Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО
Тульский государственный университет

Кафедра физики

Семин В.А.

Тестовые задания по механике

для проведения практических занятий
и контрольных работ
на кафедре физики

Часть I

Тула 2010 г.

Первая часть тестовых заданий содержит задачи из десяти разделов по механике, которые будут предложены студентам первого курса инженерных направлений на первой контрольной работе (март)

Тесты, нумерация которых содержит букву "э", соответствуют тестовым заданиям на аттестации (март) (в том числе на интернет-экзамене, как составная часть всего курса физики).

По каждому разделу даются формулы, формулировки законов и теорем, необходимые при решении конкретных задач. Каждая задача имеет ответ.

Предназначена для самостоятельной подготовки студентов и для проведения практических занятий по физике.

Векторный способ описания движения частицы.

Радиус-вектор частицы $r(t)$ начинается в начале системы координат и заканчивается на частице.

Скорость частицы $v(t)=\dfrac{dr}{dt}$ (перемещение частицы за единицу времени)

Ускорение частицы $a(t)=\dfrac{dv}{dt}$ (изменение скорости за единицу времени)

Координатный способ описания движения частицы

Радиус вектор частицы $r(t)=i\cdot x(t)+j\cdot y(t)+k\cdot z(t)$.

Скорость материальной точки $v(t)=i\cdot v_x(t)+j\cdot v_y(t)+k\cdot v_z(t)$.

Ускорение материальной точки $a(t)=i\cdot a_x(t)+j\cdot a_y(t)+k\cdot a_z(t)$.

Здесь i, j, k – единичные векторы (орты), направленные по осям x, y, z соответственно (декартова система координат),

1. Прямая задача кинематики

Если известны зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то можно определить:

$v_z(t)=\dfrac{dx}{dt}$, $v_y(t)=\dfrac{dy}{dt}$, $v_z(t)=\dfrac{dz}{dt}$ – проекции скорости на оси x, y, z,

$a_x(t)=\dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y(t)=\dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z(t)=\dfrac{dv_z}{dt}$ – проекции ускорения на оси x, y, z.

Величина (модуль) радиса-вектора $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Величина (модуль) скорости $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$.

Величина (модуль) ускорения $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

1-1. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону:

а) $r(t)=i\cdot A\dfrac{t}{\tau}+j\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2+k\cdot C$; б) $r(t)=i\cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2+j\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3+k\cdot C$;

в) $r(t)=i\cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3+j\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4+k\cdot C$; Найдите тангенс угла между вектором скорости v и А) осью x Б) осью y в момент времени $t=\tau=1$ с, если $A=B=C=1$ м.

А) Ответы: а) 2; б) 1,5; в) 1,33;

Б) Ответы: а) 0,5; б) 0,667; в) 0,75

1-2. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону:

а) $r(t) = i \cdot A\dfrac{t}{\tau} + j \cdot B + k \cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2$; б) $r(t) = i \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 + j \cdot B + k \cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$;

в) $r(t) = i \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot B + k \cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$. Найдите тангенс угла между вектором скорости v и А) осью x; Б) осью z в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = C = 1$ м.

А) Ответы: а) 2; б) 1,5; в) 1,33

Б) Ответы: а) 0,50; б) 0,667; в) 0,75

1-3. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$r(t) = i \cdot A\dfrac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 + k \cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$. На каком расстоянии будет находиться частица в момент времени $t = \tau = 1$ с а) от оси x; б) от оси y; в) от оси z, если $A = B = C = 1$ м.

Ответы: а) 1,4 м; б) 1,4 м; в) 1,4 м

1-4. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

а) $r(t) = i \cdot A\dfrac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 + k \cdot C\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$,

б) $r(t) = i \cdot A\sin(\omega t) + j \cdot A\cos(\omega t) + k \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$.

Чему будет равна величина скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = C = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 3,74 м/с; б) 3,39 м/с

1-5. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$r(t) = i \cdot A\sin(\omega t) + j \cdot A\cos(\omega t) + k \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$. Чему будет равна величина начальной скорости частицы, если $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответ: 1,57 м/с

1-6. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$r(t) = i \cdot \left(A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3 - B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4\right) + j \cdot A\cos(\omega t) + k \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$.

Через сколько секунд перпендикулярной оси x окажется
а) скорость частицы; б) ускорение частицы
если $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 0,75 с; б) 0,50 с

1-7. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$$r(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot \left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right) + k \cdot \sin \omega t .$$

Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси y, если $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответ: 0,816 с

1-8. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$$r(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot A\cos(\omega t) + k \cdot \left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 - A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5\right).$$

Через сколько секунд окажется перпендикулярной оси z,
а) скорость частицы; б) ускорение частицы,
если $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 0,775 с; б) 0,548 с

1-9. Через сколько секунд ускорение частицы будет перпендикулярно оси y, если радиус-вектор частицы зависит от времени по закону

$$r(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot \left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right) + k \cdot C \cdot \sin \omega t ,$$

$\tau = 1$ с, $A = B = C = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответ: 0,632 с

1-10. Скорость частицы зависит от времени по закону

$$v(t) = i \cdot \left(A\frac{t}{\tau} - B\frac{t^2}{\tau^2}\right) + j \cdot \left(B\frac{t^3}{\tau^3} - A\frac{t}{\tau}\right).$$

Через сколько секунд ускорение частицы будет
а) параллельно оси x; б) перпендикулярно оси x; в) перпендикулярно оси y, если $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м/с.

Ответы: а) 0,577 с; б) 0,5 с; в) 0,577 с

1-11. Скорость частицы зависит от времени как $v(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$.

а) Через сколько секунд ускорение частицы будет направлено под углом 45° к оси x, б) Чему станет равна величина полного ускорения частицы в момент времени $t = 1$ с. $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м/с.

Ответы: а) 0,5 с; б) 2,24 м/с^2

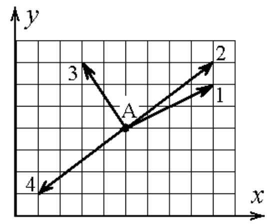
1-12. Скорость частицы зависит от времени по закону

$v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. Через сколько секунд ускорение частицы будет направлено под углом 45° к оси y, если $\tau = 1$ с, $A = B = 1$ м/с.

Ответ: 0,707 с

1-13э. Радиус-вектор частицы изменяется во времени по закону $\overline{r} = 2t^2 \cdot \overline{i} + t^3 \cdot \overline{j}$.

В момент времени t = 1 с частица оказалась в некоторой точке А. Выберите правильное направление скорости частицы в этот момент времени.



а) 1;
б) 2;
в) 3;
г) 4;
д) на рисунке нет правильного направления

2. Обратная задача кинематики

Если известны зависимости $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ и начальные условия x_0 , y_0 , z_0 , v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} , то можно определить:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x(t)\,dt\,;\;\; v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y(t)\,dt\,;\;\; v_z = v_{0z} + \int_0^t a_z(t)\,dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x(t)\,dt\,;\;\; y = y_0 + \int_0^t v_y(t)\,dt\,;\;\; z = z_0 + \int_0^t v_z(t)\,dt$$

Путь, пройденный частицей за время t: $\quad S = \int_0^t v(t)\,dt$

2-1. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону а) $v(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$,

б) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$.

На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = B = 1 м/с.

Ответы: а) 0,601 м, б) 0,417 м, в) 0,30 м

2-2. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону

а) $v(t) = (i \cdot A + j \cdot B)\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $v(t) = (i \cdot A + j \cdot B)\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$,

в) $v(t) = i \cdot A\sin\omega t + j \cdot A\cos\omega t$. Какой путь проделает частица за время $t = \tau = 1$ с, если $A = B$ = 1 м/с, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответы: а) 0,471 м, б) 0,354 м, в) 1 м

2-3. Частица начала свое движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и ее ускорение зависит от времени по закону

а) $a(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $a(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Найти модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 0,601 м/с, б) 0,389 м/с

2-4. Частица начала свое движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и ее ускорение зависит от времени по закону

$a(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Найти тангенс угла, под которым будет направлена скорость частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с   а) к оси x,   б) к оси y если $A = B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 0,6; б) 1,67

2-5. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $v_0 = -j \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону

а) $a(t) = i \cdot B\frac{t}{\tau}$, б) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ м/с, $B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 1,118 м/с, б) 0,8 м/с

2-6. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $v_0 = -k \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону

$a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ м/с, $B = 1$ м/с^2.

Ответ: 1,054 м/с

2-7. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью а) $v_0 = (i - j) \cdot A$, б) $v_0 = (i + k) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону $a(t) = j \cdot B\frac{t}{\tau}$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ м/с, $B = 1$ м/с^2.

Ответы: а) 1,118 м/с, б) 1,5 м/с

2-8. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором а) $r_0 = k \cdot C$, б) $r_0 = C \cdot i$, в) $r_0 = j \cdot C$, г) $r_0 = (j + i) \cdot C$, д) $r_0 = (j - k) \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону $v(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с, $C = 1$ м.

Ответы: а) 1,17 м, б) 1,54 м, в) 1,42 м, г) 2,01 м, д) 1,74 м

2-9. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону а) $v(t) = (i \cdot A + j \cdot B)\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

б) $v(t) = (i \cdot A + j \cdot B)\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, в) $v(t) = (i \cdot A + j \cdot B)\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Какой путь проделает частица за время $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ м/с.

Ответ: а) 0,2828 м, б) 0,2357 м, в) 0,202 м

2-10. Частица начала свое движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и ее ускорение зависит от времени по закону

а) $a(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$, б) $a(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^8$.

Какая величина скорости будет у частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с^2, B =1 м/с^2.

Ответы: а) <u>0,288</u> м/с, б) <u>0,229</u> м/с

2-11. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $v_0 = -j \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону

а) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, б) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 0,833 м/с, б) 0,857 м/с

2-12. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $v_0 = (i - j) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону а)

$a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, в) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 1,25 м/с, б) 1,302 м/с, в) 1,329 м/с

2-13. Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $v_0 = (i + k) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону а)

$a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $a(t) = j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$.

Каков модуль скорости частицы в момент времени $t = \tau = 1$ с, если
A = 1 м/с, B =1 м/с^2.

Ответы: а) 1,453 м/с, б) 1,428 м/с, в) 1,421 м/с

2-14. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $r_0 = k \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = B = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,083 м, б) 1,05 м

2-15. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $r_0 = i \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $v(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $v(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

в) $v(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = B = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,52 м, б) 1,513 м, в) 1,509 м

2-16. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $r_0 = j \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$,

в) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = B = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,374 м, б) 1,357 м, в) 1,348 м

2-17. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $r_0 = (j + i) \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$,

в) $v(t) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если A = B = 1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,828 м, б) 1,772 м, в) 1,745 м

2-18. Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $r_0 = \left(j - k\right) \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону

а) $v\left(t\right) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $v\left(t\right) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

в) $v\left(t\right) = i \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6 + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A =$ B =1 м/с, C = 1 м.

Ответы: а) 1,613 м, б) 1,571 м, в) 1,543 м

2-19э. Начальная скорость частицы равна $\overline{v}_0 = 16\overline{i} - 6\overline{j}$, а ускорение меняется во времени по закону $\overline{a} = -6t^2 \cdot \overline{i} + 4t^3 \cdot \overline{k}$. Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси OX?
а) 1,33 с б) 2 с в) 4 с г) никогда не будет перпендикулярной OX

3. Связь линейных и угловых величин в кинематике.

При криволинейном движении ускорение частицы имеет тангенциальную a_τ и нормальную a_n составляющие, причем $a_\tau = dv/dt$, $a_n = v^2/R$, где R – радиус кривизны траектории. Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Линейные и угловые величины связаны следующим образом:

$$v = \omega R;\; a_\tau = \varepsilon R;\; a_n = \omega^2 R$$

3-1. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1$ с$^{-2}$. Найти
а) отношение тангенциального и нормального ускорения и
б) тангенс угла между вектором полного ускорения и вектором скорости частицы через время $t = 1$ с?

Ответы: а) 1; б) 1

3-2. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м со скоростью, модуль которой зависит от времени по закону $v = A \cdot t/\tau$. Найти а) тангенс угла между вектором полного ускорения и вектором скорости частицы и б) отношение нормального и тангенциального ускорения частицы через время $t = 1$ с, если $\tau = 1$ с, A = 1 м/с.

Ответы: а) 1; б) 1

3-3. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с угловой скоростью, модуль которой зависит от времени по закону $\omega = A \cdot t/\tau$. Найти отношение нормального и тангенциального ускорения частицы через время $t = 1$ с, если $\tau = 1$ с. A = 1 с$^{-1}$.

Ответ: 1

3-4. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с угловой скоростью, модуль которой зависит от времени по закону а) $\omega = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, A = 2 с$^{-1}$; б) $\omega = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, A = 3 с$^{-1}$;

в) $\omega = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, A = 4 с$^{-1}$; г) $\omega = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, A = 5 с$^{-1}$; д) $\omega = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$, A = 6 с$^{-1}$.

Через сколько секунд угол между полным ускорением частицы и ее скоростью будет равен 45°, если $\tau = 1$ с. .

Ответы: во всех вариантах t = 1 с

3-5. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону

а) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти линейную скорость частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 1 рад.

Ответы: а) 3 м/с, б) 4 м/с, в) 5 м/с, г) 6 м/с

3-6. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону

а) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти нормальное ускорение частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 1 рад.

Ответ: а) 9 м/с^2, в) 16 м/с^2, в) 25 м/с^2, г) 36 м/с^2.

3-7. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону

а) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти тангенциальное ускорение частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 1 рад.

Ответ: а) 6 м/с^2, б) 12 м/с^2, в) 20 м/с^2, г) 30 м/с^2.

3-8. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с угловым ускорением, которое зависит от времени по закону а)

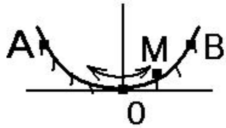
$\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти нормальное ускорение частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 1 с$^{-2}$.

Ответы: а) 0,0625 м/с^2, б) 0,04 м/с^2, в) 0,0278 м/с^2, г) 0,02 м/с^2

3-9. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м с угловым ускорением, которое зависит от времени по закону а) $\varepsilon = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varepsilon = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, в) $\varepsilon = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $\varepsilon = A \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Найти линейную скорость частицы через время $t = 1$ с, если $\tau = 1$ с. $A = 1$ с$^{-2}$.

Ответы: а) 0,25 м/с, б) 0,2 м/с, в) 0,167 м/с, г) 0,143 м/с

3-10э. Материальная точка М свободно без трения скользит в поле силы тяжести по гладким стенкам симметричной ямы (А и В – наивысшие точки подъема). При этом величина тангенциальной (касательной к траектории) проекции ускорения точки М:



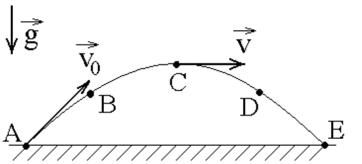
а) отлична от нуля в точке В;

б) максимальна в нижней точке траектории О;

в) равна нулю в точке А;

г) одинакова во всех точках траектории;

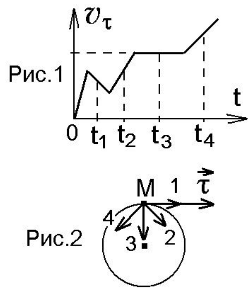
3-11э. Камень бросили под углом к горизонту со скоростью V_0. Его траектория в однородном поле тяжести изображена на рисунке. Сопротивления воздуха нет. Модуль тангенциального ускорения a_τ на участке А-В-С:



1) уменьшается

2) увеличивается 3) не изменяется

3-12э. Материальная точка М движется по окружности со скоростью v. На рис.1 показан график зависимости проекции скорости v_τ на орт τ, направленный вдоль скорости v. На рис.2 укажите направление силы, действующей на точку М в момент времени t_1:



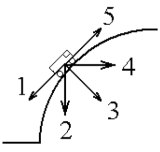
а) 1

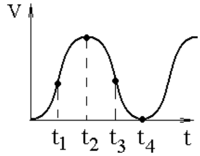
б) 2

в) 3

г) 4

3-13э. Из-за неисправности мотора величина скорости автомобиля синусоидально изменялась во времени, как показано на графике зависимости V(t). В момент времени t_1 автомобиль поднимался по участку дуги. Куда может быть направлена результирующая всех сил, действующих на автомобиль в этот момент времени?





1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

3-14э. Скорость частицы изменяется во времени по закону $\overline{\text{v}} = 4t^2 \cdot \overline{i} + 3t^2 \cdot \overline{j}$. Чему равна величина тангенциального ускорения частицы в момент времени $t = 1$ с?

а) 10 м/с^2 б) 25 м/с^2 в) 7 м/с^2 г) 14 м/с^2

4. Кинематика вращательного движения.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси z и известна зависимость угла поворота $\varphi(t)$, то можно рассчитать проекции на ось вращения его угловой скорости $\omega_z = d\varphi/dt$ и углового ускорения $\varepsilon_z = d\omega_z/dt$.

Если известна зависимость $\varepsilon_z(t)$ и начальные условия ω_{0z} и φ_0, то можно найти $\omega_z = \omega_{0z} + \int_0^t \varepsilon_z dt$ и $\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z dt$ (обратная задача).

4-1. Диск радиуса $R = 1$ м начал вращаться вокруг своей оси без начальной скорости с угловым ускорением, зависящим от времени по закону

а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. На какой угол (в радианах) он повернется за время $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ с$^{-2}$.

Ответы: а) 0,0833 рад, б) 0,05 рад, в) 0,0333 рад

4-2. Диск радиуса $R = 1$ м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ его угловое ускорение стало возрастать по закону

а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, в) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Какую угловую скорость будет иметь диск через время $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ с$^{-2}$, $\omega_0 = 1$ с$^{-1}$.

Ответы: а) 1,33 рад/с, б) 1,25 рад/с, в) 1,2 рад/с

4-3. Диск радиуса $R = 1$ м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ он начал тормозить. Модуль его углового ускорения при этом зависел от времени по закону

а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, $A = 3$ с$^{-2}$; б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, $A = 1$ с$^{-2}$; в) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, $A = 5$ с$^{-2}$.

Через сколько секунд диск остановится, если $\tau = 1$ с, $\omega_0 = 1$ с$^{-1}$?

Ответы: а) 1 с, б) 1,41 с, в) 1 с

4-4. Диск радиуса $R = 1$ м начал вращаться вокруг своей оси так, что угол его поворота зависит от времени по закону

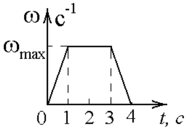
а) $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, в) $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Через сколько секунд диск остановится, если $\tau = 1$ с? $A = 1$ рад, $B = 1$ рад.

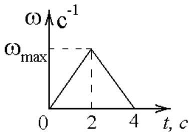
Ответы: а) 0,667 с, б) 0,707 с, в) 0,809 с

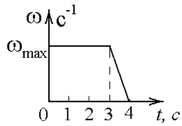
4-5. Диск радиуса $R = 1$ м вращался вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ его угловое ускорение стало возрастать по закону а) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, б) $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$. Через сколько секунд диск будет иметь максимальную угловую скорость,
если $\tau = 1$ с? $A = B =$ с$^{-2}$, $\omega_0 = 1$ с$^{-1}$.

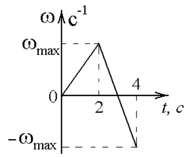
Ответы: а) 1 с, б) 1 с

4-6. Диск вращается с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком (см. рис.). Найти угол поворота (в радианах) диска за $t = 4$ с, если $\omega_{max} = 1$ с$^{-1}$.

а) 

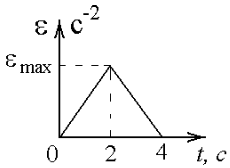
, б) 

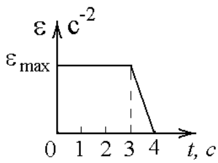
, в) 

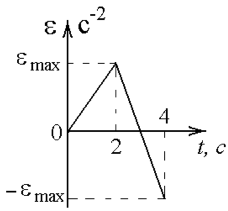
г) 

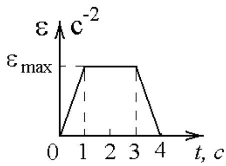
Ответы: а) 3 рад, б) 2 рад, в) 3,5 рад, г) 1 рад

4-7. Диск вращается с нулевой начальной скоростью и с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Найти максимальную угловую скорость диска в интервале времени $0 < t < 4$ с, если $\varepsilon_{max} = 1$ с$^{-2}$.

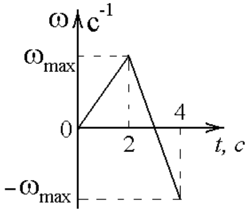
а) 

, б) 

, в) 

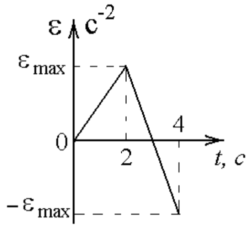
г) 

Ответы: а) 2 рад/с, б) 3,5 рад/с, в) 1,5 рад/с, г) 3 рад/с



4-8. Диск вращается с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком.
Найти максимальный угол поворота диска (в радианах) в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с, если $\omega_{max} = 1$ с$^{-1}$.

Ответ: 1,5 рад

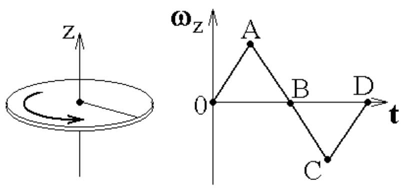


4-9. Диск вращается с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Найти угловую скорость диска в момент времени $t = 4$ с, если $\varepsilon_{max} = 1$ c^{-2}.

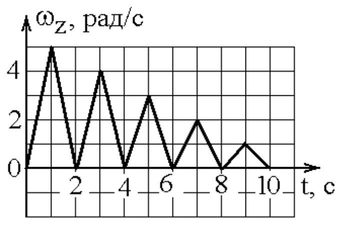
Ответ: 1 рад/с

4-10э. Частица движется вдоль окружности с радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t) = 2\pi\left(t^2 - 4t + 6\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. Величина нормального ускорения частицы равна нулю в момент времени (в секундах), равный: а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

4-11э. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости так, как показано на рисунке. На каких участках графика зависимости $\omega_z(t)$ вектор угловой скорости ω и вектор углового ускорения ε направлены в одну сторону?

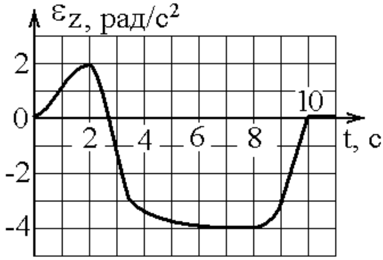


1) 0 - A и A-B
2) 0 -A и B - C
3) B - C и C - D
4) всегда направлены в одну сторону



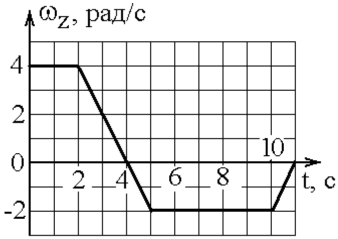
4-12э. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. В какой момент времени угол поворота тела относительно начального положения будет максимальным?

а) 10 с б) 1 с
в) 2 с г) 9 с



4-13э. Диск радиуса R начинает вращаться из состояния покоя в горизонтальной плоскости вокруг оси Z, проходящей перпендикулярно его плоскости через его центр. Зависимость проекции углового ускорения от времени показана на графике. Во сколько раз отличаются величины тангенциальных ускорений точки на краю диска в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 7$ с?

а) в 2 раза б) в 4 раза в) оба равны нулю
г) трудно определить точно



4-14э. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. На какой угол относительно начального положения окажется повернутым тело через 11 секунд?

а) 8 рад б) 12 рад в) 24 рад г) 0 рад

5. Сила как причина изменения импульса.

Второй закон Ньютона в современной формулировке $\boxed{\left(\sum F_i\right)_{\text{внеш}} = \frac{dp_{\text{сист}}}{dt}}$, где $p_{\text{сист}} = \sum p_i$ – суммарный импульс системы частиц, $\left(\sum F_i\right)_{\text{внеш}}$ – векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему частиц.

$\boxed{\Delta p_{\text{сист}} = \int_0^\tau \left(\sum F_i\right) dt = \tau \cdot F_{\text{средн}}}$ – вектор изменения импульса за время τ (импульс силы), где $F_{\text{средн}}$ – средняя сила, действующая на систему частиц.

В проекциях $F_x = \frac{dp_x}{dt}$, $F_y = \frac{dp_y}{dt}$, $F_z = \frac{dp_z}{dt}$. $\Delta p_x = \int_0^\tau F_x dt = \tau \cdot \left(F_x\right)_{\text{средн}}$;

$\Delta p_y = \int_0^\tau F_y dt = \tau \cdot \left(F_y\right)_{\text{средн}}$; $\Delta p_z = \int_0^\tau F_z dt = \tau \cdot \left(F_z\right)_{\text{средн}}$;

Модуль изменения импульса $\left|\Delta p\right| = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2}$

Модуль силы $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, модуль импульса $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$.

5-1. Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону

а) $p(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, б) $p(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$,

в) $p(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, г) $p(t) = i \cdot A\frac{t}{\tau} + j \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. Найти модуль силы, действующей на частицу в момент времени $t = \tau = 1$ с, если $A = B = 1$ кг·м/с.

Ответы: а) 2,236 Н, б) 3,162 Н, в) 4,123 Н, г) 5,099 Н

5-2. Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону а) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$,

в) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, г) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Найти тангенс угла между осью x и вектором силы, действующей на частицу в момент времени $t=\tau=1$ с, если $A=B=1$ кг·м/с.

Ответы: а) 1,5; б) 0,75; в) 0,6; г) 0,667

5-3. Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону а) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$, б) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^8$,

в) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^8+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^9$. Найти тангенс угла между осью y и вектором силы, действующей на частицу в момент времени $t=\tau=1$ с, если $A=B=1$ кг·м/с.

Ответы: а) 0,857; б) 0,875; в) 0,889

5-4. Частица массы m = 1 кг движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону

а) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $p(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$. Найти ускорение частицы в момент времени $t=\tau=1$ с, если $A=B=1$ кг·м/с,

Ответы: а) 5,831 м/с^2; б) 8,602 м/с^2;

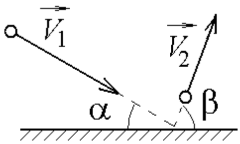
5-5. Частица движется в плоскости под действием силы, которая зависит от времени по закону

а) $F(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, б) $F(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^8+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$,

в) $F(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^9+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, г) $F(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^9+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^6$

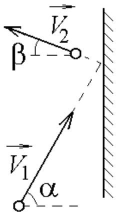
д) $F(t)=i\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^9+j\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Найти модуль изменения импульса за интервал времени $0<t<1$ с, если $\tau=1$ с, $A=B=1$ Н.

Ответы: а) 0,280 кг·м/с; б) 0,229 кг·м/с; в) 0,194 кг·м/с;
г) 0,174 кг·м/с; д) 0,16 кг·м/с



5-6. Небольшой шарик массы m летит со скоростью V_1 под углом α =30° к горизонтальной плоскости. После неупругого удара он отскакивает со скоростью V_2 под углом β =60° к плоскости. Время соударения τ. Найти
а) модуль средней силы трения шарика о плоскость;
б) модуль средней силы нормальной реакции опоры,
действовавшие во время удара. $V_1 = 5$ м/с, $V_2 = 3$ м/с, τ = 0,001 с, m = 1 кг.

Ответы: а) 2830 Н, б) 5098 Н



5-7. Небольшой шарик массы m летит со скоростью V_1 под углом α = 60° к горизонту и падает на вертикальную стену. После неупругого удара он отскакивает со скоростью V_2 под углом β =30° к горизонту. Время соударения τ. Найти
а) модуль средней силы трения шарика о стену,
б) модуль средней силы нормальной реакции со стороны стены.
$V_1 = 5$ м/с, $V_2 = 3$ м/с, τ = 0,001 с, m = 1 кг.

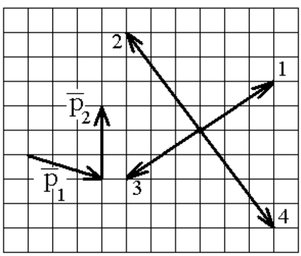
Ответы: а) 2830 Н, б) 5098 Н

5-8. Частица с начальным импульсом $p_0 = i \cdot A$ движется в плоскости под действием силы, которая зависит от времени по закону

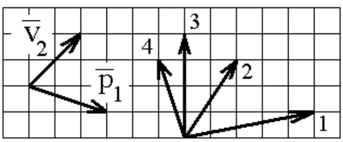
а) $F(t) = j \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2$, б) $F(t) = j \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$, в) $F(t) = j \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$

Найти модуль импульса через $t = \tau = 1$ с, если $A = 1$ кг·м/с , $B = 1$ Н.

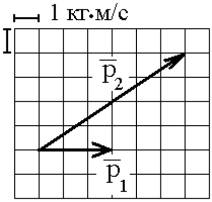
Ответы: а) 1,054 кг·м/с , б) 1,031 кг·м/с , в) 1,020 кг·м/с



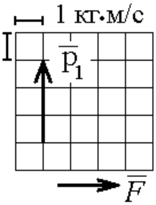
5-9э. Импульс тела $\overline{p}_1$ изменился под действием короткого удара и стал равным $\overline{p}_2$, как показано на рисунке. В каком направлении действовала сила?
а) 1
б) 2
в) 3
г) 4



5-10э. Импульс тела $\overline{p}_1$ изменился под действием короткого удара и скорость тела стала равной $\overline{v}_2$, как показано на рисунке. В каком направлении могла действовать сила?
а) 2, 3, 4 б) 1 в) только 4 г) 1, 2



5-11э. Теннисный мяч летел с импульсом $\overline{p}_1$ в горизонтальном направлении, когда теннисист произвел по мячу резкий удар длительностью $\Delta t = 0{,}1$ с. Изменившийся импульс мяча стал равным $\overline{p}_2$ (масштаб указан на рисунке). Найти среднюю силу удара.
а)30 Н б) 5 Н в) 50 Н
г) 0,5 Н д) 0,1 Н



5-12э. Теннисный мяч летел с импульсом $\overline{p}_1$ (масштаб и направление указаны на рисунке). В перпендикулярном направлении на короткое время Δt = 0,1 с на мяч подействовал порыв ветра с постоянной силой F = 40 Н. Какова стала величина импульса p_2 после того, как ветер утих?
а) 5 кг · м/с б) 0,5 кг · м/с в) 43 кг · м/с
г) 50 кг · м/с д) 7 кг · м/с

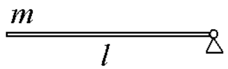
6. Динамика вращательного движения твердого тела.

Закон динамики вращательного движения твердого тела в проекции на ось вращения z: $\boxed{\sum(M_{zi})_{\text{внеш}} = \dfrac{dL_z}{dt} = I_z \cdot \varepsilon_z}$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения, $\sum(M_{zi})_{\text{внеш}}$ – сумма проекций внешних моментов сил, $\boxed{L_z = I_z \cdot \omega_z}$ – проекция момента импульса твердого тела.

$$M = [r, F] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = i\underbrace{\left(yF_z - zF_y\right)}_{M_x} + j\underbrace{\left(zF_x - xF_z\right)}_{M_y} + k\underbrace{\left(xF_y - yF_x\right)}_{M_z},$$

где r – радиус вектор точки приложения силы F. M_x, M_y, M_z – проекции момента силы. Модуль момента силы $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ или

$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$, где α – угол между силой F и радиусом-вектором r.

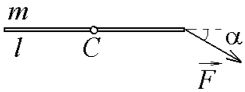


6-1. Тонкий однородный стержень массы m = 1 кг и длины l= 1 м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. В оси действует момент сил трения $M_{\text{тр}}$. = 1 Н·м. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без толчка. Найдите угловое ускорение в начальный момент времени. g = 10 м/с^2.

Ответ: 12 рад/с^2

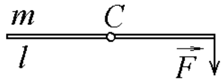
6-2. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться в вертикальной плоскости без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень располагают а) под углом α к горизонту; б) под углом α к вертикали и отпускают без толчка. Найдите его угловое ускорение в начальный момент времени. m = 1 кг, l = 1 м, α = 30°, g = 10 м/с^2.

Ответы: а) 13 рад/с^2; б) 7,5 рад/с^2



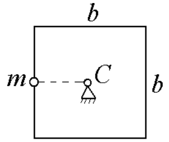
6-3. Тонкий однородный стержень массы m= 1 кг и длины l = 1 м может вращаться в горизонтальной плоскости без трения вокруг вертикальной оси C, проходящей через середину стержня. К концу стержня в плоскости вращения под углом α = 30° к стержню прикладывают силу F =1 Н. Найдите угловое ускорение стержня в начальный момент времени.

Ответ: 3 рад/с^2



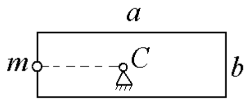
6-4. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси *C*, проходящей через середину стержня. В оси действует момент силы трения $M_{тр}$. К концу стержня в плоскости вращения перпендикулярно стержню прикладывают силу F. Найдите угловое ускорение стержня в начальный момент времени.
$m = 1$ кг, $l = 1$ м, $F = 3$ Н, $M_{тр} = 1$ Н·м.

Ответ: 6 рад/с^2



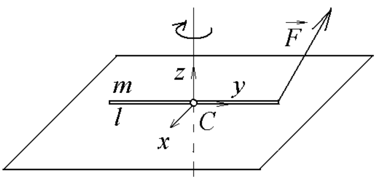
6-5. Тонкая однородная пластина в виде квадрата со стороной b может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс C. Момент инерции пластины относительно оси C равен I. К середине стороны квадрата приклеили маленький грузик массы m и отпустили без толчка. В начальный момент сторона квадрата была вертикальна. Найдите угловое ускорение получившейся фигуры в начальный момент времени. $m = 1$ кг, $I = 1$ кг$\cdot$м^2, $b = 1$ м, $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 4 рад/с^2



6-6. Тонкая однородная прямоугольная пластина со сторонами b и a может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс C. Момент инерции пластины относительно оси C равен I. К середине стороны пластины приклеили маленький грузик массы m и отпустили без толчка. В начальный момент сторона пластины была вертикальна. Найдите угловое ускорение получившейся фигуры в начальный момент времени.
$m = 1$ кг, $I = 1$ кг$\cdot$м^2, $b = 1$ м, $a = 2$ м, $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 5 рад/с^2



6-7. Тонкий однородный стержень длины l может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. К концу стержня приложена сила $F = i \cdot A + j \cdot B + k \cdot D$. Чему равна проекция момента силы относительно точки *C* на ось *z*.

$l = 1$ м, $A = 1$ Н, $B = 2$ Н, $D = 3$ Н. Ответ: –0,5 Н·м

6-8. Маленький шарик поместили в точку с радиусом-вектором $r = i \cdot A + j \cdot B + k \cdot C$. В некоторый момент на шарик подействовали силой а) $F = i \cdot D$; б) $F = j \cdot D$; в) $F = k \cdot D$. Найти модуль момента силы относительно начала отсчета.
$A = 1$ м, $B = 2$ м, $C = 3$ м, $D = 4$ Н, .

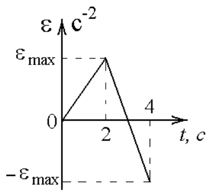
Ответы: а) 14,42 Н·м; б) 12,65 Н·м; в) 8,94 Н·м

6-9. Маленький шарик поместили в точку с радиусом-вектором $r = i \cdot A + j \cdot B + k \cdot C$. В некоторый момент на шарик подействовали силой $F = i \cdot D + j \cdot E + k \cdot G$. Найти проекцию момента силы относительно начала координат а) на ось x; б) на ось y; в) на ось z
A = 1 м, B = 2 м, C = 3 м, D = 3 Н, E = 4 Н, G = 5 Н.

Ответы: а) –2 Н·м; б) 4 Н·м; в) –2 Н·м

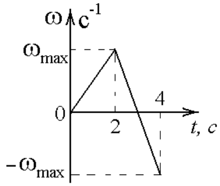
6-10. Некоторое тело вращается вокруг закрепленной оси без трения. Его момент импульса относительно оси вращения зависит от времени по закону а) $L = A\dfrac{t}{\tau}$; б) $L = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2$; в) $L = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$; г) $L = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$; д) $L = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^5$. Через время t =1 с тело имеет угловое ускорение ε. Найти момент инерции тела, если τ =1 с. $A = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$, ε = 1 рад/с^2.

Ответы: а) 1 кг·м^2; б) 2 кг·кг^2; в) 3 кг·м^2; г) 4 кг·м^2; д) 5 кг·м^2



6-11. Тело вращается вокруг закрепленной оси с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I. Найти момент импульса тела в момент времени $t = 4$ с, если $\varepsilon_{max} = 1\ \text{с}^{-2}$. $I = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$

Ответ: 1 Н·м·с



6-12. Тело вращается вокруг закрепленной оси с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I. Найти
а) отношение модулей моментов сил;
б) на сколько отличаются модули моментов сил, действующих на тело в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с. $\omega_{max} = 1\ \text{с}^{-1}$, $I = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$

Ответы: а) 0,5; б) 0,5 $\text{Н}\cdot\text{м}$

7. Момент инерции. Теорема Штейнера. Центр масс.

Момент инерции системы частиц относительно заданной оси $\boxed{I = \sum m_i \cdot r_i^2}$, где m_i – масса частицы, r_i – расстояние от частицы до заданной оси.

Если масса тела непрерывно распределена в пространстве то $\boxed{I = \int dm \cdot r^2}$, где dm – масса элементарного объема тела, r – расстояние от этого объема до заданной оси.

Теорема Штейнера.

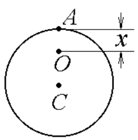
Момент инерции I_O твердго тела относительно произвольной оси O равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно оси C, **параллельной оси *O* и проходящей через центр масс тела**, и произведения массы этого тела m и квадрата расстояния d между осями O и C.

$$\boxed{I_O = I_C + md^2}$$

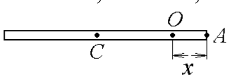
Координата центра масс $\boxed{x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}}$, где x_i – координата материальной точки с массой m_i или $\boxed{x_C = \dfrac{\int x dm}{\int dm}}$ (случай непрерывного распределения).

Таблица моментов инерции некоторых фигур.

$I = mR^2$ – кольца относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости.	$I = \dfrac{2}{5} mR^2$ – однородного шара относительно оси, проходящей через центр шара.
$I = \dfrac{1}{2} mR^2$ – диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости.	$I = \dfrac{1}{12} ml^2$ – стержня относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему.

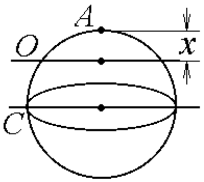


7-1. Перпендикулярно плоскости однородного диска массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс диска C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от точки A на краю диска. Точки O, C и A лежат на диаметре диска. Во сколько раз больше момент инерции диска I_O, чем I_C? m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м. Ответ: 1,72 раз



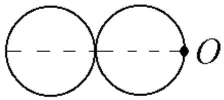
7-2. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы m и длиной l проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс стержня C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от его конца A. Во сколько раз больше момент инерции стержня I_O, чем I_C? m = 1 кг, l = 1 м, x = 0,4 м

Ответ: 1,12 раз



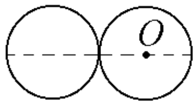
7-3. Через однородный шар массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс шара C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от края шара A. Точки A, O и C лежат на диаметре шара. Во сколько раз больше момент инерции шара I_O, чем I_C?
m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м.

Ответ: 1,9 раз



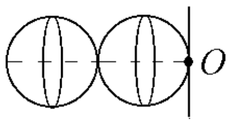
7-4. Два одинаковых диска массой m и радиусом R каждый положили на плоскость и приварили друг к другу. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости дисков через точку O (см. рис.). R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 11 кг·м^2



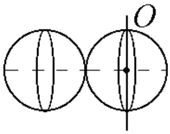
7-5. Два одинаковых диска массой m и радиусом R каждый положили на плоскость и приварили друг к другу. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости дисков через центр масс одного из дисков O. R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 5 кг·м^2



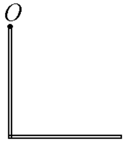
7-6. Два одинаковых шара массой m и радиусом R каждый приварили друг к другу. Касательная к шару ось O проходит перпендикулярно линии, проходящей через центры шаров. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 10,8 кг·м^2



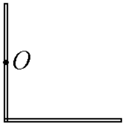
7-7. Два одинаковых шара массой m и радиусом R каждый приварили друг к другу. Ось O проходит по диаметру шара перпендикулярно линии, соединяющей центры шаров. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O.
R = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 4,8 кг·м^2



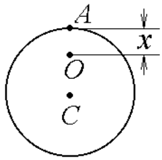
7-8. Два одинаковых однородных тонких стержня массой m и длиной l каждый приварили концами перпендикулярно друг к другу. Через конец одного из стержней проходит ось O, перпендикулярная плоскости стержней. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. l = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 1,677 кг·м^2



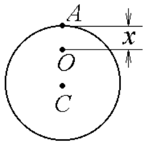
7-9. Два одинаковых однородных тонких стержня массой m и длиной l каждый приварили концами перпендикулярно друг к другу. Через центр одного из стержней проходит ось O, перпендикулярная плоскости стержней. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. l = 1 м, m = 1 кг.

Ответ: 0,667 кг·м^2



7-10. Перпендикулярно плоскости однородного диска массы m= 1 кг и радиуса R = 1 м проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс диска C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x = 0,4 м от точки A на краю диска. Точки O, C и A лежат на диаметре диска. На сколько отличаются моменты инерции диска относительно этих осей?

Ответы: а) 0,36 кг·м^2

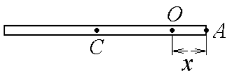


7-11. Перпендикулярно плоскости однородного диска массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через точку A на краю диска, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от точки A. Точки O и A лежат на диаметре диска. m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м.

а) Во сколько раз отличаются моменты инерции диска I_A и I_O?

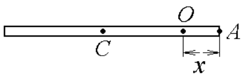
б) На сколько отличаются моменты инерции диска относительно этих осей?

Ответы: а) 1,74 раз; б) 0,64 кг·м^2



7-12. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы m = 1 кг и длиной l = 1 м проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс стержня C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x = 0,4 м от его конца A. На сколько отличаются моменты инерции стержня относительно этих осей?

Ответ: 0,01 кг·м^2

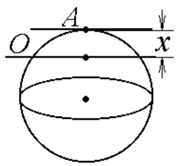


7-13. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы m = 1 кг и длиной l = 1 м проходят две параллельные оси. Одна проходит через конец стержня A, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x = 0,4 м от точки A.

а) Во сколько раз отличаются моменты инерции стержня I_A и I_O?

б) На сколько отличаются моменты инерции стержня относительно этих осей?

Ответы: а) 3,57 раз; б) 0,24 кг·м^2

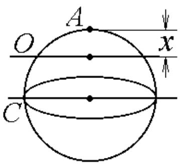


7-14. Через однородный шар массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна касается шара в точке A, а другая проходит через точку O, лежащую на расстоянии x от точки A. Точки A и O лежат на одном диаметре шара.
m = 1 кг, R = 1 м, x = 0,4 м.

а) Во сколько раз отличаются моменты инерции шара I_A и I_O?

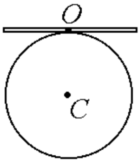
б) На сколько отличаются моменты инерции шара относительно этих осей?

Ответы: а) 1,84 кг·м^2; б) 0,64 кг·м^2



7-15. Через однородный шар массы m и радиуса R проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс шара C, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x от края шара A. Точки A, O и C лежат на диаметре шара. На сколько отличаются моменты инерции шара относительно этих осей? $m = 1$ кг, $R = 1$ м, $x = 0{,}4$ м.

Ответ: 0,36 кг·м^2

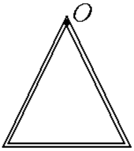


7-16. На одну плоскость положили тонкий однородный стержень массы m и длины $l = 2R$ и диск радиуса R и такой же массы m. Центр стержня O приварили к диску. Перпендикулярно плоскости получившейся детали проходит ось

а) через точку O б) через центр диска C

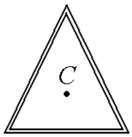
Найти момент инерции детали относительно этих осей.

$m = 1$ кг, $R = 1$ м. Ответы: а) 1,83 кг·м^2; б) 1,83 кг·м^2



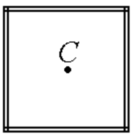
7-17. Деталь в виде равностороннего треугольника сварили из трех одинаковых однородных тонких стержней массы m и длины l каждый. Ось O проходит перпендикулярно плоскости детали через вершину треугольника. Найти момент инерции детали относительно этой оси. $m = 1$ кг, $l = 1$ м.

Ответ: 1,5 кг·м^2



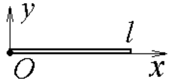
7-18. Деталь в виде равностороннего треугольника сварили из трех одинаковых однородных тонких стержней массы m и длины l каждый. Ось C проходит перпендикулярно плоскости детали через центр масс треугольника. Найти момент инерции детали относительно этой оси. $m = 1$ кг, $l = 1$ м.

Ответ: 0,5 кг·м^2



7-19. Деталь в виде квадрата сварили из четырех одинаковых однородных тонких стержней массы m и длины l каждый. Ось C проходит перпендикулярно плоскости детали через центр масс квадрата. Найти момент инерции детали относительно этой оси. $m = 1$ кг, $l = 1$ м.

Ответ: 1,33 кг·м^2



7-20. Тонкий стержень постоянного сечения длиной $l = 1$ м лежит на оси x и его левый конец совпадает с началом координат O. Линейная плотность вещества, из которого сделан стержень, зависит от координаты x по закону ($\rho_0 = 1$ кг/м)

а) $\rho = \rho_0 \dfrac{x}{l}$; б) . $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{x}{l}\right)^2$; в) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{x}{l}\right)^3$; г) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{x}{l}\right)^4$; д) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{x}{l}\right)^5$

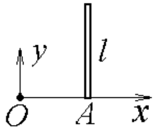
А) Рассчитать момент инерции стержня относительно оси y.

Б) Найти координату центра масс стержня.

Ответы:

А) а) 0,25 кг·м^2; б) 0,2 кг·м^2; в) 0,167 кг·м^2; г) 0,143 кг·м^2; д) 0,125 кг·м^2

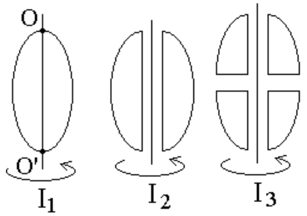
Б) а) 0,667 м; б) 0,75 м; в) 0,80 м; г) 0,833 м; д) 0,857 м



7-21. Тонкий стержень постоянного сечения длиной l расположен параллельно оси y. Нижний конец стержня лежит на оси x на расстоянии l от начала координат. Линейная плотность вещества, из которого сделан стержень, зависит от координаты y по закону

а) $\rho = \rho_0 \dfrac{y}{l}$; б) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{y}{l}\right)^2$; в) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{y}{l}\right)^3$; г) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{y}{l}\right)^4$; д) $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{y}{l}\right)^5$. Рассчитать момент инерции стержня относительно оси y. $\rho_0 = 1$ кг/м, l = 1 м.

Ответы: а) 0,5 кг·м^2; б) 0,333 кг·м^2; в) 0,25 кг·м^2; г) 0,2 кг·м^2; д) 0,167 кг·м^2



7-22э. Из жести вырезали три одинаковые детали в виде эллипса. Две детали разрезали: одну - пополам вдоль оси симметрии, а вторую - на четыре одинаковые части. Затем все части отодвинули друг от друга на одинаковое расстояние и расставили симметрично относительно оси OO' (см. рис.). Выберите правильное соотношение между моментами инерции этих деталей относительно оси OO'.

а) $I_1 < I_2 = I_3$ б) $I_1 < I_2 < I_3$ в) $I_1 = I_2 < I_3$ г) $I_1 > I_2 > I_3$

8. Кинетическая энергия. Мощность. Работа.

Кинетическая энергия катящегося тела $E_k = \dfrac{mv_C^2}{2} + \dfrac{I_z\omega^2}{2}$, где v_C – скорость центра масс тела, I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс, ω – угловая скорость вращения.

Мощность $N = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot v$, где v – скорость перемещения точки приложения силы.

Работа силы $A = \int\limits_1^2 F \cdot dr = \int\limits_1^2 F \cdot dl \cdot \cos\alpha = \int\limits_{t_1}^{t_2} N dt$, где dr – перемещение, α – угол между вектором силы и вектором перемещения, $dl = |dr|$.

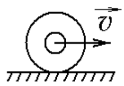
Работа момента силы $A = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$.

8-1. Шарик массы m и радиуса R катится по горизонтальной поверхности со скоростью v без проскальзывания. Найдите кинетическую энергию этого шарика. m = 1 кг, R = 1 м, $v = 1$ м/с.

Ответ: 0,7 Дж

8-2. Диск массы m и радиуса R катится по горизонтальной поверхности со скоростью υ без проскальзывания. Найдите кинетическую энергию этого диска. m = 1 кг, R = 1 м, $\upsilon = 1$ м/с.

Ответ: 0,75 Дж



8-3. Катушка без ниток имеющая массу m, внешний радиус R и момент инерции I, катится по горизонтальной поверхности со скоростью υ без проскальзывания. Найдите кинетическую энергию этой катушки. m = 1 кг, R = 1 м, $I = 1$ кг$\cdot$м^2, $\upsilon = 1$ м/с.

Ответ: 1 Дж

8-4. Небольшое тело начало движение из начала координат вдоль горизонтальной оси x под действием силы, направленной под углом $\alpha = 30°$ к оси x. Модуль силы меняется в зависимости от координаты x по закону

а) $F = A\dfrac{x}{b}$; б) $F = A\left(\dfrac{x}{b}\right)^2$; в) $F = A\left(\dfrac{x}{b}\right)^3$; г) $F = A\left(\dfrac{x}{b}\right)^4$; д) $F = A\left(\dfrac{x}{b}\right)^5$. Найти работу этой силы на участке пути от $0 < x < b$. A = 1 Н, b = 1 м.

Ответы: а) 0,433 Дж; б) 0,289 Дж; в) 0,217 Дж; г) 0,173 Дж; д) 0,144 Дж

8-5. Небольшое тело начало движение из начала координат вдоль горизонтальной оси x под действием силы, направленной под углом α к оси x. Модуль силы F не меняется, но угол α зависит от координаты x по закону $\alpha = A\dfrac{\pi x}{b}$.

Найти работу этой силы на участке пути от $0 < x < b$, если b = 1 м, F = 1 Н, а) A = 1 Н; б) $A = \dfrac{1}{2}$ Н; в) $A = \dfrac{1}{3}$ Н; г) $A = \dfrac{1}{6}$ Н; д) $A = \dfrac{1}{4}$ Н,

Ответы: а) 0 Дж; б) 0,637 Дж; в) 0,827 Дж; г) 0,955 Дж; д) 0,9 Дж

8-6. Найти работу, произведенную машиной за промежуток времени $0 < t < 1$ с, если мощность машины зависит от времени по закону

а) $N = A\dfrac{t}{\tau}$; б) $N = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2$; в) $N = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^3$; г) $N = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$; д) $N = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^5$

$\tau = 1$ с, A = 1 Вт.

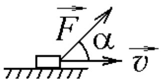
Ответы: а) 0,5 Дж; б) 0,333 Дж; в) 0,25 Дж; г) 0,2 Дж; д) 0,167 Дж

8-7. Массивный диск может вращаться вокруг закрепленной оси без трения. Найдите работу момента силы при повороте диска на угол φ_0, если момент сил, действующий на диск, зависит от угла поворота φ по закону

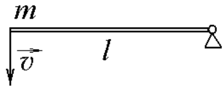
а) $M = A\dfrac{\varphi}{\varphi_0}$; б) $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2$; в) $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^3$; г) $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^4$;

$A = 1$ Н$\cdot$м, $\varphi_0 = 1$ рад.

Ответы: а) 0,5 Дж; б) 0,333 Дж; в) 0,25 Дж; г) 0,2 Дж



8-8. Тело движется вдоль горизонтальной оси x под действием силы F, направленной под углом α к оси x. В некоторый момент тело достигает скорости v. Найдите мощность силы в этот момент времени. $F = 1$ Н, $v = 1$ м/с, $\alpha = 30°$. Ответ: 0,866 Вт

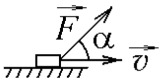


8-9. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. Стержень привели в горизонтальное положение и толкнули так, что незакрепленный конец стержня приобрел скорость v. Найдите кинетическую энергию стержня в первый момент времени. $m = 1$ кг, $l = 1$ м, $v = 1$ м/с. Ответ: 0,167 Дж

8-10. Шарик массы m и радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω. Найдите кинетическую энергию этого шарика. $m = 1$ кг, $R = 1$ м, $\omega = 1$ рад/с.

Ответ: 0,7 Дж

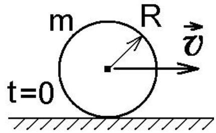
8-11. Диск массы m и радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω. Найдите кинетическую энергию этого диска. $m = 1$ кг, $R = 1$ м, $\omega = 1$ рад/с. Ответ: 0,75 Дж



8-12. Тело движется вдоль горизонтальной оси x под действием силы F, направленной под углом α к оси x. В некоторый момент тело достигает скорости v, а мощность силы равна N. Найдите а) косинус угла α; б) синус угла α.

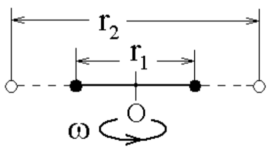
$F = 1$ Н, $v = 1$ м/с, $N = 0,5$ Вт. Ответы: а) 0,5; б) 0,866

8-13э. В начальный момент времени t = 0 тонкий обруч с массой $m = 0,1$ кг и с радиусом $R = 0,5$ м не вращался, а поступательно скользил по горизонтальной поверхности с кинетической энергией 800 Дж. Под действием силы трения он начал катиться без проскальзывания с кинетической энергией поступательного движения 200 Дж. Сила трения совершила работу:



а) 300 Дж б) 600 Дж в) 500 Дж г) 400 Дж

8-14э. Два маленьких массивных шарика закреплены на невесомом длинном стержне на расстоянии r_1 друг от друга. Стержень может вращаться без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей посередине между шариками. Стержень раскрутили из состояния покоя до угловой скорости ω, при этом была совершена работа A_1. Шарики раздвинули симметрично на расстояние $r_2 = 2r_1$ и раскрутили до той же угловой скорости. Какая работа при этом была совершена?



1) $A_2 = \frac{1}{4}A_1$ 2) $A_2 = 2A_1$ 3) $A_2 = \frac{1}{2}A_1$ 4) $A_2 = 4A_1$

9. Закон сохранения импульса и момента импульса.

При взаимодействии частиц системы между собой **полный вектор импульса** системы остается постоянным в случаях, когда

а) $\left(\sum F_i\right)_{\text{внеш}} = 0$, б) $\left|\left(\sum F_i\right)_{\text{внеш}}\right| < \text{const}$ и время взаимодействия очень мало.

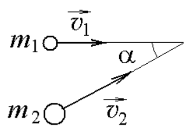
В этих случаях $\left(\sum p_i\right)_{\text{до}} = \left(\sum p_j\right)_{\text{после}}$, где $\left(\sum p_i\right)_{\text{до}}$ – **векторная сумма** импульсов частиц, которые существовали до взаимодействия, $\left(\sum p_j\right)_{\text{после}}$ – **векторная сумма** импульсов всех частиц, которые будут существовать после взаимодействия. Если $\left(\sum F_{xi}\right)_{\text{внеш}} = 0$, то сохраняется только **проекция полного импульса** системы на ось *x*, $\left(\sum p_{xi}\right)_{\text{до}} = \left(\sum p_{xj}\right)_{\text{после}}$.

При взаимодействии частиц системы между собой **полный вектор момента импульса** системы остается постоянным в случаях, когда

а) $\left(\sum M_i\right)_{\text{внеш}} = 0$, б) $\left|\left(\sum M_i\right)_{\text{внеш}}\right| < \text{const}$ и время взаимодействия очень мало.

В этих случаях $\left(\sum L_i\right)_{\text{до}} = \left(\sum L_j\right)_{\text{после}}$ где $\left(\sum L_i\right)_{\text{до}}$ – **векторная сумма моментов импульсов** частиц, которые существовали до взаимодействия, $\left(\sum L_j\right)_{\text{после}}$ – **векторная сумма моментов импульсов** всех частиц, которые будут существовать после взаимодействия. Если $\left(\sum M_{zi}\right)_{\text{внеш}} = 0$, то сохраняется **только проекция момента импульса** системы на ось *z* $\left(\sum L_{zi}\right)_{\text{до}} = \left(\sum L_{zj}\right)_{\text{после}}$ (часто относительно закрепленной оси вращения).

Момент импульса частицы $\boxed{L = [r, p]}$, где r – радиус-вектор частицы, $p = mv$ – импульс частицы. $\boxed{|L| = r \cdot p \cdot \sin\alpha}$, где α – угол между r и p. Для твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси *z* $\boxed{L_z = I_z \cdot \omega_z}$, где I_z – момент инерции тела относительно оси *z*, ω_z – угловая скорость.



9-1. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью v_1. Под углом α к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью v_2 и сталкивается с первым. Шарики слипаются и движутся под углом β к первоначальному направлению движения

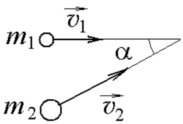
А) первого шарика; Б) второго шарика.

Найдите $\text{tg}\beta$. $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 2$ м/с,

а) α = 30°; б) α = 45°; в) α = 60°; г) 90°.

А) Ответы: а) 0,448; б) 0,739; в) 1,155; г) 4

Б) Ответы: а) 0,103; б) 0,15; в) 0,192; г) 0,25



9-2. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью v_1 . Под углом α к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью v_2 и сталкивается с первым. Шарики слипаются и движутся под со скоростью v_3 . Найдите после удара

А) модуль скорости v_3 ; Б) модуль импульса шариков.

$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 2$ м/с, а) α = 30°, б) α = 45°, в) α = 60°.

А) Ответы: а) 1,63 м/с; б) 1,59 м/с; в) 1,53 м/с

Б) Ответы: а) 4,89 кг·м/с; б) 4,76 кг·м/с; в) 4,58 кг·м/с

9-3. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью v_1 . Перпендикулярно к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью v_2 и сталкивается с первым. Шарики слипаются и далее движутся вместе. Найдите после удара

а) модуль импульса шариков; б) модуль скорости шариков.

$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.

Ответ: а) 4,123 кг·м/с; б) 1,374 м/с

9-4. Маленький пластилиновый шарик массы m_1 движется горизонтально со скоростью v_1 . Перпендикулярно к направлению его движения летит второй шарик массы m_2 со скоростью v_2 и сталкивается с первым. Шарики слипаются и далее движутся вместе под углом β к первоначальному направлению движения А) первого шарика; Б) второго шарика. Найдите $\cos\beta$ и $\sin\beta$.

$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 2$ м/с.

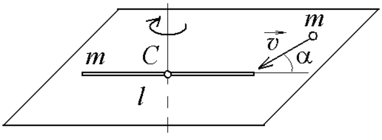
А) Ответы: $\cos\beta = 0{,}243$; $\sin\beta = 0{,}97$

Б) Ответы: $\cos\beta = 0{,}97$; $\sin\beta = 0{,}243$

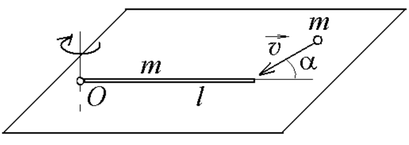
9-5. На горизонтальной плоскости лежит тонкий однородный стержень массы m =1 кг и длины l, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через А) центр масс стержня C; Б) конец стержня O. Под углом α =30° к стержню в той же плоскости движется маленький пластилиновый шарик такой же массы m со скоростью v = 1 м/с. Шарик прилипает к концу стержня, и система приобретает угловую скорость вращения ω. Найти

а) угловую скорость вращения системы после удара, если l = 1 м;

б) длину стержня, если , ω = 1 рад/с



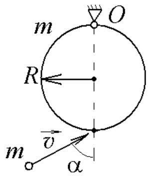
А)

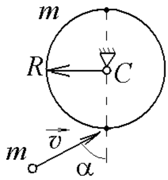


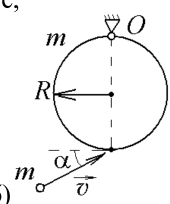
Б)

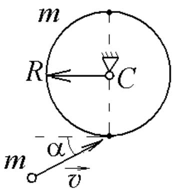
Ответы: Аа) 0,75 рад/с; Ба) : 0,375 рад/с; Аб) 0,75 м; Бб) 0,375 м

9-6. Тонкий однородный диск массы m = 1 кг и радиуса R может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей
А) через его край O; Б) через его центр C. Под углом α =30° а) к вертикали;
б) к горизонтали в плоскости вращения диска движется маленький пластилиновый шарик такой же массы m со скоростью v = 1 м/с. Шарик прилипает к нижней точке неподвижно висящего диска, и система приобретает угловую скорость вращения ω.. Найти
1) угловую скорость вращения системы после удара, если R = 1 м;
2) Найти радиус диска, если ω = 1 рад/с,

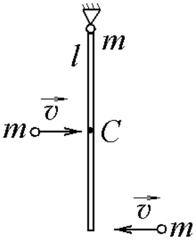
Аа) 

Ба) 

Аб) 

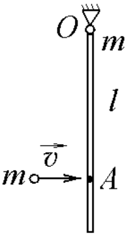
Бб) 

Ответы: 1) Аа) 0,182 рад/с; Ба) 0,333 рад/с; Аб) 0,315 рад/с; Бб) 0,577 рад/с.
Ответы: 2) Аа) 0,182 м; Ба) 0,333 м; Аб) 0,315 м; Бб) 0,577 м.



9-7. Тонкий однородный стержень массы m = 1 кг и длины l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. С разных сторон на стержень горизонтально в той же плоскости налетают два одинаковых пластилиновых шарика той же массы m с одинаковыми скоростями v = 1 м/с. Первый шарик застревает в центре стержня, второй – в нижнем конце, и система приобретает угловую скорость ω. Найти
а) угловую скорость вращения системы после удара, если l = 1 м;
б) Найти длину стержня, если ω = 1 рад/с.

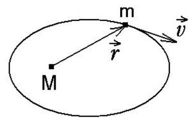
Ответы: а) 0,316 рад/с; б) 0,316 м



9-8. Тонкий однородный стержень массы m =1 кг и длины l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец O. Горизонтально в той же плоскости на стержень налетает пластилиновый шарик той же массы m со скоростью v = 1 м/с. Шарик застревает в точке A стержня на расстоянии $x = \dfrac{3}{4}l$ от точки O, и система приобретает угловую скорость ω. Найти
а) угловую скорость вращения системы после удара, если l = 1 м;
б) Найти длину стержня, если ω = 1 рад/с.

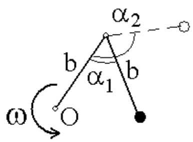
Ответы: а) 0,837 рад/с; б) 0,837 м.

9-9э. Планета массой m движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится звезда массы M. r – радиус-вектор планеты (см.рисунок). Выберите правильное утверждение:



а) момент импульса планеты относительно центра звезды меняется и максимален при наибольшем ее удалении r от звезды
б) момент силы тяготения, действующей на планету (относительно центра звезды), изменяется, но направлен перпендикулярно плоскости орбиты
в) величина момента импульса планеты относительно центра звезды в любой момент времени определяется выражением $L = m v r$
г) момент импульса планеты относительно центра звезды не изменяется

9-10э. Два невесомых стержня длины b соединены под углом $\alpha_1 = 60°$ и вращаются без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси O с угловой скоростью ω. На конце одного из стержней прикреплен очень маленький массивный шарик. В некоторый момент угол между стержнями самопроизвольно увеличился до $\alpha_2 = 120°$. С какой угловой скоростью стала вращаться такая система?



1) 3ω 2) $\sqrt{3}\omega$ 3) $\dfrac{\omega}{3}$ 4) $\dfrac{\omega}{\sqrt{3}}$ 5) ω

10. Закон сохранения полной механической энергии.

Полная механическая энергия E складывается из двух составляющих: $E = E_k + E_p$, где E_k – кинетическая энергия, E_p – потенциальная энергия.

Если <u>работа всех неконсервативных</u> сил (и внешних, и внутренних) в системе частиц в интервале времени от t_1 до t_2 равна нулю, то **полная механическая энергия системы сохраняется** в этом интервале времени, т.е.

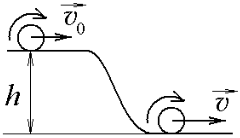
$$\underbrace{E_{k1} + E_{p1}}_{\text{первый момент времени}} = \underbrace{E_{k2} + E_{p2}}_{\text{второй момент времени}} .$$

В случае только поступательного движения $\boxed{E_k = \dfrac{mv^2}{2}}$, где m – масса системы, v – скорость центра масс. В случае только вращательного движения $\boxed{E_k = \dfrac{I\omega^2}{2}}$, где ω – угловая скорость, I – момент инерции тела относительно оси вращения. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия $\boxed{E_p = mgh}$, где g – ускорение свободного падения однородного гравитационного поля, m – масса системы частиц, h – высота центра масс системы над уровнем, потенциал поля на котором принимается за ноль (выбирается произвольным образом).

Если в некотором интервале времени над системой частиц была **совершена работа** со стороны **неконсервативных сил** то полная энергия системы **изменяется**, причем

$$A_{\text{неконс}} = \Delta E = \underbrace{\left(E_{k2} + E_{p2}\right)}_{\substack{\text{второй момент} \\ \text{времени}}} - \underbrace{\left(E_{k1} + E_{p1}\right)}_{\substack{\text{первый момент} \\ \text{времени}}} .$$

В задачах в роли неконсервативных сил обычно выступают силы трения скольжения, сопротивления воздуха, тяги. **Сила трения покоя** работу не совершает.



10-1. Тонкий однородный диск массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с горки высоты h, совершая плоское движение. Начальная скорость центра масс диска равна v_0. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало, m = 1 кг, R = 1 м, v_0 = 1 м/с, h = 1 м, g = 10 м/с^2. После того, как он скатится с горки, найдите

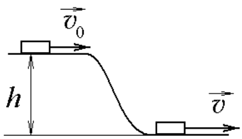
а) скорость центра масс диска
б) кинетическую энергию диска
в) Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия диска
г) На сколько увеличится кинетическая энергия диска
д) Найдите угловую скорость вращения диска

Ответы: а) 3,79 м/с; б) 10,75 Дж; в) 14,33 раз; г) 10 Дж; д) 3,79 рад/с

10-2. Однородный шар массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с горки высоты h. Начальная скорость центра масс шара равна v_0. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. m = 1 кг, R = 1 м, v_0 = 1 м/с, h = 1 м, g = 10 м/с^2. После того, как он скатится с горки, найдите

а) скорость центра масс шара
б) кинетическую энергию шара
в) Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия шара
г) На сколько увеличится кинетическая энергия шара
д) Найдите угловую скорость вращения шара

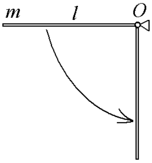
Ответы: а) 3,91 м/с; б) 10,7 Дж; в) 15,29 раз; г) 10 Дж; д) 3,91 рад/с



10-3. Резиновая шайба массы m = 1 кг, двигаясь со скоростью v_0 = 1 м/с, соскальзывает с горки высоты h = 1 м и приобретает скорость v у подножия горки. Во время движения над шайбой была совершена работа сил трения $A_{\text{тр}}$. (g = 10 м/с^2). Найдите

а) скорость шайбы v, если $A_{\text{тр}}$ = 1 Дж
б) кинетическую энергию шайбы у подножия горки, если $A_{\text{тр}}$ = 1 Дж
в) во сколько раз изменилась кинетическая энергия шайбы, если $A_{\text{тр}}$ = 1 Дж
г) на сколько изменилась кинетическая энергия шайбы, если $A_{\text{тр}}$ = 1 Дж
д) модуль работы сил трения $A_{\text{тр}}$, если v = 3 м/с

Ответы: а) 4,36 м/с; б) 9,5 Дж; в) 19 раз; г) 9 Дж; д) 6 Дж



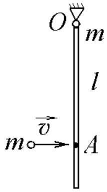
10-4. Тонкий однородный стержень массы m и длины l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня O. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без толчка. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

$m = 1$ кг, $l = 1$ м, $g = 10$ м/с^2. В момент прохождения им положения равновесия найдите

а) кинетическую энергию стержня. б) скорость нижнего конца стержня

в) угловую скорость стержня г) скорость центра масс стержня

Ответы: а) 5 Дж; б) 5,48 м/с; в) 5,48 рад/с; г) 2,74 м/с



10-5. Тонкий однородный стальной стержень массы $m = 1$ кг и длины $l = 1$ м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец O. Горизонтально в той же плоскости на стержень налетает стальной шарик той же массы m со скоростью $v = 1$ м/с и отскакивает со скоростью u после абсолютно упругого удара. Стержень начинает вращаться с угловой скоростью ω. Найти

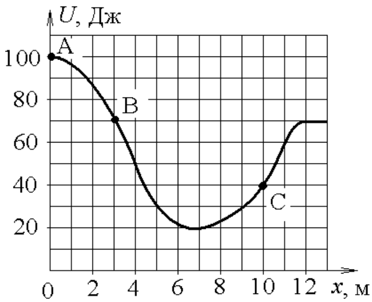
а) скорость шарика u, если $\omega = 1$ рад/с.

б) угловую скорость стержня ω, если $u = 0{,}5$ м/с.

в) Во сколько раз уменьшится скорость шарика, если $\omega = 1$ рад/с.

г) На сколько уменьшится скорость шарика, если $\omega = 1$ рад/с.

Ответы: а) 0,816 м/с; б) 1,5 рад/с; в) 1,22 раз; г) 0,184 м/с



10-6э. Небольшая шайба начинает движение без начальной скорости по гладкой ледяной горке из точки А. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии шайбы от координаты x изображена на графике $U(x)$. Кинетическая энергия шайбы в точке С

а) в 2 раза больше, чем в точке В

б) в 2 раза меньше, чем в точке В

в) в 1,75 раза больше, чем в точке В

г)в 1,75 раза меньше, чем в точке В

10-7э. Тело массы m = 10 кг начинает движение со скоростью $v_0 = 4$ м/с по гладкой ледяной горке из точки А. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии этого тела от координаты x изображена на графике $U(x)$. В точке В тело, ударившись, прилипает к стене.

В результате абсолютно неупругого удара в точке В выделилось ... теплоты

а) 140 Дж б) 160 Дж в) 20 Дж г) 150 Дж