вычисляя на каждом очередном шаге очередные значения

$$i:=i+[(u\cdot k\text{-}i\cdot R\text{-}\omega\cdot Ce)/L]\cdot\Delta t;$$

$$\omega:=\omega+[(i\cdot Cm\text{-}M\textit{нагр})/J]\cdot\Delta t.$$

При этом должны быть заданы начальные значения t=0, $i_0=i(0)$, $\omega_0=\omega(0)$.

Запоминая на каждом шаге вычисленные значения t, i, ω, получим таблицу, по которой строятся графики $i(t)$, $\omega(t)$.

Шаг Δt должен быть достаточно мал, чтобы соблюдалась правомерность перехода от системы (5-6) к последующим расчетным зависимостям метода Эйлера. Чем меньше Δt, тем выше точность результатов моделирования. Однако, тем больше время расчета. Поэтому важно выбрать Δt так, чтобы достигался разумный компромисс между точностью и скоростью получения искомых зависимостей $i(t)$, (t).

На практике Δt выбирается экспериментально. Например, задавшись требованием получить результаты с точностью до третьего десятичного знака, увеличивают Δt (например, всякий раз вдвое), пока очередная таблица результатов не обнаружит в третьем знаке отличие от таблицы, полученной с предыдущим значением Δt. При этом необходимо начать с достаточно малого значения Δt, чтобы по крайней мере первые две таблицы результатов не отличались между собой в пределах заданных десятичных разрядов.

Следует обратить внимание на то, что выбор слишком большого значения Δt может привести не только к количественно, но и к качественно неверным результатам моделирования. Так, например, из-за большого значения Δt может исказиться устойчивость моделируемых процессов и будут получены расходящиеся процессы, для уравнений, параметров и начальных условий, которым на самом деле соответствуют процессы, сходящиеся к устойчивому стационарному состоянию (установившемуся режиму функционирования).

Малые значения Δt обуславливают большой объем получаемой таблицы результатов. Для анализа поведения графиков $i(t)$, $\omega(t)$, как правило, достаточно иметь таблицу результатов объемом 20...30 строк, поэтому целесообразно выводить на экран не всю таблицу, а, например, каждое пятидесятое, или каждое тысячное значение, получаемое в ходе вычислений. Необходимым условием достоверности результатов моделирования является совпадение с приемлемой точностью установившихся значений переменных найденных при моделировании и рассчитанных по аналитическим зависимостям, которые можно вывести из уравнений (5-6). Установившиеся значения переменных, характеризующих устойчивое состояние динамической системы, имеют постоянное значение. В рассматриваемом случае значения i и ω по истечении некоторого времени (времени переходного процесса) принимают постоянные (установившиеся значения). Следовательно их производные по времени $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ и $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ становятся равными нулю. Тогда, положив $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=0$ и $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=0$, из уравнений (5-6) можно найти установившиеся значения i и ω.

ЗАДАНИЕ

Получить таблицу значений t, i, ω и графики $i(t)$, $\omega(t)$, используя метод Эйлера для численного решения на ЭВМ уравнений, описывающих моделируемую систему. Для создания программы численного решения уравнений допускается использование произвольного универсального языка программирования. Принять указанные ниже значения параметров, зависящие от номера варианта задания n.

R=(1+0.05n)Ом, $J_{пр}=(2\times10^{-5}+n5\times10^{-7})$кг×м^2,

L=(0.1+0.005n)Гн, $M_{нагр}=(0.01+n\cdot5\times10^{-4})$нм,

$Ce=(0.05+n\cdot5\times10^{-4})$В·с/рад, k=1,

$Cm=(0.05+n\cdot5\times10^{-4})$нм/а, u=27В,

Начальные значения переменных $i_0(0)=0$, $\omega_0\,(0)=0$.

Рекомендуемое значение $\Delta t = 1\times10^{-5}$ с. Данное значение уточнить экспериментально, исходя из требования получения результатов моделирования с точностью до трех первых значащих цифр.

Таблица результатов моделирования и графики $i(t)$, $\omega(t)$ должны охватывать интервал времени от t=0 до момента, после которого колебания значений $i(t)$, $\omega(t)$ относительно их установившегося значения не превосходят 5% (ориентировочно это интервал длительностью около 1с).

Рассчитать установившиеся значения переменных i, ω по аналитическим зависимостям, следующим из уравнений (5-6), и сравнить их с результатами, полученными при моделировании.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название работы.
2. Функциональная схема, отражающая моделируемую систему.
3. Уравнения, составляющие описание системы, в исходной форме и в нормальной форме Коши.

4. Значения параметров и начальных условий.

5. Текст программы.

6. Таблица результатов моделирования.

7. Графики $i(t)$, ω (t).

8. Уточненное значение Δt.

9. Аналитические зависимости для определения установившихся значений i и ω.

10. Установившиеся значения i и ω, полученные из аналитических зависимостей и из таблицы результатов моделирования.

11. Определите величину перерегулирования скорости из графика $\omega(t)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

А. Разобравшись в физическом смысле математического описания моделируемой системы дайте ответы на следующие вопросы (при поиске ответов учтите практическое равенство нулю тех или иных слагаемых в уравнениях на начальном и конечном участках времени):

1. Почему на начальном отрезке времени скорость ω имеет отрицательные значения?
2. Почему на начальном отрезке времени ток i имеет положительные значение?
3. От каких параметров на начальном отрезке времени главным образом зависит интенсивность нарастания скорости и тока?
4. Определите начальное угловое ускорение $d\omega/dt$ и скорость нарастания тока di/dt аналитически и из таблицы результатов моделирования, сравните получаемые числовые значения.
5. От каких параметров зависят установившиеся значения переменных i, ω, как получить эти зависимости?
6. В каком случае установившееся значение тока примет значение равное нулю?
7. Как зависит установившееся значение скорости от величины нагружающего момента? Приведите аналитическую зависимость.

8. Как изменится математическое описание моделируемой системы если необходимо учесть переменность во времени момента инерции, приведенного к валу привода? B. Повторите материал, касающийся численных методов решения систем дифференциальных уравнений с целью ответа на следующие вопросы:

9. Что означает приведение уравнений к нормальной форме Коши. С какой целью производится такое преобразование уравнений?

10. Какие методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений вы знаете? Каковы их достоинства и недостатки?

11. Как меняется точность результатов моделирования при изменении величины Δt?

12. Как экспериментально определить рациональное значение Δt? C. Вспомнив определения установившегося режима функционирования системы и его устойчивости ответе на следующие вопросы ?

13. Как найти установившиеся значения переменных, зная дифференциальные уравнения, описывающие поведение моделируемой системы?