

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.Г. Дрючин

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.  
ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА**

*Навчальний посібник*

Алчевськ  
2009

УДК 621.3

ББК 31.2

Д 78

**Дрючин Віктор Гаврилович** – канд. техн. наук, доц., кафедри теоретичної і загальної електротехніки Донбаського державного технічного університету

**Рецензенти:**

Ю.Е. Паеранд – докт. техн. наук, професор кафедри «Електронних систем» Донбаського державного технічного університету (г. Алчевськ)

Ю.С. Петергеря – докт. техн. наук, професор кафедри «Електроніки» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»

*Рекомендовано ученым советом ДонГТУ  
(Протокол № 4 от 24.04.2009)*

**Дрючин В.Г.**

Д 78 Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола: Навч. посіб. / В.Г. Дрючин. – Алчевськ: Донату, 2009. – 212 с.

Навчальний посібник містить у собі розділи першої та другої частини курсу «Теоретичні основи електротехніки». У ньому викладені розділи теорії лінійних електричних кіл за наступною структурою: робоча програма, загальні положення та співвідношення, типові приклади, контрольні завдання. Велика увага приділена методичним підходам вивчення розділів, що викладаються, методиці розрахунку типових завдань. Наведено рішення конкретних завдань із розрахунку лінійних електричних кіл різними методами.

Для студентів вивчаючих курси: «Теоретичні основи електротехніки», «Теорія електричних кіл» заочної форми навчання.

Табл. 18

Іл. 99

Бібліогр. назв. 5

ISBN 978-966-310-225-2

УДК 621.3

ББК 31.2

**ISBN 978-966-310-225-2**

© А.Ф. Борзых, 2007

© ДонГТУ, 2007

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
<b>1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ</b>	
1.1 Робоча програма.....	8
1.2 Загальні положення.....	9
1.3 Основні співвідношення .....	12
1.4 Типові приклади Розрахунок лінійного електричного кола постійного струму.....	17
1.5 Контрольне завдання 1 .....	29
<b>2 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ</b>	
2.1 Робоча програма.....	32
2.2 Загальні положення.....	33
2.3 Основні співвідношення .....	36
2.4 Типові приклади. Розрахунок електричних кіл синусоїдального струму .....	48
2.5 Контрольне завдання 2 .....	59
<b>3. ТРИФАЗНІ ЛАНЦЮГИ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ</b>	
3.1 Робоча програма.....	62
3.2 Загальні положення.....	62
3.3 Основні співвідношення .....	65
3.4 Типові приклади.....	67
3.5 Контрольне завдання 3 .....	74
<b>4 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ, ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ</b>	
4.1 Робоча програма.....	78
4.2 Загальні положення.....	78
4.3 Основні співвідношення .....	79
4.4 Типові приклади. Розрахунок чотириполюсників, фільтрів.....	82
4.5 Контрольне завдання 4 .....	88
<b>5. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ</b>	
5.1 Робоча програма.....	92
5.2 Загальні положення.....	92
5.3 Основні співвідношення .....	93
5.4 Типові приклади Розрахунок електричних кіл несинусоїдального струму.....	98
5.5 Контрольне завдання 5 .....	106

<b>6 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ</b>	
6.1 Робоча програма.....	110
6.2 Загальні положення.....	111
6.3 Основні співвідношення .....	113
6.4 Типові приклади. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах .....	120
6.5 Контрольне завдання 6 .....	147
<b>7. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ</b>	
7.1 Робоча програма.....	150
7.2 Загальні положення.....	151
7.3 Основні співвідношення .....	151
7.4 Типові приклади. Розрахунок лінії з розподіленими параметрами .....	155
7.5 Контрольне завдання 7 .....	159
<b>8 НЕЛІНІЙНІ ЛАНЦЮГИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ</b>	
8.1 Робоча програма.....	162
8.2 Загальні положення.....	162
8.3 Основні співвідношення .....	163
8.4 Типові приклади. Розрахунок нелінійних ланцюгів постійного струму.....	165
8.5 Контрольне завдання 8 .....	171
<b>9. МАГНІТНІ ЛАНЦЮГИ З ПОСТІЙНИМИ В ЧАСІ МАГНІТНИМИ ПОТОКАМИ</b>	
9.1 Робоча програма.....	174
9.2 Загальні положення.....	174
9.3 Основні співвідношення .....	175
9.4 Типові приклади. Розрахунок магнітних ланцюгів постійного струму.....	178
9.5 Контрольне завдання 9 .....	185
<b>10. НЕЛІНІЙНІ ЛАНЦЮГИ ЗМІННОГО СТРУМУ</b>	
10.1 Робоча програма.....	188
10.2 Загальні положення.....	189
10.3 Основні співвідношення .....	191
10.4 Типові приклади. Розрахунок нелінійних електричних кіл змінного струму .....	194
10.5 Контрольне завдання 6.....	208
<b>ЛІТЕРАТУРА .....</b>	<b>212</b>

## ВСТУП

Курс «Теоретичні основи електротехніки» ТОЕ є фундаментальною базою для вивчення всіх електротехнічних дисциплін і вимагає міцних знань курсів вищої математики й фізики. Студент, що вивчив курс ТОЕ, повинен розуміти фізику електромагнітних явищ, що відбуваються в електротехнічних пристроях, уміти наділяти ці явища в математичну форму та складати моделі (схеми заміщення) пристроїв, уміти робити розрахунок еквівалентних схем заміщення цих пристроїв із застосуванням сучасних засобів обчислювальної техніки.

При вивченні курсу ТОЕ за заочною формою навчання основною формою занять є самостійна робота студента з урахуванням матеріалів установчої сесії. При цьому рекомендується наступна послідовність роботи: програма розділи - теорія - типові завдання - індивідуальні завдання. Відповідно з цим кожний розділ посібника починається переліком теоретичних питань робочої програми, які студент повинен вивчити по підручнику з урахуванням лекцій установчої сесії.

Після цього даються загальні положення до самостійної підготовки до питань даного розділу, а також основні співвідношення, використовувані в розглянутому розділі. Далі приводиться рішення типових задач по найбільш важливих питаннях розділу, що полегшує студентові перехід до практичного використання вивчених положень. Після цього дані умови контрольного завдання по даному розділі, і список літератури, що рекомендується при вивченні указаних розділів ТОЕ.

Дані контрольних завдань вибираються з відповідних таблиць у наступному порядку. Необхідно пронумерувати букви свого прізвища,

ім'я, по батькові. Кількість букв повинно відповідати кількості параметрів завдання в таблиці. По першій букві вибирається перший параметр, по другій - другий і т.д.

Пропонований навчальний посібник може бути використаний також і студентами денної форми навчання для самостійного вивчення основ теорії електричних кіл.

# 1

## ***ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ***

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок лінійного  
електричного кола постійного струму***

***Контрольне завдання 1***

# 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

## 1.1 Робоча програма

1. Поняття про електричне коло (ЕК), схеми заміщення, елементи ЕК і схем заміщення. Різновиди схем заміщення джерел енергії, умови їхньої еквівалентності. ЕК розгалужені, нерозгалужені. Основні топологічні поняття, використовувані при розрахунку ЕК.
2. Основні закони ЕК постійного струму. Закон Ома для ділянки ЕК (з активним елементом і без нього) і для нерозгалуженого ЕК. Перший закон Кірхгофа для вузла та для перетину ЕК. Другий закон Кірхгофа для контуру, що складається як зі струмопровідних, так і непровідних ділянок ЕК. Закон Джоуля - Ленца для ділянок з активним і пасивним елементами. Енергетичний баланс в ЕК, потенційна діаграма.
3. Перетворення структури ЕК. Еквівалентна заміна складних пасивних і активних двухполюсників простими. Перетворення пасивних трьохполюсників. Перенос джерел ЕРС і джерел струму з однієї частини ЕК в іншу.
4. Задачі аналізу та синтезу в ЕК, їхня постановка. Співвідношення між кількістю відомих і шуканих розрахункових величин. Розрахунок ЕК методом рівнянь Кірхгофа (МРК), і правило вибору незалежних контурів.
5. Метод контурних струмів (МКС) і умови його застосування. Особливість складання контурних рівнянь при наявності в ланцюзі гілок з відомими струмами.
6. Метод вузлових потенціалів (МВП) і умови його застосування. Особливість складання вузлових рівнянь при наявності в ЕК гілок, що містять тільки джерело ЕРС. Метод вузлової напруги (МВН).
7. Принцип і метод накладення (МН), умови його застосування. Вхідні й взаємні провідності (опорів) гілок. Властивість взаємності. Коефіцієнт передачі напруг, струмів.
8. Лінійні співвідношення в ЕК. Теорема компенсації, варіації.
9. Теорема про активний двухполюсник. Метод еквівалентного генератора (МЕГ) і умова його застосування.



10. Передача енергії від активного двухполюсника до пасивного. Умова передачі максимальної потужності. Економічна робота лінії електропередачі постійного струму.
11. Матрично-топологічні методи розрахунку ЕК і умови їхнього застосування, топологічні поняття й матриці, використовувані при цьому.
12. Запис розрахункових рівнянь у матричній формі при розрахунку ЕК різними методами (МУК, МКС, МВП).

## **1.2 Загальні положення**

Основна ціль роботи над даним розділом - навчитися практично застосовувати різні методи розрахунку лінійних ЕК постійного струму. Це важливо, тому що ці методи аналогічно застосовуються й при розрахунку лінійних ЕК синусоїдального струму.

При вивченні даного розділу варто усвідомити, що ЕК складається з гілок, які в загальному випадку містять пасивну й активну ділянки, по яких протікає той самий струм. Пасивна ділянка характеризується опором, а активна - величиною електрорушійної сили (ЕРС). Отже, роботу гілки можна охарактеризувати трьома величинами: струмом, опором, ЕРС. Використовуючи відомі співвідношення й закони Ома й Джоуля-Ленца, можна від цих основних розрахункових величин одержати похідні: провідність, напругу гілки, спадання напруги, потужність. Необхідно знати, що закони Ома, Джоуля-Ленца, Кірхгофа є базою методів розрахунку електричних кіл. При розрахунку ЕК частина розрахункових величин повинна бути відома, а інша частина виступає в якості шуканих, невідомих величин. При цьому кількість невідомих величин ( $n$ ) і заданих величин ( $z$ ) повинне знаходитися в певнім співвідношенні. Рекомендується розрахунки ЕК вести в наступній послідовності:

а) проаналізувати структуру ЕК, тобто визначити кількість вузлів ( $y$ ), кількість гілок ( $g$ ), кількість гілок, що містять тільки джерело струму ( $I$ ), кількість гілок, що містять тільки джерело ЕРС ( $E$ ), вибрати позитивний напрямок невідомих величин, що розраховуються, і їх позначити;

б) визначити, чи досить кількість заданих величин для однозначного рішення задачі;

в) визначити, чи можна спростити структуру ЕК і чи доцільно це робити;

г) вибрати раціональний розрахунковий метод і, скориставшись їм, визначити всі невідомі;

д) провести перевірку рішення задачі на відсутність помилок розрахунку.

1. Якщо за умовами розрахунку необхідно визначити всі невідомі величини, то залежно від структури ЕК раціональними методами являється:

а) МКС у випадку, якщо всі або більшість вузлів ЕК такі, що в них сходяться не більш ніж по три гілки;

б) МВП у випадку, якщо всі або більшість вузлів ЕК такі, що в них сходяться більш ніж по три гілки;

в) МВН у випадку, якщо в схемі ЕК є тільки два вузли;

г) метод накладення у випадку, якщо до складу ЕК входять не більш ніж два джерела енергії;

д) якщо до складу ЕК входить тільки одне джерело енергії, то можна скористатися рекомендаціями п.п.1 а, б, в або ж продовжувати спрощення схеми ЕК до такого стану, коли зручно буде застосувати закони Ома або Кірхгофа.

2. Перевірка результатів розрахунку на відсутність помилок виробляється в такий спосіб:

а) якщо при розрахунку використовувався МКС, то для перевірки можна використовувати контурні рівняння, складені за законом Кірхгофа. Перший закон Кірхгофа для цієї цілі використовувати не можна;

б) якщо при розрахунку використовувався МВП або МВН, то для перевірки можна використовувати вузлові рівняння, що становляться по першому закону Кірхгофа. Другий закон Кірхгофа для цієї цілі використовувати не можна;

в) універсальним способом перевірки при використанні будь-якого розрахункового методу є складання балансу потужностей.

3. Якщо ухвалено рішення розрахунок виконати методом контурних струмів, порядок дій рекомендується наступний;

а) визначити кількість і конфігурацію незалежних контурів (НК) ЕК;

б) ввести в кожний НК свій контурний струм, прийнявши для нього певне позначення та напрямок;

в) якщо постановка задачі така, що до складу якого-небудь НК входить гілка із відомим по величині та напрямку струмом, то контурний струм для цього НК варто прийняти за назвою, напрямку та величині, рівним заданого струму. При цьому гілку із таким відомим контурним струмом не слід більше включати до складу інших НК;

г) на підставі закону Кірхгофа скласти систему контурних рівнянь для обраних НК, представляючи напругу на будь-якій пасивній ділянці НК у вигляді алгебраїчної суми напруг на цій ділянці від всіх контурних струмів, що протікають по ньому;

д) вирішити отриману систему рівнянь щодо невідомих контурів, а також інших невідомих величин;

е) визначити шукані невідомі струми гілок ЕК, виразивши їх у вигляді алгебраїчної суми відповідних контурних струмів.

4. Якщо ухвалено рішення виконувати розрахунок методом вузлових потенціалів, порядок рекомендується наступний:

а) перетворити вихідну схему ЕК у випадку, якщо в її склад входять гілки з нульовим опором;

б) потенціал одного з вузлів перетвореної схеми (базового вузла (БВ)) прийняти рівним нулю;

в) для кожного з вузлів, що залишилися, ЕК розрахувати значення власної провідності та значення загальних провідностей гілок, що сходяться в розглянутому вузлі;

г) скласти систему рівнянь для визначення потенціалів вузлів і вирішити її;

д) виразити шукані струми гілок перетвореної п.2.2.1.4 а схеми через розраховані потенціали вузлів, використовуючи закон Ома;

е) розрахувати струми гілок з нульовим опором у вихідній не перетвореній схемі, використовуючи перший закон Кірхгофа.

Примітка \*. Якщо до складу ЕК входить тільки одна гілка із нульовим опором і джерелом ЕРС, то перетворення схеми по п.2.2.14 а можна не робити. У цьому випадку в якості БВ варто прийняти один з вузлів гілки із джерелом ЕРС і нульовим опором. Потенціал іншого вузла цієї гілки відразу визначають через величину ЕРС. Потенціали інших вузлів визначаються аналогічно п.2.2.14 в, г, д.

5. Якщо при розрахунку використовується МВН, порядок дій рекомендується наступний:

а) по відомій розрахунковій формулі визначити напругу між двома вузлами схеми ЕК;

б) визначити шукані невідомі величини кожної гілки, використовуючи закон Ома.

6. Якщо при розрахунку використовується МЕГ, порядок дій рекомендується наступний:

а) видалити з ЕК ділянку із шуканою невідомою величиною та визначити (будь-яким розрахунковим методом) напругу між двохполюсниками частини, що залишилася, ЕК, до яких раніше була приєднана вилучена ділянка. Це є так звана напруга холостого ходу еквівалентного генератора (ЕГ), чисельно рівне його ЕРС;

б) визначити вхідний опір частини, що залишилася, ЕК щодо вказаних полюсів, внутрішній опір ідеалізованих джерел струму й ЕРС. Цим буде визначений внутрішній опір ЕГ;

в) підключити вилучений з її ділянки з невідомою шуканою величиною до ЕГ і визначити її, використовуючи закон Ома.

### 1.3 Основні співвідношення

**1. Закон Ома.** Для гілки, що складається тільки з опорів і не містить ЕРС (пасивна гілка):

$$I = \frac{U_{mn}}{R_{mn}},$$

де  $U_{mn}$  – напруга (спадання напруги) на пасивному елементі;  $R_{mn}$  – опір пасивної гілки.

Для гілки, що містить ЕРС і опори:

$$I = \frac{U_{ab} + \sum E}{\sum R_{ab}},$$

де  $U_{ab}$  – напруга на кінцях гілки, описувана по вибраному позитивному напрямку струму;

$\sum E$  – алгебраїчна сума ЕРС, що перебуває в цій гілці;

$\sum R_{ab}$  – арифметична сума її опорів.

Зі знаком плюс беруть ті ЕРС, напрямки яких збігаються з обраним позитивним напрямком струму, і зі знаком мінус - ЕРС із протилежним напрямком.

**2. Закони Кірхгофа.** Для написання законів Кірхгофа необхідно задатися позитивними напрямками струмів кожної гілки.

Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Струми, спрямовані до вузла, умовно приймаються позитивними, а напрямку від нього негативними (або навпаки).

Другий закон Кірхгофа: алгебраїчна сума ЕРС замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг у ньому:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n I_k R_k .$$

Напрямок обходу контуру вибирається довільно. Позитивними  $E_k$  й  $I_k R_k$  приймаються в тому випадку, якщо ЕРС і спадання напруги збігаються з напрямком обходу контуру, у протилежному випадку – негативним.

**3. Метод контурних струмів.** Метод ґрунтується на тій властивості, що струм у будь-якій гілці ланцюга може бути представлений у вигляді алгебраїчної суми незалежних контурних струмів, що протікають по цій гілці. По кожному незалежному контурі електричного кола повинен замикатися контурний струм  $I_{kk}$  (подвійний індекс вказує номер контуру). Структура рівнянь, що становляться по методу контурних струмів, має вигляд:



$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 \mathbf{g}_{11} + \varphi_2 \mathbf{g}_{12} + \dots + \varphi_k \mathbf{g}_{1k} + \dots + \varphi_m \mathbf{g}_{1m} &= I_{11}; \\ \varphi_1 \mathbf{g}_{21} + \varphi_2 \mathbf{g}_{22} + \dots + \varphi_k \mathbf{g}_{2k} + \dots + \varphi_m \mathbf{g}_{2m} &= I_{22}; \\ \dots & \dots \\ \varphi_1 \mathbf{g}_{k1} + \varphi_2 \mathbf{g}_{k2} + \dots + \varphi_k \mathbf{g}_{kk} + \dots + \varphi_m \mathbf{g}_{km} &= I_{kk}; \\ \dots & \dots \\ \varphi_1 \mathbf{g}_{m1} + \varphi_2 \mathbf{g}_{m2} + \dots + \varphi_k \mathbf{g}_{mk} + \dots + \varphi_m \mathbf{g}_{mm} &= I_{mm}; \end{aligned} \right\}$$

де –  $\mathbf{g}_{kk}$  вузлова провідність – сума провідностей гілок, приєднаних до вузла k;

$\mathbf{g}_{km} = \mathbf{g}_{mk}$  – сума провідностей гілок, що з'єднують вузол k з вузлом m, узяті зі знаком мінус;

$I_{kk}$  – вузловий струм вузла k, дорівнює алгебраїчній сумі добутків ЕРС гілок, підключених до вузла k, на їхній провідності й алгебраїчній сумі струмів джерел струму, приєднаних до вузла k; при цьому зі знаком плюс беруться ті ЕРС і I, які спрямовані до вузла, у протилежному випадку зі знаком мінус.

**5. Метод двох вузлів.** Для схем, що мають два вузли (для визначення вузла a і b), вузлова напруга  $U_{ab}$ , визначається формулою

$$U_{ab} = \frac{\sum_n E_n \cdot q_n + \sum_n I_n}{\sum_m \mathbf{g}_m},$$

де  $\sum_n E_n \cdot \mathbf{g}_n$  – алгебраїчна сума добутків ЕРС (ЕРС вважається позитивною, якщо вони спрямовані до вузла a, і негативними якщо спрямовані від вузла a) на провідності цих гілок;

$\sum_n I_n$  – алгебраїчна сума струмів джерел струму (позитивні, якщо вони спрямовані до вузла a, і негативні, якщо спрямовані від вузла a);

$\sum_m \mathbf{g}_m$  – сума провідностей всіх гілок, включених між вузлами a і b.

**6. Метод перетворень.** Еквівалентний опір ланцюга, що складає з  $n$  послідовно з'єднаних опорів, дорівнює сумі цих опорів:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k .$$

При послідовному з'єднанні  $n$  опорів напруги на них розподіляються прямо пропорційно цим опорам:

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n .$$

Напруга  $U_s$  на кожному з них обчислюється через напругу  $U$  на ділянці послідовного з'єднання опорів:

$$U_s = U \frac{R_s}{\sum_{k=1}^n R_k} .$$

При паралельному з'єднанні  $n$  опорів струми в них розподіляються назад пропорційно їхнім опорам або прямо пропорційно їх провідностям:

$$I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n} = g_1 : g_2 : \dots : g_n .$$

Струм  $I_s$  кожної з них обчислюється через струм  $I$  у не розгалуженому ланцюзі:

$$I_s = I \frac{g_s}{\sum_{k=1}^n g_k} .$$

Формули перетворення трикутника опорів ( $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ ) в еквівалентну зірку опорів ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ) і навпаки мають вигляд:



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}; R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}.$$

**7. Баланс потужностей.** Для будь-якого замкнутого електричного кола сума потужностей  $P_d$ , що розвиваються джерелами електричної енергії, дорівнює сумі потужностей  $P_n$ , що витрачаються в приймачах енергії:

$$\sum P_d = \sum P_n \text{ або } \sum (E_k I_k + U_k I_k) = \sum I_k^2 R_k,$$

де  $\sum E_k I_k$  – алгебраїчна сума; тут позитивні ті з доданків, для яких напрямки дії ЕРС  $E_k$  і відповідного струму  $I_k$  збігаються, у протилежному випадку сума негативна;

$\sum U_k I_k$  – алгебраїчна сума, тут позитивні ті з доданків, для яких напруга джерела струму  $U_k$  (воно визначається розрахунком ланцюга зовнішньою стосовно затисків джерела струму) і його струм  $I_k$  збігаються по напрямку, у протилежному випадку доданок негативний;

$\sum I_k^2 R_k$  – арифметична сума; тут повинні бути враховані як зовнішній опір, струм і опір самих джерел енергії.

#### **1.4 Типові приклади Розрахунок лінійного електричного кола постійного струму**

Для електричного кола, схема якої представлена на рис. 1.1, відомо:  $R_1=10 \text{ Ом}$ ,  $R_2=27.5 \text{ Ом}$ ,  $R_3=12.5 \text{ Ом}$ ,  $R_4'=20 \text{ Ом}$ ,  $R_4''=10 \text{ Ом}$ ,  $R_5=17.5 \text{ Ом}$ ,  $R_6'=40 \text{ Ом}$ ,  $R_6''=40 \text{ Ом}$ ,  $E_1=32.5 \text{ В}$ ,  $E_2=25 \text{ В}$ ,  $I=3 \text{ А}$ .

Необхідно:

а) спростити схему, замінивши послідовно й паралельно з'єднані опори 4 і 6 гілок еквівалентними. Далі рахувати для спрощеної схеми;

б) скласти за законами Кірхгофа систему рівнянь для розрахунку струмів у всіх гілках схеми;

в) визначити струми у всіх гілках схеми методом контурних струмів;

г) визначити струми у всіх гілках схеми методом вузлових потенціалів;

д) скласти баланс потужностей у вихідній схемі (схемі із джерелом струму), обчисливши сумарну потужність джерел і сумарну потужність навантажень;

е) визначити струм  $I_1$  (в опорі  $R_1$ ) у заданій схемі із джерелом струму, використовуючи метод еквівалентного генератора;

ж) побудувати потенційну діаграму для будь-якого замкнутого контуру, що включає обидві ЕРС.

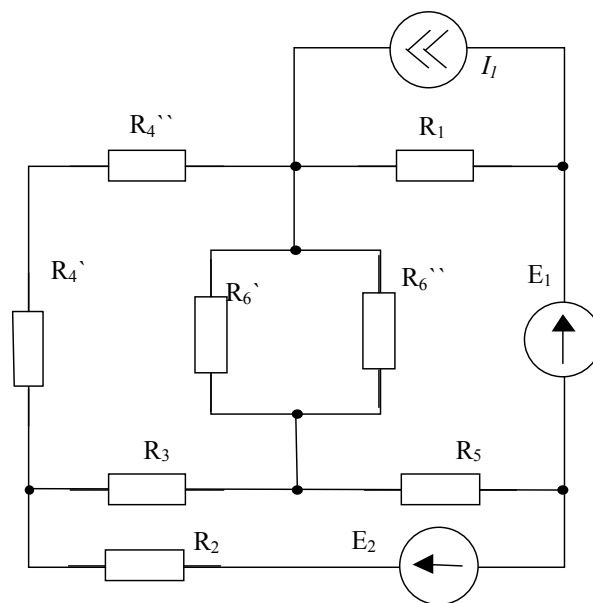


Рисунок 1.1

### Рішення

а) Опори  $R_4'$  і  $R_4''$  включені послідовно. Отже, їх можна замінити одним.  $R_4 = R_4' + R_4'' = 20 + 10 = 30$  (Ом). Опори  $R_6'$  і  $R_6''$  включені паралельно, тому їх можна замінити одним опором

$$R_6 = \frac{R_6' R_6''}{R_6' + R_6''} = \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} = 20 \text{ (Ом)}. \text{ Після цього перетворення схема буде}$$

мати вигляд, представлений на рис.1.2.

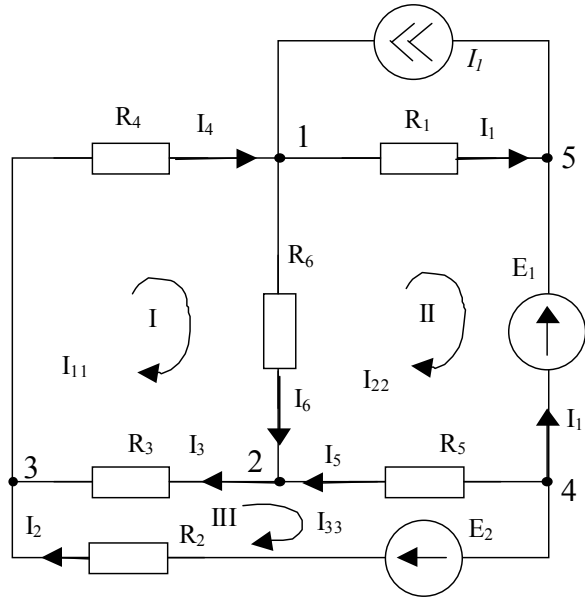


Рисунок 1.2

б) Розставляємо умовно позитивний напрямок струмів у гілках і їх позначаємо, а також розбиваємо схему на незалежні контури й вибираємо напрямок їхнього обходу (див. рис.1.2). Аналіз схеми показує, що вся схема містить 8 гілок ( $\Gamma=8$ ), з яких одна галузь містить джерело струму (кручений=1), і 5 вузлів ( $v=5$ ). Відповідно до цього по першому законі Кірхгофа необхідно скласти ( $v - 1 = 4$ ) рівнянь, а по другому законі Кірхгофа ( $(v - \text{кручений}) - (v - 1) = 3$ ) рівняння для розрахунку струмів у всіх галузях:

$$1) I_4 + I_1 - I_6 - I_1' = 0;$$

$$2) I_6 + I_5 - I_3 = 0;$$

$$3) I_3 + I_2 - I_4 = 0;$$

$$4) -I_5 - I_2 - I_1' = 0;$$

$$I) I_4 R_4 + I_6 R_6 + I_3 R_3 = 0;$$

$$II) I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_6 R_6 = -E_1;$$

$$III) -I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_2 R_2 = E_2.$$

в) Для незалежних контурів схеми вибираємо напрямок контурних струмів і їх позначаємо (див. рис.1.2). У відповідності зі структурою рівнянь по МКС записуємо рівняння для схеми (рис.1.2)

$$\left. \begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} &= E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} &= E_{33} \end{aligned} \right\},$$

де

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_4 + R_6 + R_3 = 30 + 20 + 12.5 = 62.5(\text{Ом}); \\ R_{22} &= R_1 + R_5 + R_6 = 10 + 17.5 + 20 = 47.5(\text{Ом}); \\ R_{33} &= R_3 + R_5 + R_2 = 12.5 + 17.5 + 27.5 = 57.5(\text{Ом}); \\ R_{12} &= R_{21} = R_6 = 20.0(\text{Ом}); \\ R_{23} &= R_{32} = R_5 = 17.5(\text{Ом}); \\ R_{13} &= R_{31} = R_3 = 12.5(\text{Ом}); \\ E_{11} &= 0.0(\text{В}); \\ E_{22} &= -E_1 - I_1R_1 = 32.5 - 3 \cdot 10 = -62.5(\text{В}); \\ E_{33} &= E_2 = 25.0(\text{В}) \end{aligned}$$

Вирішуючи систему рівнянь, визначимо контурні струми  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ . Для цього знайдемо:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 62.5 & -20.0 & -12.5 \\ -20.0 & 47.5 & -17.5 \\ -12.5 & -17.5 & 57.5 \end{vmatrix} = 112390.625; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0 & -20.0 & -12.5 \\ -62.5 & 47.5 & -17.5 \\ 25.0 & -17.5 & 57.5 \end{vmatrix} = -61953.125; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 62.5 & 0.0 & -12.5 \\ -20.0 & -62.5 & -17.5 \\ -12.5 & 25.0 & 57.5 \end{vmatrix} = -181250 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 62.5 & -20.0 & 0.0 \\ -20.0 & 47.5 & -62.5 \\ -12.5 & -17.5 & 25.0 \end{vmatrix} = -19765.625; \end{aligned}$$

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-61953.125}{112390.625} \approx -0.551(\text{A});$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-181250.000}{112390.625} \approx -1.613(\text{A});$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-19765.625}{112390.625} \approx -0.176(\text{A}).$$

Знаючи контурні струми, визначимо дійсні струми в гілках:

$$I_1 = I_{22} + I_1 = -1.613 + 3 = 1.387(\text{A});$$

$$I_2 = I_{33} = -0.176(\text{A});$$

$$I_3 = I_{11} - I_{33} = -0.551 + 0.176 = -0.375(\text{A});$$

$$I_4 = I_{11} = -0.551(\text{A});$$

$$I_5 = I_{22} - I_{33} = -1.613 + 0.176 = -1.437(\text{A});$$

$$I_6 = I_{11} - I_{22} = -0.551 + 1.613 = 1.062(\text{A});$$

$$I'_1 = -I_{22} = 1.613(\text{A}).$$

г) Для розрахунку ланцюга МВП спочатку перетворимо схему, замінивши джерело струму з паралельно включеним опором джерелом ЕРС із послідовно включеним опором (рис.1.3), де  $E'_1 = I_1 R_1$ . Потенціал 4 вузлу приймаємо рівним нулю, тобто цей вузол заземлимо.

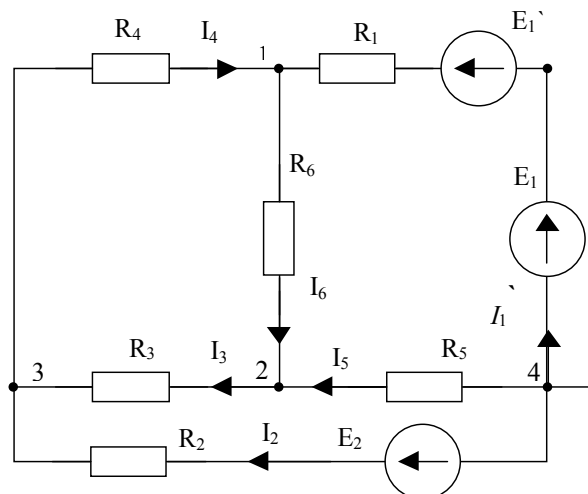


Рисунок 1.3

Структура рівнянь по МВП для схеми рис.1.3 при цьому буде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 g_{11} + \varphi_2 g_{12} + \varphi_3 g_{13} &= I_{11} \\ \varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} + \varphi_3 g_{23} &= I_{22} \\ \varphi_1 g_{31} + \varphi_2 g_{32} + \varphi_3 g_{33} &= I_{33} \end{aligned} \right\},$$

де

$$g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} = 0.033 + 0.050 + 0.100 = 0.183(\text{См});$$

$$g_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = 0.050 + 0.080 + 0.057 = 0.187(\text{См});$$

$$g_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} = 0.033 + 0.080 + 0.036 = 0.149(\text{См});$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{R_6} = 0.050(\text{См});$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{1}{R_3} = 0,080(\text{См});$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{1}{R_4} = 0.033(\text{См});$$

$$I_{11} = (E'_1 + E_2) \frac{1}{R_1} = 62.5 \frac{1}{10} = 6.250(\text{А});$$

$$I_{22} = 0.000(\text{А});$$

$$I_{33} = E_2 \frac{1}{R_2} = 25 \frac{1}{27.5} = 0.909(\text{А}).$$

Вирішуючи систему, знайдемо потенціали вузлів

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.183 & -0.050 & -0.033 \\ -0.050 & 0.187 & -0.080 \\ -0.333 & -0.080 & 0.150 \end{vmatrix} \approx 0.031;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6.250 & -0.050 & -0.033 \\ 0.000 & 0.187 & -0.080 \\ 0.909 & -0.080 & 0.150 \end{vmatrix} \approx 1.444;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0.183 & 6.253 & -0.033 \\ -0.050 & 0.000 & -0.080 \\ -0.333 & 0.909 & 0.150 \end{vmatrix} \approx 0.078;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0.183 & -0.050 & 6.250 \\ -0.050 & 0.187 & 0.000 \\ -0.333 & -0.080 & 0.909 \end{vmatrix} \approx 0.093.$$

У результаті маємо  $\varphi_1=46,272$  В;  $\varphi_2=25,093$  В;  $\varphi_3=29,782$  В.

Знаючи потенціали вузлів, згідно закону Ома, визначаємо струми в гілках:

$$I'_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1 + E'_1}{R_1} = \frac{0.000 - 46.272 + 32.500 + 30.000}{10.000} = 1.613(\text{A});$$

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3 + E_2}{R_2} = \frac{0.000 - 29.782 + 25.000}{27.500} = -0.176(\text{A});$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_3} = \frac{25.093 - 29.782}{12.500} = -0.375(\text{A});$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{29.782 - 46.272}{30.000} = -0.551(\text{A});$$

$$I_5 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{R_5} = \frac{0.000 - 25.093}{17.500} = -1.437(\text{A});$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_6} = \frac{46.272 - 25.093}{20.000} = 1.061(\text{A}).$$

Струм  $I_1$  визначимо згідно першого закону Кірхгофа (для вузла 5)

$$I_1 = I_1 - I'_1 = 3 - 1.613 = 1.387(\text{A}).$$

д) Використовуючи закон Джоуля-Ленца, складемо баланс потужностей.

Потужність споживачів:

$$P_c = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 89.26 \text{ (Вт)}.$$

Потужність джерел ЕРС і джерела струму:

$$\begin{aligned} P_d &= E_1 I_1' + E_2 I_2 + I(I_1 R_1) = \\ &= 52.32 - 4.50 + 3.00(1.39 \cdot 10.00) \cdot 89.50 \text{ (ВА)}, \end{aligned}$$

тобто  $P_c = P_d$ .

е) Для визначення струму  $I_1$  МЕГ виділяємо гілку із опором  $R_1$ , а частину, що залишилася, заміняємо активним двухполюсником, що у свою чергу заміняємо активним генератором. Параметри еквівалентного рівні:  $E_e = U_{abxx}$ ;  $R_b = R_{ab}$ . Напруги холостого ходу активного двухполюсника  $U_{abxx}$  визначаємо, складаючи рівняння згідно другого закону Кірхгофа для контуру, до складу якого входить ділянка  $ab$  (див. рис.1.4):

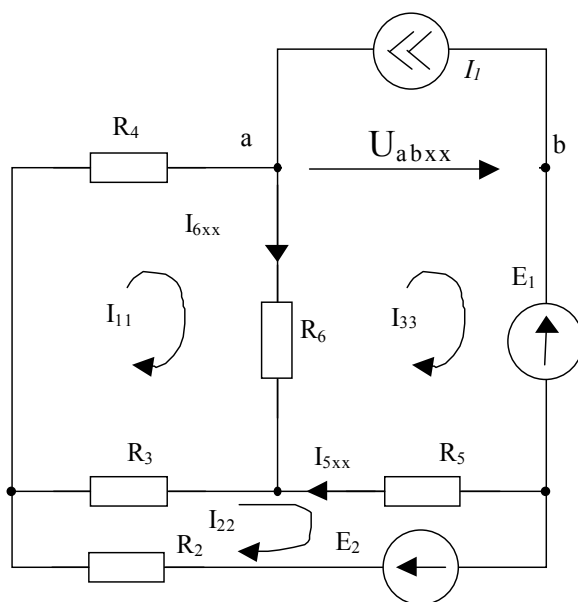


Рисунок 1.4

$$U_{abxx} + I_{5xx} R_5 - I_{6xx} R_6 = -E_1,$$



звідки

$$U_{abxx} = -E_1 - I_{5xx} R_5 + I_{6xx} R_6.$$

Струми  $I_{5xx}$  і  $I_{6xx}$  визначаємо МКС:

$$\begin{aligned} I_{11} R_{11} + I_{22} R_{12} + I_{33} R_{13} &= E_{11}; \\ I_{11} R_{21} + I_{22} R_{22} + I_{33} R_{23} &= E_{22}, \end{aligned}$$

де

$$R_{11} = R_4 + R_6 + R_3 = 30.0 + 20.0 + 12.5 = 62.5(\text{Ом});$$

$$R_{22} = R_3 + R_5 + R_2 = 12.5 + 17.5 + 27.5 = 57.5(\text{Ом});$$

$$R_{12} = R_{21} = R_3 = 12.5(\text{Ом});$$

$$R_{23} = R_{32} = R_5 = 17.5(\text{Ом});$$

$$R_{13} = R_{31} = R_6 = 20.0(\text{Ом});$$

$$E_{11} = 0.0(\text{В});$$

$$E_{22} = E_2(\text{В});$$

$$I_{33} = I_1(\text{А}).$$

У результаті підстановки чисельних значень отримаємо систему:

$$62.5I_{11} + -12.5I_{22} = -60.0;$$

$$-12.5I_{11} + 57.5I_{22} = -27.5,$$

вирішуючи яку визначимо контурні струми  $I_{11} = -1,104 \text{ А}$ ;  $I_{22} = -0,718 \text{ А}$ .

Знаючи контурні струми, знайдемо струми

$$I_{6xx} = I_{11} + I_1 = 1.896(\text{А});$$

$$I_{5xx} = -I_{22} - I_1 = -2.282(\text{А}),$$

підставляючи які у вираження  $U_{abxx}$ , визначимо напругу холостого ходу на ділянці ab:

$$U_{abxx} = 1.896 \cdot 20.000 + 2.282 \cdot 17.500 - 32.500 = 45.395(\text{В}).$$

Внутрішній опір еквівалентного генератора дорівнює вхідному опору пасивного двухполюсника (див. рис.1.5). Для визначення вхідного опору пасивного двухполюсника  $R_{ab}$  замінимо трикутник опорів  $R_3, R_4, R_6$  еквівалентною зіркою опорів  $R_{34}, R_{36}, R_{46}$  (див. рис.1.5). Опору  $R_{34}, R_{36}, R_{46}$  відповідно рівні:

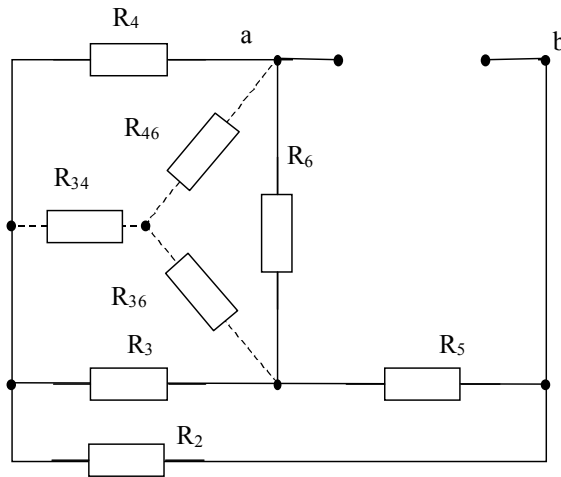


Рисунок 1.5

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{12.5 \cdot 30.0}{12.5 + 30.0 + 20.0} = 6(\text{Ом});$$

$$R_{36} = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{12.5 \cdot 20.0}{12.5 + 30.0 + 20.0} = 4(\text{Ом});$$

$$R_{46} = \frac{R_4 R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{30.0 \cdot 20.0}{12.5 + 30.0 + 20.0} = 9.6(\text{Ом}).$$

У результаті заміни одержимо схему представлену на рис.1.6. Використовуючи правила перетворення рівнобіжного-послідовно-паралельного з'єднання, отримаємо:

$$R_{e1} = R_{36} + R_5 = 21.5 (\text{Ом});$$

$$R_{e2} = R_{34} + R_2 = 33.5 (\text{Ом});$$

$$R_{e3} = R_{46} + \frac{R_{e1}R_{e2}}{R_{e1} + R_{e2}} = 21.5 \text{ (Ом)}.$$

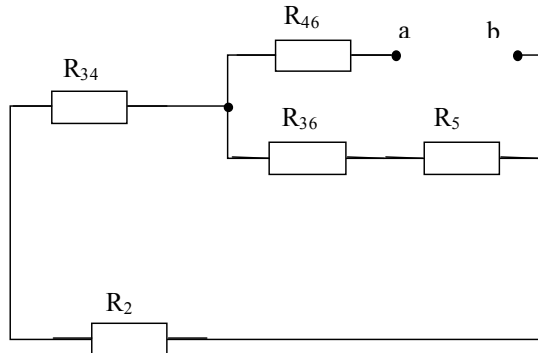


Рисунок 1.6

Відповідно до закону Ома знайдемо струм:

$$I_1 = \frac{U_{abxx}}{R_{ab} + R_1} \simeq 1.38 \text{ (А)}.$$

ж) Для побудови потенційної діаграми виберемо контур, до складу якого входять дві ЕРС (див. рис.1.7). Потенціал точки а приймаємо рівним нулю, тобто  $\varphi_a=0$ .

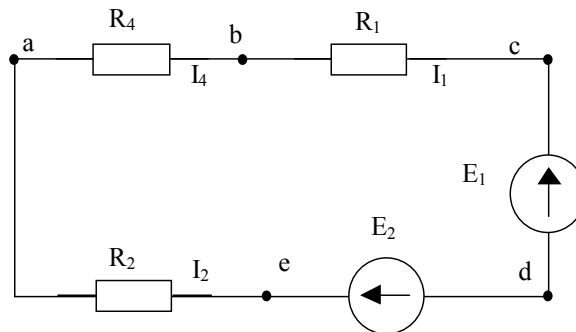


Рисунок 1.7

Визначаємо потенціали всіх інших точок контуру:

$$\begin{aligned} \varphi_b &= \varphi_a - I_4 R_4 = 0.55 \cdot 30.00 = 16.50(\text{В}); \\ \varphi_c &= \varphi_b - I_1 R_1 = 16.50 - 13.80 = 2.7(\text{В}); \\ \varphi_d &= \varphi_c - E_1 = 2.70 - 32.50 = -29.80(\text{В}); \\ \varphi_e &= \varphi_d + E_2 = -29.80 + 25.00 = -4.8(\text{В}); \\ \varphi_a &= \varphi_e - I_2 R_2 = -4.80 + 4.80 = 0.00(\text{В}). \end{aligned}$$

Визначаємо загальний опір контуру:

$$R_{\text{заг}} = R_4 + R_1 + R_2 = 30.0 + 10.0 + 27.5 = 67.5 (\text{Ом}).$$

При побудові потенційної діаграми по осі абсцис відкладаємо  $R$ , а по осі ординат  $\varphi$  і наносимо на площину потенціали точок. Потенційна діаграма представлена на рис.1.8.

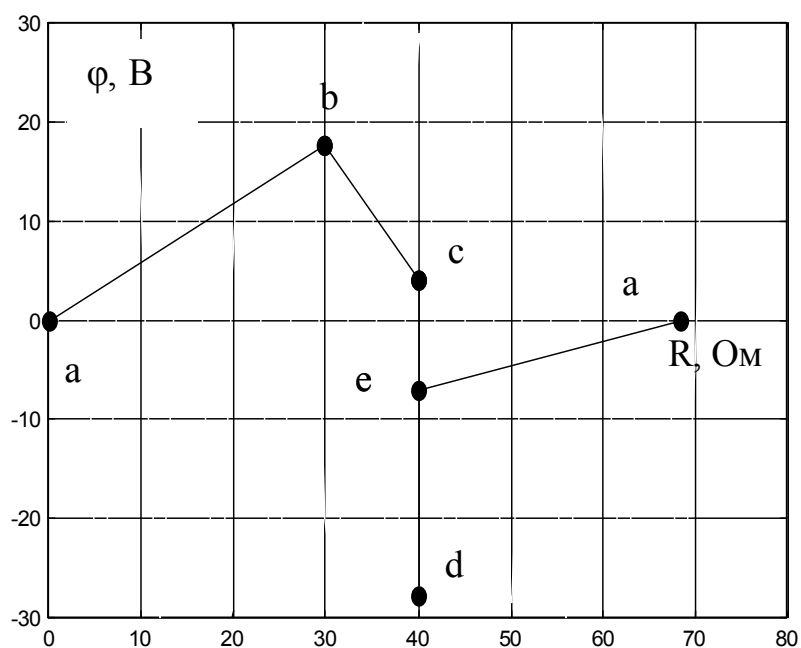


Рисунок 1.8

### 1.5 Контрольне завдання 1

Задано електричне коло (рис.1.9), параметри якого наведені в таблиці 1.1 і вибираються відповідно до варіанта.

Необхідно:

- а) намалювати схему свого варіанта й показати на ній всі струми;
- б) скласти систему рівнянь, необхідних для визначення струмів по першому й другому законам Кірхгофа й вирішити її;
- в) визначити всі струми, користуючись методом контурних струмів;
- г) визначити всі струми, користуючись методом вузлових потенціалів;
- д) результати розрахунків струмів звести в таблицю й зрівняти між собою;
- е) скласти баланс потужностей;
- ж) побудувати в масштабі потенційну діаграму для зовнішнього контуру;
- з) визначити струм, відповідно до варіанта, методом еквівалентного генератора.

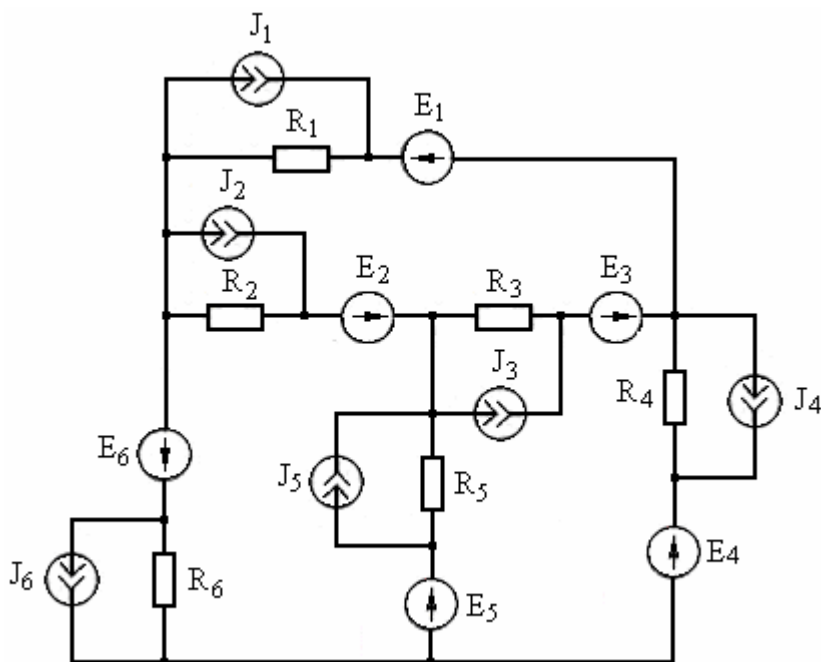


Рисунок 1.9

Таблиця 1.1– Варіанти контрольного завдання №1

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
ЕРС у схемі	$E_1=10\text{ В}$ $E_3=15\text{ В}$ $E_5=25\text{ В}$	$E_2=20\text{ В}$ $E_4=30\text{ В}$ $E_6=35\text{ В}$	$E_1=10\text{ В}$ $E_5=25\text{ В}$ $E_6=35\text{ В}$	$E_2=20\text{ В}$ $E_3=15\text{ В}$ $E_4=30\text{ В}$	$E_3=15\text{ В}$ $E_5=25\text{ В}$ $E_2=20\text{ В}$	$E_4=30\text{ В}$ $E_5=25\text{ В}$ $E_1=10\text{ В}$	1
д.с. у схемі	$I_1=1,0\text{ А}$	$I_2=1,5\text{ А}$	$I_3=2,0\text{ А}$	$I_4=2,5\text{ А}$	$I_5=3,0\text{ А}$	$I_6=3,5\text{ А}$	2
$R_1, \text{ Ом}$	10	15	10	5	10	15	3
$R_2, \text{ Ом}$	5	10	15	15	10	5	4
$R_3, \text{ Ом}$	10	15	5	5	10	15	5
$R_4, \text{ Ом}$	15	15	10	10	5	5	6
$R_5, \text{ Ом}$	10	10	15	15	5	5	7
$R_6, \text{ Ом}$	10	10	5	5	15	15	8
МЕГ	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	9

# 2

## ***ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ***

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок електричних  
кіл синусоїдального струму***

***Контрольне завдання 2***

## 2 Електричні кола синусоїдального струму

### 2.1 Робоча програма

1. Визначення та основні величини, що характеризують синусоїдальні ЕРС, струми, напруги. Одержання синусоїдальної ЕРС. Достоїнства змінного струму перед постійним. Діючі й середнє значення. Коефіцієнти й форми.
2. Закон електромагнітної індукції. Самоіндукція й взаємоіндукція. Індуктивність і взаємна індуктивність, коефіцієнт зв'язку й принципи їхнього розрахунку.
3. Поняття про електричну ємність.
4. Параметри схем заміщення ланцюгів змінного струму. Активні й реактивні опори.
5. Застосування векторів для додавання й вирахування синусоїдальних величин.
6. Співвідношення між миттєвими значеннями напруги й струму для ділянок ланцюга, що містять тільки активний опір, тільки індуктивність, тільки ємність. Співвідношення між діючими значеннями в тих же випадках.
7. Ті ж співвідношення у випадку послідовного з'єднання R, L і C. Трикутники напруги й опору.
8. Правило розрахунку повного опору ланцюга при послідовному з'єднанню довільного числа активних і реактивних опорів.
9. Трикутники струмів і провідність. Правило обчислення повної провідності при паралельному з'єднанню гілок.
10. Різні варіанти застосування векторних діаграм для графічного методу визначення величин, для складання розрахункових рівнянь, для ілюстрації й перевірки результатів розрахунку.
11. Миттєва, активна, реактивна й повна потужність. Трикутник потужності.
12. Коефіцієнт потужності і його вплив на ККД систем електропостачання. Способи збільшення коефіцієнта потужності.



13. Застосування комплексних чисел у теорії ланцюгів. Правила перетворення форм запису й алгебраїчних операцій над комплексними числами.
14. Закони Ома й Кірхгофа в символічній формі. Комплекси повного опору й повної провідності. Перетворення двухполосників і трьохполосників у символічній формі.
15. Поширення всіх видів розрахунку ланцюгів постійного струму на ланцюзі змінного струму.
16. Розрахунок ланцюгів з індуктивними зв'язками. Рівняння Кірхгофа для миттєвих значень і для діючих - у комплексній формі. Індуктивно зв'язані ланцюги при паралельному і послідовному з'єднанні. Трансформатор без феромагнітного сердечника. Заміна індуктивно зв'язаних ланцюгів еквівалентними, без індуктивних зв'язків.
17. Резонанс напруг. Резонанс струмів. Резонансне явище в складних ланцюгах. Частотні характеристики і їхня залежність від добротності.
18. Кругові діаграми електричних кіл. Вираження комплексних струмів і напруг у вигляді рівнянь дуги окружності. Правила побудови кругових діаграм і визначення їх за допомогою різних величин у випадках: послідовне з'єднання, паралельне з'єднання, активний двухполосник.

## **2.2 Загальні положення**

Електромагнітні процеси в ланцюгах змінного струму значно складніші й різноманітніші, ніж у ланцюгах постійного струму. Більш складний і їхній розрахунок. Опис електромагнітних процесів у ланцюгах змінного струму й методів їхнього розрахунку пов'язаний із застосуванням нових понять і визначень, із введенням нових величин, що характеризують змінний струм, із застосуванням іншого математичного апарата. Все це відбито в п.1 - 5 робочої програми.

Особливу роль у ланцюгах змінного струму грає явище електромагнітної індукції і його окремі випадки - самоіндукція. Із цими явищами зв'язані такі параметри ланцюгів змінного струму як індуктивність  $L$  і взаємна індуктивність  $M$ . У ланцюгах постійного струму  $L$  і  $M$  не впливають на силу струму в сталому режимі. У ланцюгах же змінного

струму ці параметри спричиняються опір, називаний реактивним і залежне від величини  $L$ ,  $M$  і частоти струму  $f$ .

Конденсатор у ланцюзі постійного струму в сталому режимі являє собою розімкнуту ділянку ланцюга. У ланцюзі змінного струму відбувається безперервна зміна заряду на обкладках конденсатора, що вимагає рух зарядів у приєднанні до обкладок провідників. У результаті конденсатор виявляється елементом, що проводить змінний струм. Здатність конденсатора проводити струм характеризується опором, так званим реактивним і залежним від ємності  $C$  і частоти  $f$ .

Додавання й вирахування синусоїдальних величин, які необхідно здійснити у зв'язку із застосуванням законів Кірхгофа в ланцюгах змінного струму, дуже просто й наочно виконується за допомогою векторів. Із застосування векторів у теорії ланцюгів змінного струму логічно впливає символічний метод розрахунку, де вектор струму, напруги й ЕРС, а також опору й провідності записується за допомогою комплексних чисел. Запис цих величин за допомогою комплексних чисел дозволяє всі методи розрахунку ланцюгів постійного струму, правила їхнього перетворення поширити на ланцюги синусоїдального струму. Застосування векторів у ланцюгах змінного струму передбачено п.5 робочої програми.

Після пророблення зазначеного матеріалу можна переходити до вивчення співвідношень між напругою й струмом в окремих елементах ланцюга:  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . При цьому звернути увагу на висновок співвідношень для миттєвих, амплітудних і діючих значень. Для розуміння наступного матеріалу й безпомилкового розрахунку ланцюгів змінного струму необхідно твердо запам'ятати, що в активному опорі струм збігається по фазі з напругою, в індуктивному відстає від напруги на чверть періоду, у ємнісному – на чверть періоду випереджає його. При зображенні напруги й струму у вигляді векторів у першому випадку кут між цими векторами буде дорівнювати нулю, а в другому й третьому випадках становитиме  $\pm\pi/2$  відповідно. Вираження миттєвих значень струму при  $U = U_m \sin(\omega t)$ , графіки й векторні діаграми, а також закон Ома для окремих елементів наведені в таблиці 2.1.

У ланцюгах з послідовною сполукою R і L, R і C або R, L і C використовуються поняття активної й реактивної складової напруги. Активна складова збігається по фазі зі струмом. Реактивна - випереджає струм або відстає від нього на  $\pm\pi/2$ . Співвідношення між векторами загальної напруги ланцюга і його складових такі ж, як між гіпотенузою й катетами в прямокутному трикутнику. Трикутникам напруги відповідають подібні їм трикутники опору. Співвідношення, що впливають із трикутників напруги й опору, широко застосовуються при розрахунку ланцюгів синусоїдального струму, що містять тільки послідовно або тільки паралельно з'єднані ділянки.

З векторної діаграми для ланцюга з послідовним з'єднанням будь-якого числа елементів треба правило, по якому активні опори складаються арифметично, а реактивні - алгебраїчно. Повний опір всього ланцюга обчислюється як гіпотенуза трикутника, катетами якого є сумарні активний і реактивний опору.

Методика розрахунку ланцюгів з паралельним з'єднанням заснована на розкладанні векторів струму на активну й реактивну складові. У результаті виходять трикутник струму й трикутник, що впливає з нього, провідностей. Із цих трикутників впливають необхідні для розрахунку співвідношення.

При розрахунку ланцюгів зі змішаним з'єднанням доцільно застосувати символічний метод, при якому задана напруга й опору (або провідності) гілок записуються у вигляді комплексних чисел. Для розрахунку складних ланцюгів з декількома джерелами ЕРС практично застосовується тільки символічний метод. У результаті розрахунку обчислюються комплекси струмів і напруг в окремих ділянках, які містять їхню величину й початкову фазу.

Для успішного застосування символічного методу розрахунку ланцюгів необхідно надійно засвоїти правила переходу від алгебраїчної форми запису комплексних чисел до показового й назад, а також правила, по яких виконуються алгебраїчні дії з комплексними числами. Принципи вибору конкретного методу розрахунку в символічній формі ті ж, що й для ланцюга постійного струму. Процес розрахунку можна істотно полегшити, а ймовірність помилок зменшити, якщо користуватися су-

часною обчислювальною технікою: ЕОМ, ПК і навіть програмувальним мікрокалькулятором (ПМК).

Пристаючи до вивчення питань 6-10 і 13-15 робочої програми, потрібно мати на увазі, що в більшості сучасних підручників по теорії ланцюгів застосування векторів і комплексних чисел розглядається одночасно.

У результаті пророблення питань 11 і 12 робочої програми, необхідно усвідомити зміст різних складових потужностей (миттєвої, активної, реактивної, повної), співвідношення між ними, запам'ятати формули для їхнього обчислення, а також формулу комплексної потужності. Усвідомити особливості балансу потужності в ланцюгах змінного струму, а також умови передачі максимальної потужності в приймач енергії.

Особливу увагу звернути на роль коефіцієнта потужності, зокрема, на залежність від нього ККД ліній електропередачі й інших елементів систем електропостачання, на способи збільшення коефіцієнта потужності.

Вивчаючи резонансні явища (п.17 робочої програми), потрібно зрозуміти при яких умовах вони виникають, у чому вони проявляються. Звернути увагу на корисні й можливі небажані прояви. При розрахунку ланцюгів з резонансами в ряді випадків вдається обійтися мінімальним числом вихідних даних.

Одним з наочно викладених способів опису властивостей ланцюгів змінного струму й методів їхнього аналізу є зображення залежності струмів, напруг і інших величин від яких-небудь параметрів у вигляді кругових діаграм (п.18 робочої програми). Цим прикладом, зокрема, користуються в курсі електричних машин.

### **2.3 Основні співвідношення**

#### **1. Миттєві значення струму, напруги, ЕРС, що синусоїдально змінюються із часом:**

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

де  $I_m, U_m, E_m$  – максимальне значення або амплітуда струму, напруги, ЕРС;  
 $(\omega t + \psi_i), (\omega t + \psi_u), (\omega t + \psi_e)$  – фаза (фазовий кут), струму напруги,  
ЕРС;

$\psi_i, \psi_u, \psi_e$  – початкова фаза струму, напруги, ЕРС.

$\omega$  - кутова частота.

Період  $T$ , кутова частота  $\omega$  і частота  $f$  зв'язані співвідношенням

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

**2. Діюче значення струмів, напруги, ЕРС, що змінюється синусоїдально**, відповідно рівні:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

**3. Середнє значення струму, напруги, ЕРС, що змінюється синусоїдально за половину періоду:**

$$I_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} I_m = 0.637 I_m;$$

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} U_m = 0.637 U_m;$$

$$E_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi} E_m = 0.637 E_m.$$

**4. Послідовне з'єднання елементів.** Якщо ланцюг, що складається з послідовно з'єднаних  $R, L, C$ , включений на напругу

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

те по ній протікає струм

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

Діюче значення струму буде визначатися (закон Ома для діючих значень):

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

де  $\omega L = x_L$  – індуктивний опір;

$$\frac{1}{\omega C} = x_C \text{ – емнісний опір;}$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = x = x_L - x_C \text{ – реактивний опір;}$$

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + x^2} \text{ – повний опір.}$$

**5. Трикутник напруги, опорів.** Прикладена до ланцюга напруга може бути розкладена на дві складові  $U_a = RI$  – активну, співпадаючу по фазі зі струмом,  $U_p = xI$  – реактивну, випереджальну по фазі на  $\pi/2$ , ( $x = x_L - x_C$ ) > 0 або відстаючу по фазі на  $\pi/2$ , ( $x = x_L - x_C$ ) < 0 від струму.

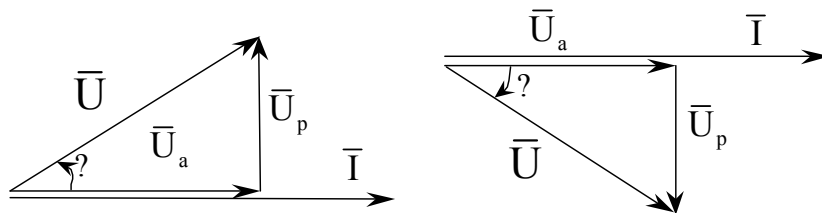


Рисунок 2.1

Із трикутника напруг треба:

$$U_a = RI = U \cos(\varphi);$$

$$U_p = xI = U \sin(\varphi);$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Трикутнику напруг відповідає трикутник опор.

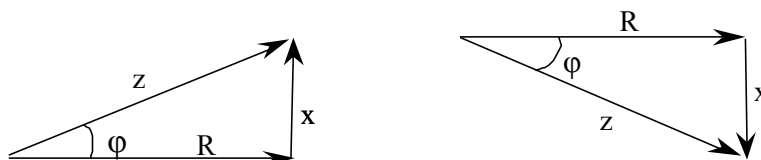


Рисунок 2.2

Із трикутника опорів випливають співвідношення:

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{z}; \sin(\varphi) = \frac{x}{z}; \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{x}{R}.$$

**6. Паралельне з'єднання двох гілок, до складу яких відповідно входять  $R_1$ ,  $L$  і  $R_2$ ,  $C$ .** Якщо в ланцюзі прикладена напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то струм визначається

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

де

$$I_m = U_m y = U_m \sqrt{g^2 + b^2} = U_m \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_L - b_C)^2}; \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_L - b_C}{g_1 + g_2}\right).$$

Діюче значення струму (закон Ома для діючих значень):

$$I = Uy = U \sqrt{g^2 + b^2} = U \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_L - b_C)^2},$$

де  $g_1 = \frac{R_1}{z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2}$  – активна провідність першої гілки;

$b_L = \frac{X_L}{z_1^2} = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}$  – реактивна (індуктивна) провідність першої гілки;

$g_2 = \frac{R_2}{z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2}$  – активна провідність другої гілки;

$b_C = \frac{X_C}{z_2^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$  – реактивна (ємнісна) провідність другої гілки;

$g = g_1 + g_2$  – активна провідність ланцюга;

$b = b_L + b_C$  – реактивна провідність ланцюга;

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$  – повна провідність ланцюга.

**7. Трикутник струмів, провідностей.** Струм  $I$ , що проходить у ланцюзі, може бути розкладений на дві складові:  $I_a = Ug$  – активну, співпадаючу по фазі із прикладеною напругою, і  $I_p = Ub$  – реактивну, відстаючу від напруги по фазі на  $\pi/2$  ( $b = b - b > 0$ ) і випереджальну від напруги по фазі на  $\pi/2$  ( $b = b - b < 0$ ).

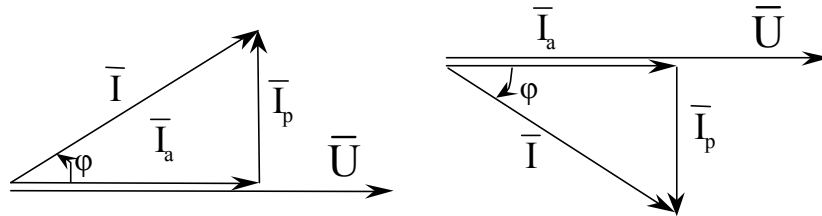


Рисунок 2.3

Із трикутника струму треба:

$$I_a = gU = I \cos(\varphi);$$

$$I_p = bU = I \sin(\varphi);$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = yU.$$



Трикутнику струму відповідає трикутник провідностей

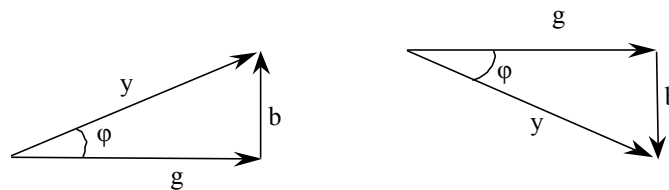


Рисунок 2.4

Трикутник провідностей дає наступні співвідношення:

$$\cos(\varphi) = \frac{g}{y}; \sin(\varphi) = \frac{b}{y}; \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{b}{g}.$$

**8. Перехід від послідовної схеми до еквівалентної паралельної схеми** здійснюється по формулах:

$$g = \frac{R}{R^2 + x^2} = \frac{R}{z^2};$$

$$b = \frac{x}{R^2 + x^2} = \frac{x}{z^2};$$

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{z}.$$

При переході від паралельної схеми до еквівалентної послідовної використовують наступні формули:

$$R = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{y^2};$$

$$x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{y^2};$$

$$z = \sqrt{R^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + b^2}} = \frac{1}{y}.$$

**9. Активна, реактивна й повна потужності** визначаються по формулах:

$$P = I^2 R = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = U^2 g;$$

$$Q = I^2 x = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = U^2 b;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I = I^2 z = U^2 y.$$

Для всякого електричного кола справедливі наступні баланси потужностей:

$$\sum P_d = \sum P_c ;$$

$$\sum Q_d = \sum Q_c ,$$

де  $P_d, Q_d$  – потужності джерел;

$P_c, Q_c$  – потужності споживачів.

**10. При послідовному з'єднанні декількох опорів (елементів) різного характеру маємо:**

$$U_a = \sum_{k=1}^n U_{ka} = I \sum_{k=1}^n R_k ;$$

$$U_p = \sum_{k=1}^n U_{kp} = I \sum_{k=1}^n X_k ;$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n R_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n X_k \right)^2}.$$

Зрушення фаз між загальною напругою  $U$  і струмом  $I$ :

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n R_k} \right).$$

**11. При паралельному з'єднанні декількох опорів (елементів) різного характеру маємо:**

$$I_a = \sum_{k=1}^n I_{ka} = U \sum_{k=1}^n g_k;$$

$$I_p = \sum_{k=1}^n I_{kp} = U \sum_{k=1}^n b_k;$$

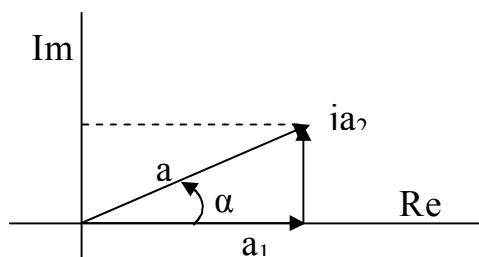
$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = U \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n g_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^2}.$$

Зрушення фаз між напругою  $U$  і струмом  $I$ , що проходить у нерозгалуженій частині ланцюга:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n g_k} \right).$$

**12. Символічний метод розрахунку**

**1. Комплексні числа й дії над ними.** Комплексне число, що відповідає точці на комплексній площині, може бути записане в наступних формах:



алгебраїчний  $\underline{A} = a_1 + ja_2$ ;  
 тригонометричний  $\underline{A} = a(\cos(\alpha) + j\sin(\alpha))$ ;

Рисунок 2.5

Тут  $a_1 = a \cos(\alpha) = \text{Re}[\underline{A}]$  – речовинна частина комплексного числа  $\underline{A}$ ;

$a_2 = a \sin(\alpha) = \text{Im}[\underline{A}]$  – мнима частина комплексного числа;

$j = \sqrt{-1} = e^{j90^\circ}$  – мнима одиниця;

$a = |\underline{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{a_2}{\sin(\alpha)} = \frac{a_1}{\cos(\alpha)}$  – модуль комплексного числа  $\underline{A}$

(завжди позитивний);

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$  – кут (або аргумент) комплексного числа.

Комплексне число  $\hat{\underline{A}} = a_1 - ja_2 = ae^{-j\alpha}$  називається комплексно-сполученим числу  $\underline{A} = a_1 + ja_2 = ae^{j\alpha}$ .

Додавання й вирахування комплексних чисел:

$$\underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2) = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2).$$

Множення:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= (a_1 + ja_2) \cdot (b_1 + jb_2) = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) + j(a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) = \\ &= ae^{j\alpha} \cdot be^{j\beta} = a \cdot be^{j(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Ділення:

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{\underline{A} \cdot \hat{\underline{B}}}{\underline{B} \cdot \hat{\underline{B}}} = \frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{ae^{j\alpha}}{be^{j\beta}} = \frac{a}{b} e^{j(\alpha-\beta)}$$

Добуток комплексно сполучених чисел:

$$\underline{A} \cdot \hat{\underline{A}} = (a_1 - ja_2) \cdot (a_1 + ja_2) = a_1^2 + a_2^2 = ae^{j\alpha} \cdot ae^{-j\alpha} = a^2.$$

Зведення в ступінь:

$$\underline{A}^n = (a_1 + ja_2)^n = (ae^{j\alpha})^n = a^n e^{jn\alpha}.$$

Добування кореня:

$$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{ae^{j\alpha}} = \sqrt[n]{a} e^{j \frac{\alpha+2k\pi}{n}},$$

де  $k$ -ціле число.

При  $n$  цілому й позитивному корінь має  $n$  різних значень, що відповідають числам  $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$  (багатозначність добування кореня).

## 2. Представлення, ЕРС, струмів, напруг, які синусоїдально змінюються, комплексними числами.

ЕРС, яке синусоїдально змінюється,  $e = E \sin(\omega t + \psi_e)$  можна повністю охарактеризувати, задавши комплексну амплітуду ЕРС  $\underline{E}_m = E_m e^{j\psi_e}$  або комплексне діюче значення ЕРС  $\underline{E} = E e^{j\psi_e}, \left( E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \right)$ .

Синусоїдальний струм  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$  повністю визначається комплексною амплітудою струму  $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$  або його комплексним діючим значенням  $\underline{I} = I e^{j\psi_i}, \left( I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)$ .

Напруга  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  може бути повністю визначена комплексною амплітудою  $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$  або його комплексним діючим значенням  $\underline{U} = U e^{j\psi_u}, \left( U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \right)$ .

**3. Комплексний опір.** Комплексна провідність. Пасивна ділянка ланцюга визначається комплексним опором:

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= z e^{j\varphi} = z \cos(\varphi) + j z \sin(\varphi) = R + jX, \end{aligned}$$

де  $\underline{U}$  и  $\underline{I}$  – комплексні діючі значення напруги й струму ділянки ланцюга;

$R$  – активний опір ділянки ланцюга;

$X$  – реактивний опір ділянки ланцюга;

$Z$  – повний опір ділянки ланцюга;

$\varphi$  – кут зрушення по фазі між напругою й струмом.

Величина, зворотна комплексному опорю, називається комплексною провідністю:

$$\begin{aligned}\underline{y} &= \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{-j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= y e^{j\varphi} = y \cos(\varphi) - j y \sin(\varphi) = g - jb,\end{aligned}$$

де  $g$  - активна провідність ділянки ланцюга;

$b$  - реактивна провідність ділянки ланцюга;

$y$  - повна провідність ділянки ланцюга.

#### 4. Закон Ома в комплексній формі:

для пасивної ділянки ланцюга:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}};$$

для активної ділянки ланцюга:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{ab} \pm \underline{E}}{\underline{Z}_{ab}}.$$

#### 5. Закон Кірхгофа в комплексній формі

Перший закон Кірхгофа в застосуванні до вузла електричного кола має вигляд

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0.$$

При записі цього рівняння комплексні струми, спрямовані до вузла, беруться з одним знаком (+), а комплексні струми, спрямовані від вузла, зі знаком (-) або навпаки.

Другий закон Кірхгофа застосовується до замкнутого контуру ланцюга й має вигляд

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k \underline{z}_k = \sum_{k=1}^n \underline{E}_k,$$

де  $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k \underline{Z}_k$  – алгебраїчна сума комплексних спадань напруги замкнутого контуру;

$\sum_{k=1}^n \underline{E}_k$  – алгебраїчна сума комплексних ЕРС замкнутого контуру.

При записі цього рівняння  $\underline{I}_k \underline{Z}_k$  и  $\underline{E}_k$  беруться зі знаком плюс, якщо напрямок струму  $\underline{I}_k$  й ЕРС  $\underline{E}_k$  збігаються по напрямку обходу контуру, у протилежному випадку вони беруться зі знаком мінус.

### 6. Послідовне й паралельне з'єднання опорів.

При послідовному з'єднанні ділянок ланцюга комплексний еквівалентний опір дорівнює сумі комплексних опорів окремих ділянок:

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^n R_k + j \sum_{k=1}^n X_k .$$

При паралельному з'єднанні гілок ланцюга комплексна еквівалентна провідність дорівнює сумі комплексних провідностей гілок:

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^n g_k + j \sum_{k=1}^n b_k .$$

### 7. Комплексна потужність

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \hat{\underline{I}} = P + jQ = S e^{j\varphi} = U \cdot I \cos(\varphi) + jU \cdot I \sin(\varphi)$$

де  $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}$  – повна потужність;

$P = \operatorname{Re}[\underline{S}] = \operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \hat{\underline{I}}] = U \cdot I \cos(\varphi)$  – активна потужність;

$Q = \operatorname{Im}[\underline{S}] = \operatorname{Im}[\underline{U} \cdot \hat{\underline{I}}] = U \cdot I \sin(\varphi)$  – реактивна потужність.

Баланс потужностей у комплексній формі має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n (\underline{E}_k \hat{\underline{I}}_k + \underline{U}_k \hat{\underline{I}}_k) = \sum_{k=1}^n I_k^2 \underline{Z}_k ,$$

де  $\underline{U}_k$  – комплексна напруга на джерелі струму (воно визначається розрахунком ланцюга зовнішньої стосовно затискачів джерела струму);

$\hat{I}_k$  – комплекс струму, сполучений струму  $\underline{I}_k$  джерела струму;

$\sum_{k=1}^n \underline{E}_k \hat{I}_k$  – алгебраїчна сума (плюс, якщо  $\underline{E}_k$  и  $\underline{I}_k$  – збігаються по напрямку, мінус – у протилежному випадку);

$\underline{U}_k \hat{I}_k$  – алгебраїчна сума (плюс, якщо  $\underline{U}_k$  и  $\underline{I}_k$  – збігаються по напрямку, мінус – у протилежному випадку);

$\sum_{k=1}^n I_k^2 Z_k$  – комплексна потужність споживачів.

## 2.4 Типові приклади. Розрахунок електричних кіл синусоїдального струму

У ланцюзі на рис. 2.6 задані:  $U=300$  В;  $f=50$  Гц;  $R_1=R_3=6$  Ом;  $R_2=12$  Ом;  $L_1=25,48$  мГн;  $L_3=111,46$  мГн;  $C_1=199$  мкФ;  $C_2=353,8$  мкФ. Необхідно:

- обчислити струм;
- побудувати топографічну векторну діаграму;
- визначити напругу між крапками в та а, д та в, з та д;
- обчислити повну, активну та реактивну потужності.

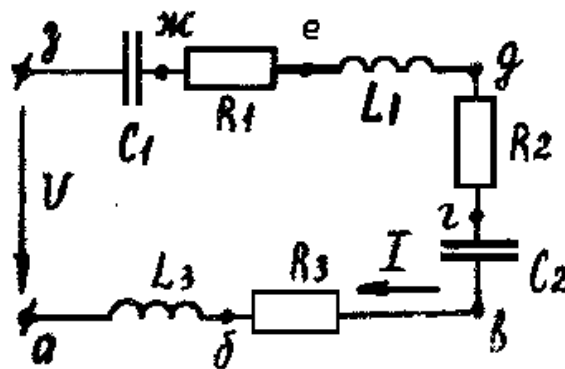


Рисунок 2.6



## Рішення

Визначимо індуктивний і ємнісний опори:

$$x_{L_1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 314 \cdot 25.48 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ (Ом)};$$

$$x_{L_3} = \omega L_3 = 2\pi f L_3 = 314 \cdot 114.46 \cdot 10^{-3} = 35 \text{ (Ом)};$$

$$x_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{10^6}{314 \cdot 199.00} = 16 \text{ (Ом)};$$

$$x_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{10^6}{314 \cdot 353.80} = 9 \text{ (Ом)}.$$

Знаходимо еквівалентні активний, реактивний й повний опори:

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 = 6 + 12 + 6 = 24 \text{ (Ом)};$$

$$x_e = x_{L_1} + x_{L_3} - x_{C_1} - x_{C_2} = 8 + 35 - 16 - 9 = 18 \text{ (Ом)};$$

$$z_e = \sqrt{R_e^2 + x_e^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30 \text{ (Ом)}.$$

Струм у ланцюзі визначаємо за законом Ома:

$$I = \frac{U}{z_e} = \frac{300}{30} = 10 \text{ (А)}.$$

Для побудови векторної топографічної діаграми обчислимо за законом Ома напругу на всіх елементах ланцюга:

$$U_{R_1} = I \cdot R_1 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (В)};$$

$$U_{R_2} = I \cdot R_2 = 10 \cdot 12 = 120 \text{ (В)};$$

$$U_{R_3} = I \cdot R_3 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (В)};$$

$$U_{L_1} = I \cdot x_{L_1} = 10 \cdot 8 = 80 \text{ (В)};$$

$$U_{L_3} = I \cdot x_{L_3} = 10 \cdot 35 = 350 \text{ (В)};$$

$$U_{C_1} = I \cdot x_{C_1} = 10 \cdot 16 = 160 \text{ (В)};$$

$$U_{C_2} = I \cdot x_{C_2} = 10 \cdot 9 = 90 \text{ (В)}.$$

Діаграму рис. 2.7 будемо в наступному порядку. Відкладаємо довільно, наприклад горизонтально, вектор струму  $I$ , що є загальним для всіх елементів ланцюга. Вектори напруги відкладаємо в такому порядку, у якому розташовані елементи ланцюга на схемі, починаючи із крапки а й закінчуючи крапкою з. При цьому кожний наступний вектор проводиться із крапки, де закінчується попередній. При такій побудові здійснюється додавання векторів, а отже, і відповідних синусоїдальних напруг. Вектор, що з'єднає початок побудови (крапка а) з кінцем останнього вектора (крапка з), є напруга на вхідних затисках. Крапки б, в, ..., з на топографічній діаграмі можна розглядати як потенціали відповідних крапок на схемі щодо крапки а.

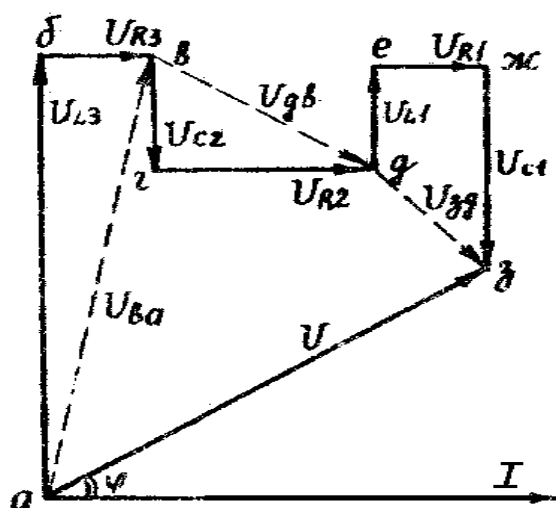


Рисунок 2.7

Вектори напруг, які потрібно визначити, показані на діаграмі переривчастими лініями. Їхню величину можна одержати, вимірявши довжину й помноживши на обраний масштаб, але можна й обчислити виходячи з діаграми:

$$U_{\text{ва}} = \sqrt{U_{R_3}^2 + U_{L_3}^2} = \sqrt{60^2 + 350^2} = 355 \text{ (В)};$$

$$U_{\text{дв}} = \sqrt{U_{R_2}^2 + U_{C_2}^2} = \sqrt{120^2 + 90^2} = 150 \text{ (В)};$$

$$U_{\text{зд}} = \sqrt{U_{R_1}^2 + (U_{L_1} - U_{C_1})^2} = \sqrt{60^2 + (80 - 160)^2} = 100 \text{ (В)}.$$

Повна потужність:

$$S = UI = 300 \cdot 100 = 3000 \text{ (ВА)}.$$

Для обчислення активної  $P$  і реактивної  $Q$  потужностей визначимо кут зрушення фаз між напругою й струмом:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{x_3}{R_3}\right) = \arctg\left(\frac{18}{24}\right) = 36.7^\circ.$$

Кут  $\omega$  можна визначити й безпосередньо вимірюванням на діаграмі (мал.2.7).

Активна й реактивна потужність:

$$P = S \cdot \cos(\varphi) = 3000 \cdot \cos(36.7^\circ) = 2400 \text{ (Вт)};$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi) = 3000 \cdot \sin(36.7^\circ) = 1800 \text{ (ВАр)}.$$

У ланцюзі на рис. 2.8 задані:  $U=120$  В;  $R_1=6$  Ом;  $R_2=12$  Ом;  $R_3=20$  м,  $x=8$  Ом;  $x=9$  Ом. Визначити струми в гілках і в нерозгалуженій частині ланцюга, обчислити повну, активну й реактивну потужності, побудувати векторну діаграму.

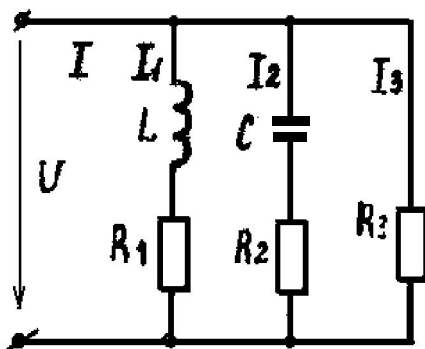


Рисунок 2.8

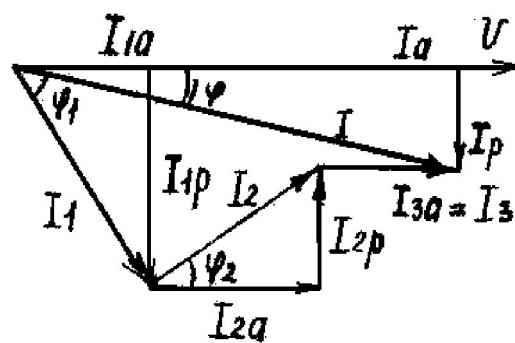


Рисунок 2.9

## Рішення

Визначити повні опори й кути зрушення фаз у гілках:

$$z_1 = \sqrt{R_1^2 + x_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (Ом)}; \varphi_1 = \arctg\left(\frac{x_L}{R_1}\right) = \arctg\left(\frac{8}{6}\right) = 53.13^\circ;$$

$$z_2 = \sqrt{R_2^2 + x_C^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (Ом)}; \varphi_2 = \arctg\left(\frac{-x_C}{R_2}\right) = \arctg\left(\frac{-9}{12}\right) = -36.87^\circ;$$

$$z_3 = R_3 = 20 \text{ (Ом)}; \varphi = 0^\circ.$$

Струми в гілках:

$$I_1 = \frac{U}{z_1} = \frac{120}{10} = 12 \text{ (А)}; I_2 = \frac{U}{z_2} = \frac{120}{15} = 8 \text{ (А)}; I_3 = \frac{U}{z_3} = \frac{120}{20} = 6 \text{ (А)}.$$

Активні й реактивні складові струмів:

$$I_{1a} = I_1 \cdot \cos(\varphi_1) = 12 \cdot \cos(53.13^\circ) = 7.2 \text{ (А)};$$

$$I_{1p} = I_1 \cdot \sin(\varphi_1) = 12 \cdot \sin(53.13^\circ) = 9.6 \text{ (А)};$$

$$I_{2a} = I_2 \cdot \cos(\varphi_2) = 8 \cdot \cos(-36.87^\circ) = 6.4 \text{ (А)};$$

$$I_{2p} = I_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 8 \cdot \sin(-36.87^\circ) = -4.8 \text{ (А)};$$

$$I_{3a} = I_3 \cdot \cos(\varphi_3) = 6 \cdot \cos(0^\circ) = 6 \text{ (А)};$$

$$I_{3p} = I_3 \cdot \sin(\varphi_3) = 6 \cdot \sin(0^\circ) = 0 \text{ (А)}.$$

Активна й реактивна складові загального струму:

$$I_a = I_{1a} + I_{2a} + I_{3a} = 7.2 + 6.4 + 6.0 = 19.6 \text{ (А)};$$

$$I_p = I_{1p} + I_{2p} + I_{3p} = 9.6 - 4.8 + 0 = 4.8 \text{ (А)}.$$

Струм у нерозгалуженій частині ланцюга:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{19.6^2 + 4.8^2} = 20.18 \text{ (А)}.$$

Повна потужність:

$$S = U \cdot I = 120 \cdot 20.18 = 2421.6(\text{ВА}).$$

Коефіцієнт потужності:

$$\cos(\varphi) = \frac{I_a}{I} = \frac{19.6}{20.18} = 0.97$$

Активна й реактивна потужність

$$P = S \cdot \cos(\varphi) = 2421.6 \cdot 0.97 = 2351.4(\text{Вт});$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2421.6^2 - 2351.4^2} = 579.0(\text{ВАр}).$$

Векторна діаграма побудована на рис. 2.9.

У ланцюзі на рис. 2.10 задані:  $U=200$  В;  $R_1=4,87$  Ом;  $R_2=20$  Ом;  $R_3=12$  Ом;  $x_1=11,12$  Ом;  $x_3=16$  Ом;  $x_2=15$  Ом. Визначити струми. Перевірити баланс потужності. Побудувати векторну діаграму.

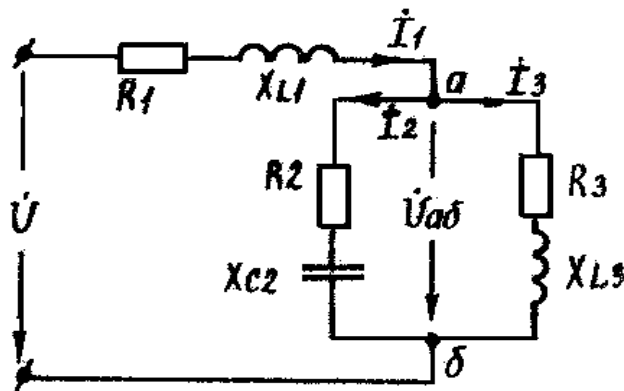


Рисунок 2.10

### Рішення

Комплексні опори гілок:

$$z_1 = 4.87 + j11.12 = 14.14e^{j66.3^\circ};$$

$$z_2 = 20.00 - j15.00 = 25.00e^{-j36.9^\circ};$$

$$z_3 = 12.00 + j16.00 = 20.00e^{j53.1^\circ}.$$

Комплексні опори розгалуженої ділянки й всього ланцюга:

$$\underline{Z}_{a6} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{25.00e^{-j36.9^\circ} \cdot 20.00e^{j53.1^\circ}}{25.00e^{-j36.9^\circ} + 20.00e^{j53.1^\circ}} = 15.62e^{j14.4^\circ} = 15.13 + j3.88;$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{a6} = 4.87 + j11.12 + 15.13 + j3.88 = 20.00 + j15.00 = 25.00e^{j36.9^\circ}.$$

Будемо вважати, що вектор заданої напруги  $\underline{U}$  спрямований по речовинній позитивній півосі комплексної площини, тобто прийmemo  $\underline{U} = 200\text{В}$ .

Струм нерозгалуженої частини ланцюга (він же струм першої гілки):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{200}{25e^{j36.9^\circ}} = 8e^{-j36.9^\circ} = 6.40 - j4.80 \text{ (А)}.$$

Напруга на розгалуженій ділянці:

$$\underline{U}_{a6} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{a6} = 8e^{-j36.9^\circ} \cdot 15.62e^{j14.4^\circ} = 125e^{-j22.5^\circ}.$$

Струми другої й третьої гілок:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{a6}}{\underline{Z}_2} = \frac{125e^{-j22.5^\circ}}{25e^{-j36.9^\circ}} = 5.0e^{j14.4^\circ} = 4.84 + j1.24;$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{a6}}{\underline{Z}_3} = \frac{125e^{-j22.5^\circ}}{25e^{-j53.1^\circ}} = 6.25e^{-j75.6^\circ} = 1.55 - j6.05.$$

Комплекс повної потужності і її складові:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 200 \cdot 8e^{j36.9^\circ} = 1600e^{j36.9^\circ} = 1280 + j960;$$

$$P = 1280(\text{Вт}); Q = 960(\text{ВАр}).$$

Активна й реактивна потужність в окремих гілках:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 4.87 \cdot 8^2 = 311.68 (\text{Вт});$$

$$Q_1 = x_{L_1} I_1^2 = 11.12 \cdot 8^2 = 711.68 (\text{ВАр});$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 20.0 \cdot 5.0^2 = 500.00 (\text{Вт});$$

$$Q_2 = -x_{C_2} I_2^2 = -15.0 \cdot 5.0^2 = -375.00 (\text{ВАр});$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 12.0 \cdot 6.25^2 = 468.75 (\text{Вт});$$

$$Q_3 = x_{L_3} I_3^2 = 16.0 \cdot 6.25^2 = 625.00 (\text{ВАр}).$$

Баланс активної й реактивної потужності:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1280.43 \approx 1280 = P (\text{Вт});$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 961.68 \approx 960 = Q (\text{ВАр}).$$

Векторна діаграма показана на рис. 2.11.

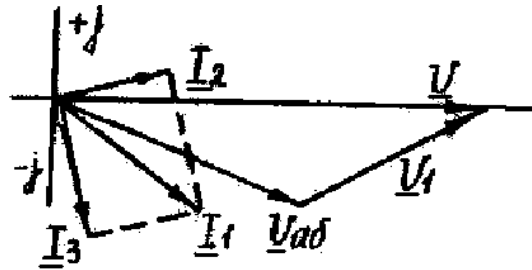


Рисунок 2.11

Розрахувати струми в ланцюзі на рис. 2.12, перевірити баланс потужності, побудувати топографічну діаграму, сполучену з векторною діаграмою струмів.  $\underline{I} = 5 + j5$ ;  $\dot{E} = 100 - j100$ ;  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_1 = 6 \text{ Ом}$ ;  $x_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $x_3 = 8 \text{ Ом}$ .

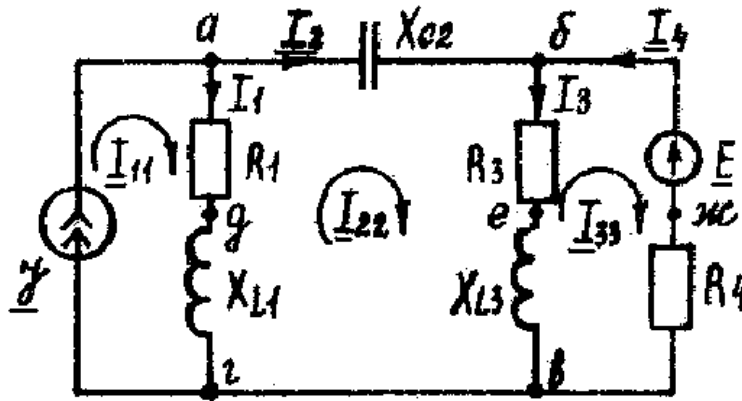


Рисунок 2.12

### Рішення

Застосуємо метод контурних струмів. Розмітимо струми в гілках і контурні струми, як показано на рис. 2.12. урахуємо, що  $\underline{I}_{11} = \underline{I} = 5 + j5$ .

Для двох невідомих контурних струмів, які залишились складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{I}_{22}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2 + \underline{z}_3) - \underline{I}_{33}\underline{z}_3 = \underline{I}\underline{z}_1; \\ -\underline{I}_{22}\underline{z}_3 + \underline{I}_{33}(\underline{z}_1 + \underline{z}_4) = \underline{E}. \end{cases}$$

У цих рівняннях:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= 8 + j6; \underline{z}_2 = -j10; \underline{z}_3 = 6 + j8; \\ \underline{z}_4 &= 10; \underline{I}\underline{z}_1 = (5 + j5)(8 + j6) = 10 + j70. \end{aligned}$$

Після підстановки числових значень одержимо:

$$\begin{aligned} (14 + j4)\underline{I}_{22} - (6 + j8)\underline{I}_{33} &= 10 + j70; \\ -(6 + j8)\underline{I}_{22} + (16 + j8)\underline{I}_{33} &= -100 + j100. \end{aligned}$$

Визначник матриці опорів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (14 + j4) & -(6 + j8) \\ -(6 + j8) & (16 + j8) \end{vmatrix} = 220 + j80.$$



Визначник матриці струмів:

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} (10 + j70) & -(6 + j8) \\ (-100 + j100) & (16 + j8) \end{vmatrix} = -1800 + j1000;$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} (14 + j4) & (10 + j70) \\ -(6 + j8) & (-100 + j100) \end{vmatrix} = -2300 + j1500.$$

Контурні струми:

$$\underline{I}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = -5.766 + j6.642 = 8.796e^{j130.96^\circ} \text{ (A)};$$

$$\underline{I}_{33} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = -7.044 + j9.380 = 11.730e^{j126.90^\circ} \text{ (A)}.$$

Струми в гілках:

$$\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_{22} = 10.766 - j1.642 = 10.89e^{-j8.67^\circ} \text{ (A)};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{22} = -5.766 + j6.642 = 8.796e^{j130.96^\circ} \text{ (A)};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{33} = 1.278 - j2.738 = 3.021e^{-j64.98^\circ} \text{ (A)};$$

$$\underline{I}_4 = -\underline{I}_{33} = 7.044 - j9.380 = 11.730e^{-j53.09^\circ} \text{ (A)}.$$

Повна потужність, що віддається джерелом струму й джерелом ЕРС:

$$\underline{S}_I = \underline{U}_{ar} \underline{I} = \underline{z}_1 \underline{I}_1 \underline{I} = 737.20 - j222.60 \text{ (ВА)};$$

$$\underline{S}_E = \underline{E} \underline{I}_4 = 1642.30 + j233.60 \text{ (ВА)}.$$

Сумарна повна, активна й реактивна потужність джерел:

$$\underline{S} = \underline{S}_I + \underline{S}_E = 2379.50 + j11.00 \text{ (ВА)};$$

$$P = 2379.50 \text{ (Вт)}; Q = 11.00 \text{ (ВАр)}.$$

Сумарна активна й реактивна потужності в гілках:

$$R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 2379.4 \approx P \text{ (Вт)};$$

$$x_{L_1} I_1^2 + x_{C_2} I_2^2 + x_{L_3} I_3^2 = 10.87 \approx Q \text{ (ВАр)}.$$

Баланс потужностей дотримується, отже, струми розраховані правильно.

Для побудови топографічної діаграми обчислимо комплекс потенціалів крапок, позначених на схемі (рис. 2.12), прийнявши:

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_B = 0;$$

$$\dot{\phi}_D = \dot{\phi}_r + jx_{L_1} \dot{I}_1 = 9.852 + j64.596;$$

$$\dot{\phi}_A = \dot{\phi}_D + R_1 \dot{I}_1 = 95.980 + j51.460;$$

$$\dot{\phi}_E = \dot{\phi}_B + jx_{L_3} \dot{I}_3 = 21.900 + j10.220;$$

$$\dot{\phi}_G = \dot{\phi}_E + R_3 \dot{I}_1 = 29.567 + j6.203;$$

$$\dot{\phi}_K = \dot{\phi}_B + R_4 \dot{I}_4 = -70.438 + j93.796.$$

Топографічна діаграма, сполучена з векторами струмів, показана на рис. 2.13.

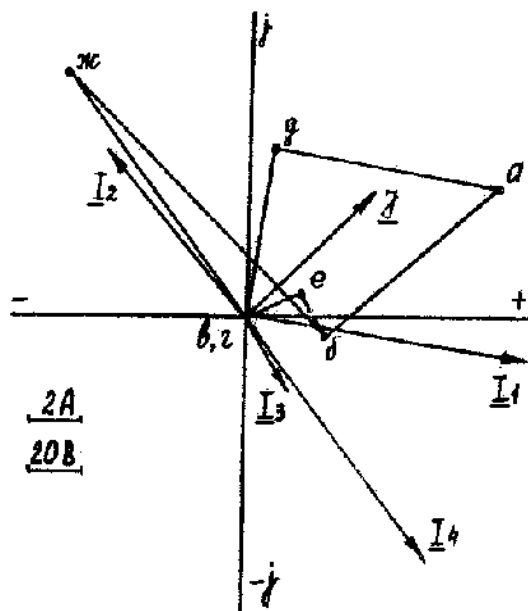


Рисунок 2.13

## 2.5 Контрольне завдання 2

2.5.1. Вважати, що індуктивний зв'язок між котушками відсутній:

а) визначити струми у всіх гілках;

б) побудувати векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг;

в) скласти баланс активних і реактивних потужностей;

г) визначити показання вольтметра.

2.5.2. Вирішити завдання 2.5.1. при урахуванні індуктивного зв'язку між котушками

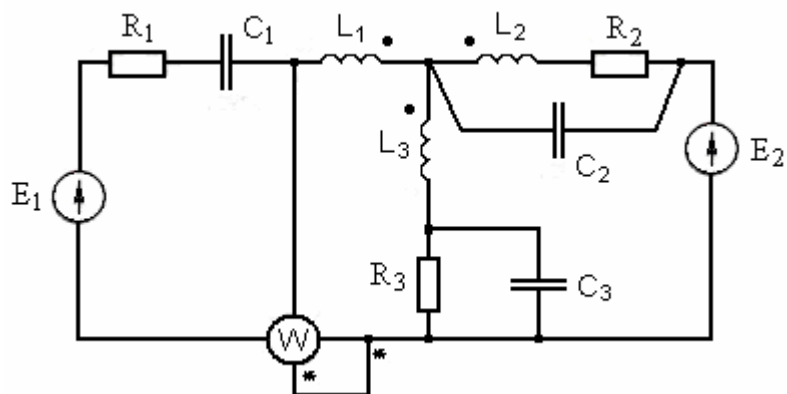


Рисунок 2.14

Таблица 2.1 – Варіанти для контрольного завдання №2

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ бук- ви
$E_1, В$	60	80	100	120	140	160	1
$E_2, В$	120	100	60	160	80	100	2
$\alpha$ , град	30	45	60	90	30	45	3
$L_1$ , мГн	20	30	40	50	60	10	4
$L_2$ , мГн	30	40	60	10	20	50	5
$L_3$ , мГн	50	30	20	20	10	60	6
$R_1$ , Ом	4	5	6	7	8	9	7
$R_2$ , Ом	10	9	8	7	6	5	8
$R_3$ , Ом	8	7	6	5	4	9	9
$C_1$ , мкФ	100	200	300	150	250	100	10
$C_2$ , мкФ	40	80	60	100	60	80	11
$C_3$ , мкФ	150	200	250	300	100	150	12
$k_{12}$	0	0,8	0,6	0,8	0	0,6	13
$k_{13}$	0,6	0	0,5	0,6	0,8	0	14
$k_{23}$	0,5	0,6	0,4	0	0,5	0,4	15

# 3

## **ТРИФАЗНІ ЛАНЦЮГИ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ**

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади***

***Розрахунок трифазного ланцюга при з'єднанні  
зіркою***

***Розрахунок трифазного ланцюга при з'єднанні  
трикутником***

***Контрольне завдання 3***

### **3. ТРИФАЗНІ ЛАНЦЮГИ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ**

#### **3.1 Робоча програма**

1. Поняття про трифазні джерела живлення й про багатофазні ланцюги. Одержання трифазної системи ЕРС. Тимчасова й векторна діаграма трифазної системи ЕРС. Переваги трифазних систем.
2. Трифазний ланцюг. Основні схеми з'єднання трифазних ланцюгів, визначення лінійних і фазних величин. Співвідношення між лінійними й фазними напругами й струмами (для генератора й навантаження).
3. Розрахунок несиметричних трифазних ланцюгів, включених за схемою зірка-зірка з нульовим проводом; за схемою зірка-зірка без нульового проводу.
4. Розрахунок несиметричних трифазних ланцюгів, включених за схемою трикутник.
5. Розрахунок симетричних трифазних ланцюгів.
6. Аномальні випадки несиметрії: обрив фаз і проводів, коротке замикання фаз. Роль нейтрального проводу.
7. Активна, реактивна й повна потужності в трифазних ланцюгах. Вимірювання активної й реактивної потужностей у трифазних ланцюгах.
8. Обертаюче магнітне поле. Принципи дії асинхронного й синхронного двигунів.
9. Поняття про метод симетричних складових. Симетричної складової несиметричної трифазної системи величин. Опори фази різних приймачів струмам прямої, зворотної й нульової послідовності.
10. Розрахунок трифазних ланцюгів методом симетричних складових. Фільтри симетричних складових.

#### **3.2 Загальні положення**

Генерування й споживання електричної енергії більшою мірою здійснюється з використанням трифазних систем ЕРС, напруг і струмів. З урахуванням цього, вивчення процесів, що відбуваються в трифазних ланцюгах, а також оволодіння методами розрахунку цих ланцюгів має велике значення для бакалавра - електрика.

При вивченні трифазних електричних кіл необхідно, у першу чергу, усвідомити поняття трифазного ланцюга як різновиду багатофазного електричного кола, мати уявлення про тимчасову й векторну форми запису трифазної системи ЕРС і їхнє одержання.

Перш ніж розглядати методи розрахунку трифазних електричних кіл, необхідно розібратися зі схемами з'єднань обмоток трифазних джерел і трифазних споживачів, усвідомити поняття фази, лінійних і фазних напруг і струмів, лінійних і нейтральних проводів, засвоїти співвідношення між лінійними й фазними струмами й напругами при з'єднанні за схемою “зірка” і за схемою “трикутник”. Необхідно також чітко розрізняти симетричні й несиметричні електричні кола і їхні особливості, чітко представляти призначення нейтрального проводу. Усвідомивши основні моменти, необхідно переходити до вивчення методів розрахунку трифазних електричних кіл.

Слід зазначити, що для розрахунку трифазних електричних кіл можна використовувати застосування комплексних чисел будь-яких з методів розрахунку складних електричних кіл змінних і однофазного синусоїдального струмів. Однак універсальним методом розрахунку трифазного електричного кола за схемою “зірка-зірка” як з нейтральним проводом, так і без нього є метод вузлової напруги. Цей метод можна застосовувати як для симетричних електричних кіл, так і для несиметричних. При цьому варто чітко засвоїти, що в загальному випадку трифазне електричне коло за схемою “зірка-зірка” можна розглядати як електричне коло із чотирма паралельно включеними гілками, у трьох з яких діють симетрична трифазна система ЕРС, а четверта гілка являє собою нейтральний провід, опір якого може бути як рівним нескінченності (при відсутності), так і рівним нулю (при з'єднанні нейтралі генератора й нейтралі споживача).

Розрахунок трифазних електричних кіл, у яких споживач з'єднаний за схемою “трикутник” у загальному випадку (при наявності опорів лінійних проводів), виконується також з використанням методу двох вузлів. Для цього необхідно вміти перетворити з'єднання “трикутник” в еквівалентне з'єднання “зіркою”. Крім того, необхідно усвідомити, що для розрахунку трифазних електричних кіл, навантаження, в які з'єднані

“трикутником”, доцільно використовувати закон Ома й закони Кірхгофа (наприклад, при опорі лінійних проводів, близькому до нуля).

У процесі вивчення методів розрахунку трифазних ланцюгів необхідно чітко уявляти, що симетричні ланцюги є окремим випадком несиметричних електричних кіл, а із цього випливають деякі особливості, які дозволяють значно спростити розрахунок: можна виконувати розрахунок напруг і струмів тільки для однієї фази, маючи на увазі, що в інших фазах струми й напруги такі ж по величині й відрізняються тільки зрушенням на кути  $\pm 120^\circ$ .

При особливих випадках несиметрії трифазних ланцюгів: (обрив фаз і проводів, коротке замикання фази) варто пам'ятати, що розрахунок виконується аналогічно розглянутому вище, з попереднім аналізом і необхідними перетвореннями.

Велике значення при вивченні трифазних електричних кіл мають питання визначення активної, реактивної й повної потужностей. Необхідно усвідомити схеми вимірювання активної й реактивної потужностей у симетричному й несиметричному трифазному електричному колах. При цьому необхідно пам'ятати, що показання ватметра дорівнює дійсній частині від добутку комплексного діючого значення струму, при установці вибору позитивних напрямків напруги й току від генераторних затискачів обмоток ватметра до негенераторного.

Одержання обертового магнітного поля за допомогою трифазної системи струмів є одним з переваг трифазних ланцюгів. Необхідно чітко представляти процес одержання обертового магнітного поля, знати умови, при яких воно виникає, а також принципи дії асинхронного й синхронного двигунів.

Варто знати й пам'ятати, що в трифазних ланцюгах, що містять асинхронні й синхронні машини, а також трифазні трансформатори, опір фази указаних елементів стає невизначеним, залежним від ступеня несиметрії напруг і струмів. У цьому випадку метод двох вузлів застосувати не можна, і тому в розрахунку використовують метод симетричних складових. Суть цього методу полягає в тім, що будь-яку несиметричну трифазну систему ЕРС, напруг, струмів можна розкласти на три симетричні системи, що складаються з прямої, зворотної й нульової по-



слідовності. Надалі розрахунок виробляється для кожної симетричної складової (відомими методами), а результат знаходять шляхом накладення трьох симетричних режимів прямої, зворотної й нульової послідовностей.

### 3.3 Основні співвідношення

#### 1. Миттєві значення й комплекси трифазної симетричної системи напруг:

$$\begin{aligned} u_A &= U_m \sin(\omega t); \underline{U}_A = \underline{U}; \\ u_B &= U_m \sin(\omega t - 120^\circ); \underline{U}_B = \underline{U}e^{-j120^\circ}; \\ u_C &= U_m \sin(\omega t + 120^\circ); \underline{U}_C = \underline{U}e^{j120^\circ}. \end{aligned}$$

#### 2. Співвідношення між лінійними й фазними напругами й струмами. При з'єднанні фаз зіркою (загальний випадок):

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A;$$

а фазні струми одночасно є й лінійними струмами відповідно.

Для симетричного навантаження між лінійними й фазними напругами й струмами існують наступні залежності:

$$U_l = \sqrt{3}U_\phi; I_l = I_\phi.$$

При з'єднанні фаз трикутником (загальний випадок):

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{BC}; \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC},$$

а лінійні напруги є відповідно фазними напругами.

У випадку симетричного навантаження між лінійними й фазними напругами й струмами мають наступні залежності:

$$U_l = U_\phi; I_l = \sqrt{3}I_\phi.$$

**3. Зсув нейтралі** визначається вираженням:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{y}_A + \underline{U}_B \underline{y}_B + \underline{U}_C \underline{y}_C}{\underline{y}_A + \underline{y}_B + \underline{y}_C + \underline{y}_N},$$

$\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  – фазні напруги генератора;

$\underline{y}_A, \underline{y}_B, \underline{y}_C, \underline{y}_N$  – провідності окремих фаз ланцюга й нейтрального (нульового) проводу.

**4. Струми у фазах і нейтральному проводі:**

$$\underline{I}_A = (\underline{U}_A - \underline{U}_N) \underline{y}_A; \quad \underline{I}_B = (\underline{U}_B - \underline{U}_N) \underline{y}_B; \quad \underline{I}_C = (\underline{U}_C - \underline{U}_N) \underline{y}_C; \quad \underline{I}_N = \underline{U}_N \underline{y}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$$

**5. Потужності в трифазних ланцюгах** визначаються вираженнями:

а) активна потужність –

$$P = P_A + P_B + P_C + P_N = \operatorname{Re}(\underline{U}_A \hat{I}_A + \underline{U}_B \hat{I}_B + \underline{U}_C \hat{I}_C + \underline{U}_N \hat{I}_N);$$

б) реактивна потужність –

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_N = \operatorname{Im}(\underline{U}_A \hat{I}_A + \underline{U}_B \hat{I}_B + \underline{U}_C \hat{I}_C + \underline{U}_N \hat{I}_N);$$

в) повна потужність –

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2};$$

$$\underline{S} = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C + \underline{S}_N = \underline{U}_A \hat{I}_A + \underline{U}_B \hat{I}_B + \underline{U}_C \hat{I}_C + \underline{U}_N \hat{I}_N.$$

**6. Розкладання несиметричної системи  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  (ЕРС, напруги, струми) на системи прямої, зворотної й нульової послідовності:**

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{3}(\underline{A} + a\underline{B} + a^2\underline{C}); \underline{B}_1 = a^2\underline{A}_1; \underline{C}_1 = a\underline{A}_1;$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{3}(\underline{A} + a^2\underline{B} + a\underline{C}); \underline{B}_2 = a\underline{A}_2; \underline{C}_2 = a^2\underline{A}_2;$$

$$\underline{A}_0 = \underline{B}_0 = \underline{C}_0 = \frac{1}{3}(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}).$$

**3.4 Типові приклади**

**3.4.1 Розрахунок трифазного ланцюга при з'єднанні зіркою**

До симетричного трифазного генератора з фазної ЕРС  $E=220$  В і із внутрішнім опором фази  $z_0=(0.5+j)$  Ом підключене несиметричне навантаження, з'єднане в зірку з нульовим проводом (рис. 3.1(a)). Опори фаз навантаження –  $z_A=(6+j8)$  Ом,  $z_B=(5-j5)$  Ом,  $z_C=8$  Ом. Опір кожного проводу лінії –  $z_{np}=(0.3+j0.4)$  Ом, а опір нейтрального проводу –  $z_N=0.5$  Ом. Визначити струми й напруги на кожній фазі навантаження й генератора, а також активну, реактивну й повну потужності навантаження й генератора при наявності нейтрального проводу й при його обриві. Побудувати векторну діаграму для кожного випадку.

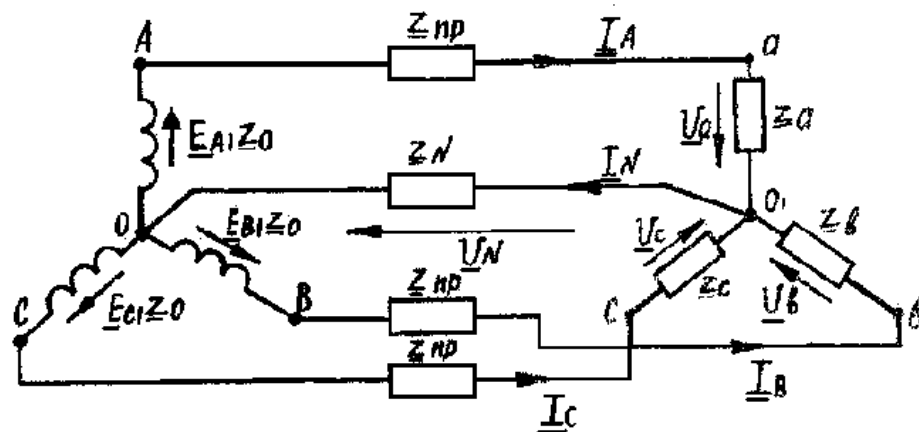


Рисунок 3.1а

## Рішення

1. Записуємо фазні ЕРС генератора в комплексній формі:

$$\underline{E}_A = E_\Phi = 220 \text{ (В)}; \underline{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ (В)}; \underline{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ (В)}.$$

2. Визначаємо комплексні провідності фаз трифазного ланцюга:

$$\underline{y}_A = \frac{1}{\underline{z}_A + \underline{z}_0 + \underline{z}_{np}} = \frac{1}{6.8 + j9.4} = 0.0862e^{-j54.1^\circ} = 0.050 - j0.070;$$

$$\underline{y}_B = \frac{1}{\underline{z}_B + \underline{z}_0 + \underline{z}_{np}} = \frac{1}{5.8 - j3.6} = 0.1465e^{j31.8^\circ} = 0.124 + j0.077;$$

$$\underline{y}_C = \frac{1}{\underline{z}_C + \underline{z}_0 + \underline{z}_{np}} = \frac{1}{8.8 + j1.4} = 0.1122e^{-j9.0^\circ} = 0.111 - j0.017;$$

$$\underline{y}_N = \frac{1}{\underline{z}_N} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

При наявності нейтрального проводу

3. Визначаємо напругу зсуву нейтралі:

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{E}_A \underline{y}_A + \underline{E}_B \underline{y}_B + \underline{E}_C \underline{y}_C}{\underline{y}_A + \underline{y}_B + \underline{y}_C + \underline{y}_N} = \\ &= \frac{220 \cdot 0.0862e^{-j54.1} + 220e^{-j120} 0.1465e^{j31.8} + 220e^{j120} 0.1122e^{-j9}}{0.050 - j0.070 + 0.124 + j0.077 + 0.111 - j0.017 + 2} = \\ &= \frac{3.286 - j24.526}{2.286 - j0.010} = 10.830e^{-j82.12} = 1.48 - j10.72. \end{aligned}$$

4. Знаходимо струми:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= (\underline{E}_A - \underline{U}_N) \underline{y}_A = (220 - 1.48 + j10.72) \cdot 0.0862e^{-j54.1} = \\ &= 18.86e^{-51.3} = 11.79 - j14.72; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_B &= (\underline{E}_B - \underline{U}_N) \underline{y}_B = (-110 - j190.52 - 1.48 + j10.72) \cdot 0.1465e^{j91.8} = \\ &= 30.99e^{-j90} = -j3099;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= (\underline{E}_C - \underline{U}_N) \underline{y}_C = (-110 + j190.52 - 1.48 + j10.72) \cdot 0.1122e^{-j9} = \\ &= 25.81e^{j109.98} = -8.82 + j24.25;\end{aligned}$$

$$\underline{I}_N = \underline{U}_N \underline{y}_N = 10.83e^{-j82.12} \cdot 2 = 21.66e^{-j82.12} = 2.97 - j21.45;$$

Перевірка показує, що  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C - \underline{I}_N = 0$ ;

5. Напруга на фазах навантаження:

$$\underline{U}_{a01} = \underline{I}_A \underline{z}_A = 18.86e^{-j51.3} (6 + j8) = 188.60e^{j1.83};$$

$$\underline{U}_{b01} = \underline{I}_B \underline{z}_B = 30.99e^{-j90} (5 - j5) = 219.13e^{-j139};$$

$$\underline{U}_{c01} = \underline{I}_C \underline{z}_C = 25.81e^{j109.98} \cdot 8 = 206.48e^{j109.98}.$$

6. Визначаємо напругу на кожній фазі генератора:

$$\underline{U}_{A0} = \underline{E}_A - \underline{I}_A \underline{z}_0 = 220 - 18.86e^{-j51.3} (0.5 + j) = 199.43e^{-j1.27};$$

$$\underline{U}_{B0} = \underline{E}_B - \underline{I}_B \underline{z}_0 = (-110 - j190.52) - 30.99e^{-j90} (0.5 + j) = 224.74e^{-j128.85};$$

$$\underline{U}_{C0} = \underline{E}_C - \underline{I}_C \underline{z}_0 = -110 + j190.52 - 25.81e^{j108.98} (0.5 + j) = 203.66e^{j113.56}.$$

При обриві нейтрального проводу

7. Напруга зсуву нейтралі:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{E}_A \underline{y}_A + \underline{E}_B \underline{y}_B + \underline{E}_C \underline{y}_C}{\underline{y}_A + \underline{y}_B + \underline{y}_C + \underline{y}_N} = \frac{24.745e^{-j82.37}}{0.285e^{-j2.04}} = 86.68e^{-j80.33} = 14.56 - j85.45.$$

8. Визначаємо струми:

$$\begin{aligned}\underline{I}'_A &= (\underline{E}_A - \underline{U}_N) \underline{y}_A = (220 - 14.56 + j85.45) \cdot 0.0862e^{-j54.1} = 19.18e^{-j31.3} = \\ &= 16.35 - j10.02;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}'_B &= (\underline{E}_B - \underline{U}_N) \underline{y}_B = (-110 - j190.52 - 14.56 + j85.45) \cdot 0.1465e^{j91.8} = \\ &= 23.73e^{-j108.05} = -7.35 - j22.56;\end{aligned}$$

$$\underline{I}'_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_N) \underline{y}_C = (-110 + j190.52 - 14.56 + j85.45) \cdot 0.1122e^{-j9} =$$

$$= 33.97e^{j105.3} = -8.96 + j32.77;$$

$$\underline{I}'_N = \underline{U}_N \underline{y}_N = 10.83e^{-j82.12} \cdot 2 = 21.66e^{-j82.12} = 2.97 - j21.45.$$

9. Напряга на фазах навантаження:

$$\underline{U}'_{a01} = \underline{I}'_A \underline{Z}_A = 19.18e^{-j31.5} (6 + j8) = 191.80e^{j21.6};$$

$$\underline{U}'_{b01} = \underline{I}'_B \underline{Z}_B = 23.73e^{-j108.05} (5 - j5) = 167.77e^{-j153.05};$$

$$\underline{U}'_{c01} = \underline{I}'_C \underline{Z}_C = 33.93e^{j105.30} \cdot 8 = 271.44e^{j105.30}.$$

10. Напряга на фазах генератора:

$$\underline{U}'_{A0} = \underline{E}_A - \underline{I}'_A \underline{Z}_0 = 220 - 19.18e^{-j31.5} \cdot 1.12e^{j63.4} = 202.12e^{-j3.2};$$

$$\underline{U}'_{B0} = \underline{E}_B - \underline{I}'_B \underline{Z}_0 = (-110 - j190.52) - 23.73e^{-j108.05} \cdot 1.12e^{j63.4} = 214.83e^{-j126.86};$$

$$\underline{U}'_{C0} = \underline{E}_C - \underline{I}'_C \underline{Z}_0 = -110 + j190.52 - 33.97e^{j108.98} \cdot 1.12e^{j63.4} = 197.00e^{j111.7}.$$

Векторні діаграми для обох випадків наведені на рис. 3.1( б-в).

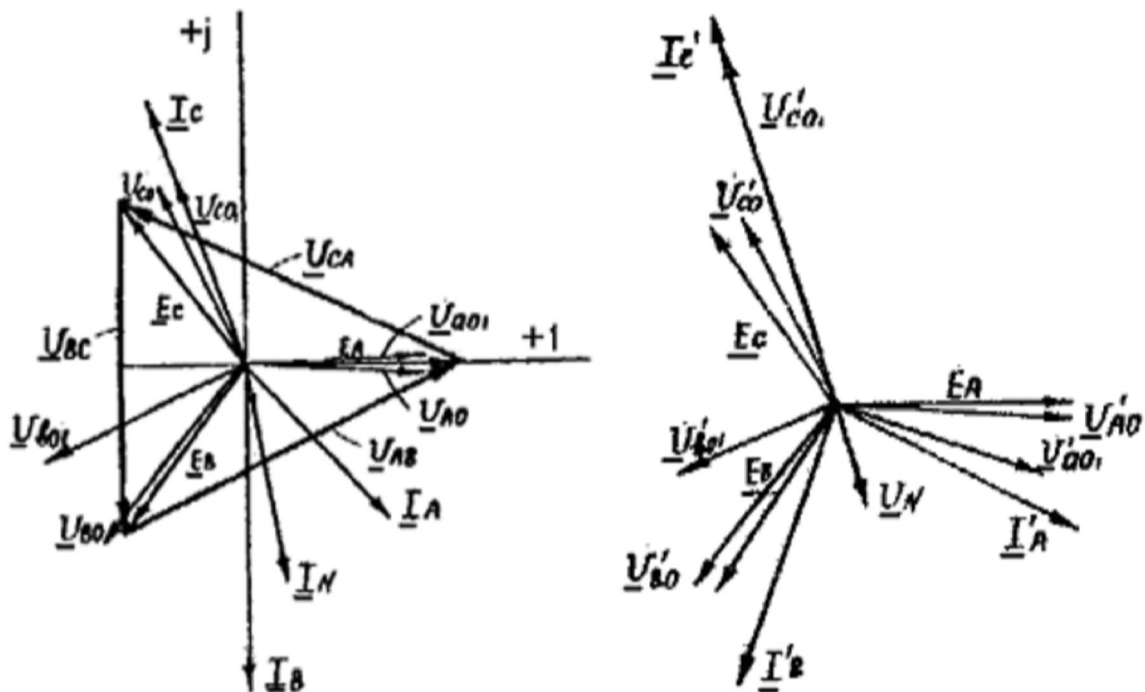


Рисунок 3.1 б-в

### 3.4.2 Розрахунок трифазного ланцюга при з'єднанні трикутником

Визначити показання приладів електродинамічної системи, включених у ланцюг (рис. 3.2(a)), якщо лінійна напруга симетричного генератора  $U_{\text{л}}=380$  В, опору фаз приймача  $z_{ab}=5$  Ом,  $z_{bc}=(4+j3)$  Ом,  $z_{ca}=(4-j3)$  Ом, опір проводів лінії передачі  $z_{\text{л}}=(0.5+j0.5)$  Ом. Побудувати векторну діаграму ланцюга. Опором фаз генератора зневажити.

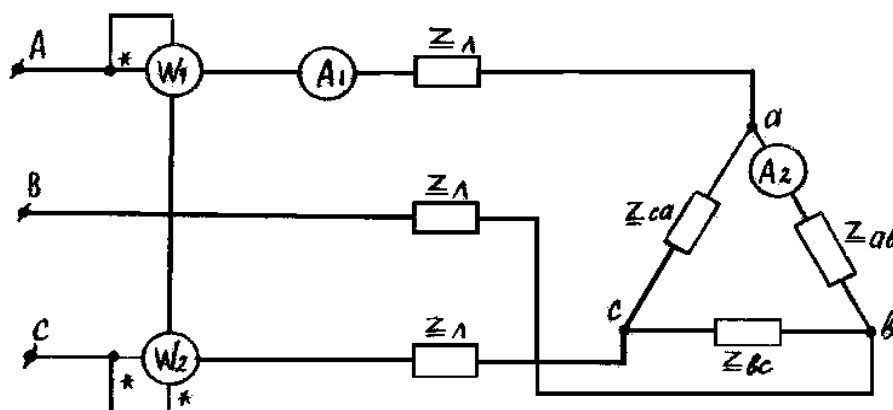


Рисунок 3.2а

#### Рішення

1. Заміняємо трикутник опорів споживача еквівалентною зіркою:

$$z_a = \frac{z_{ab} \cdot z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} = \frac{5(4 - j3)}{5 + 4 + j3 + 4 - j3} = 1.54 - j1.15(\text{Ом});$$

$$z_b = \frac{z_{ab} \cdot z_{bc}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} = \frac{5(4 + j3)}{5 + 4 + j3 + 4 - j3} = 1.54 + j1.15(\text{Ом});$$

$$z_c = \frac{z_{bc} \cdot z_{ca}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}} = \frac{(4 + j3)(4 - j3)}{5 + 4 + j3 + 4 - j3} = 1.92(\text{Ом}).$$

2. Записуємо фазні напруги генератора:

$$\underline{U}_A = U_\phi = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = 220(\text{В});$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_A e^{-j120} = -110 - j190.5 \text{ (В)};$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_A e^{j120} = -110 + j190.5 \text{ (В)};$$

3. Визначаємо провідності фаз еквівалентної схеми:

$$\underline{y}_A = \frac{1}{z_{\pi} + z_a} = \frac{1}{0.5 + j0.5 + 1.54 - j1.15} = 0.467e^{j17.7} = 0.444 + j0.142 \text{ (См)};$$

$$\underline{y}_B = \frac{1}{z_{\pi} + z_b} = \frac{1}{0.5 + j0.5 + 1.54 + j1.15} = 0.382e^{-j39.0} = 0.296 - j0.240 \text{ (См)};$$

$$\underline{y}_C = \frac{1}{z_{\pi} + z_c} = \frac{1}{0.5 + j0.5 + 1.92} = 0.404e^{-j11.7} = 0.396 - j0.082 \text{ (См)}.$$

4. Знаходимо напругу зсуву нейтралі в еквівалентній схемі:

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{U}_A \underline{y}_A + \underline{U}_B \underline{y}_B + \underline{U}_C \underline{y}_C}{\underline{y}_A + \underline{y}_B + \underline{y}_C} = \\ &= \frac{220 \cdot 0.467e^{j17.7} + 220e^{-j120} 0.382e^{j39.0} + 220e^{j120} 0.404e^{-j11.7}}{0.444 + j0.142 + 0.296 - j0.240 + 0.396 - j0.082} = \\ &= 74.700e^{j104.66} = -18.91 + j72.27 \text{ (В)}. \end{aligned}$$

5. Струми у фазах еквівалентної схеми:

$$\begin{aligned} \underline{I}'_A &= (\underline{U}_A - \underline{U}_N) \underline{y}_A = (220 + 18.91 - j72.27) \cdot 0.467e^{j17.7} = \\ &= 116.56e^{j0.9} = 116.54 + j1.83 \text{ (А)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}'_B &= (\underline{U}_B - \underline{U}_N) \underline{y}_B = (-110 - j190.52 + 18.91 - j72.27) \cdot 0.382e^{j39.0} = \\ &= 106.24e^{-j148.1} = -90.19 - j56.14 \text{ (А)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}'_C &= (\underline{U}_C - \underline{U}_N) \underline{y}_C = (-110 + j190.52 + 18.91 - j72.27) \cdot 0.404e^{-j11.7} = \\ &= 60.10e^{j115.6} = -25.96 + j54.2 \text{ (А)}. \end{aligned}$$

Правильність розрахунку перевіряється співвідношенням  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ , що в дійсності й має місце:

$$116.54 + j1.83 - 90.19 - j56.14 - 25.9 + j54.2 \approx 0.$$



6. Визначаємо фазні напруги еквівалентної схеми:

$$\underline{U}_{a01} = \underline{I}_A \underline{Z}_A = 116.56e^{j0.9} (1.54 - j1.15) = 223.8e^{-j36} = 181.1 - j131.5 \text{ (В)};$$

$$\underline{U}_{b01} = \underline{I}_B \underline{Z}_B = 106.24e^{-j148.1} (1.54 + j1.15) = 203.8e^{-j111.3} = -73.9 - j189.9 \text{ (В)};$$

$$\underline{U}_{c01} = \underline{I}_C \underline{Z}_C = 60.10e^{j115.6} 8 = 115.40e^{j115.6} = -49.86 + j104.10 \text{ (В)}.$$

7. Знаходимо лінійні напруги еквівалентної зірки, які для вихідної схеми трикутник будуть одночасно й лінійними, і фазними напругами:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{a01} - \underline{U}_{b01} = 181.10 - j131.5 + 73.9 + j189.9 = 255.0 + j38.4 = \\ &= 261.6e^{j12.9} \text{ (В)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_{b01} - \underline{U}_{c01} = -73.9 - j189.9 + 49.8 - j104.1 = -24.0 - j294.0 = \\ &= 295.0e^{-j94.6} \text{ (В)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ca} &= \underline{U}_{c01} - \underline{U}_{a01} = -49.8 + 104.1 - 181.1 + j131.5 = 230.96 + j235.6 = \\ &= 329.9e^{j134.4} \text{ (В)}. \end{aligned}$$

8. Обчислюємо фазні струми вихідної схеми:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{261.6e^{j12.9}}{5} = 52.32e^{j12.9} = 51.00 + j11.68 \text{ (А)};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{295.0e^{-j94.6}}{4 + j3} = 59.00e^{-j131.5} = -39.10 - j44.20 \text{ (А)};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{329.9e^{j134.4}}{4 - j3} = 65.98e^{j71.3} = -65.20 + j10.00 \text{ (А)}.$$

Перевірка  $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 51.00 + j11.68 + 65.20 - j10.00 = 116.20 + j1.68$ , що свідчить про правильність розрахунку (є невелика погрішність обчислень).

На підставі виконаного розрахунку амперметр  $A_1$  показує 116.56 (А),  $A_2$  -52.32 (А).

9. Показання ватметра дорівнює речовинній частині добутку комплексу напруги, прикладеного до обмотки напруги приладу, на сполучений комплекс струму, що протікає через його струмову обмотку. На підставі цього маємо:

$$P_1 = \operatorname{Re} \left[ \underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^* \right] = \operatorname{Re} \left[ (\underline{U}_A - \underline{U}_B) \underline{I}_A^* \right] = \operatorname{Re} \left[ 380e^{j30} 116.56e^{-j0.5} \right] = 38550 \text{ (Вт)};$$

$$P_2 = \operatorname{Re} \left[ \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_A^* \right] = \operatorname{Re} \left[ (\underline{U}_C - \underline{U}_B) \underline{I}_C^* \right] = \operatorname{Re} \left[ 380e^{j90} 60.10e^{-j115.6} \right] = 20596 \text{ (Вт)}.$$

Векторна діаграма ланцюга показана на рис. 3.2б.

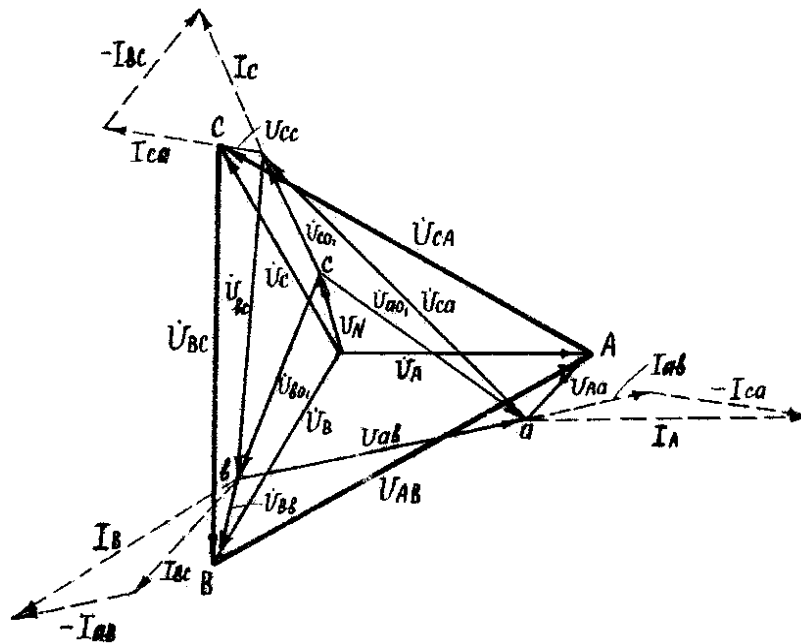


Рисунок 3.2 б

Спочатку на комплексній площині були побудовані вектори фазних і лінійних напруг джерела, потім виконана побудова напруги зсуву нейтралі, фазних і лінійних напруг на проводах лінії. Вектори фазних струмів побудовані із крапок, там же показані й лінійні струми.

### 3.5 Контрольне завдання 3

3.5.1 До трифазного ланцюга, опір лінійних проводів  $\underline{z}_л$  (кожний), приєднані навантаження із трьох опорів ( $z_{ab}, z_{bc}, z_{ca}$ ), з'єднані в трикут-

ник (рис. 3.3). Лінійні напруги  $U_L$  на вході трифазного ланцюга симетричні.

Потрібно:

- а) обчислити лінійні й фазні струми;
- б) побудувати топографічну діаграму напруг і векторну діаграму струмів;
- в) знайти показання ватметрів;
- г) упевнитися в балансі активних потужностей;
- д) розкласти несиметричні системи лінійних і фазних струмів на симетричні складові.

3.5.2. Вирішити завдання 3.5.1. за умови, що відбувся обрив лінійного проводу С.

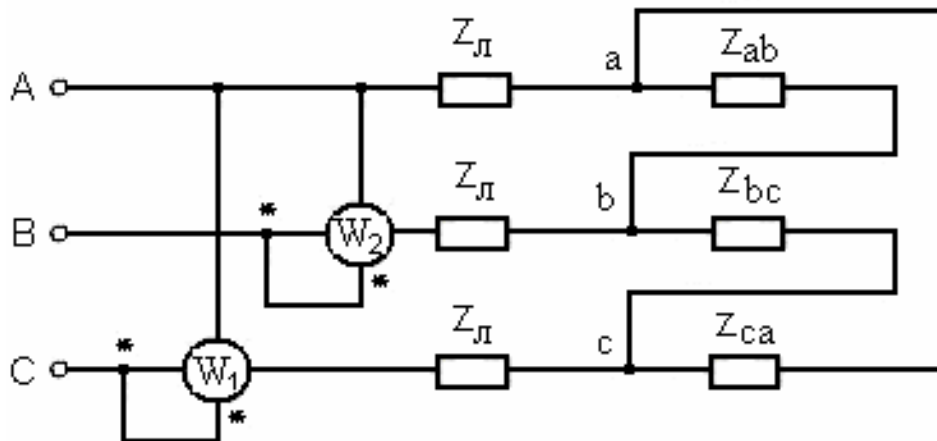


Рисунок 3.3

Таблица 3.1 – Варіанти контрольного завдання №3

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ бу- кви
$U_{л},$ $В$	380	600	3000	6000	380	600	1
$Z_{л},$ $ОМ$	$2+j2$	$2+j4$	$4+j2$	$3+j3$	$3+j2$	$2+j3$	2
$Z_{аб},$ $ОМ$	10	15	20	25	30	40	3
$Z_{bc},$ $ОМ$	$j10$	$-j20$	$-j10$	$j25$	$j10$	$j20$	4
$Z_{ca},$ $ОМ$	$-j10$	$j10$	$j20$	$-j25$	$-j20$	$-j40$	5

**ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ, ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ**

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок чотириполюсників,  
фільтрів***

***Контрольне завдання***

## 4 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ, ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

### 4.1 Робоча програма

Поняття про чотириполюсники.

Системи рівнянь чотириполюсника. Позитивні напрямки для струмів і напруг при записі рівнянь чотириполюсника в різних формах.

1. Рівняння чотириполюсника в А- формі. Визначення коефіцієнтів А-, Y-, Z-, G-, H-, і В- форм запису рівнянь чотириполюсника через параметри холостого ходу й короткого замикання. Визначення коефіцієнтів однієї форми рівнянь через коефіцієнти іншої форми.
2. Схеми заміщення чотириполюсника. Т- і П схеми заміщення пасивного чотириполюсника.
3. Вхідний опір чотириполюсника при довільнім навантаженні. Характеристичні параметри чотириполюсника: характеристичні опори, коефіцієнт загасання й коефіцієнт фази, передатна функція.
4. Каскадне з'єднання чотириполюсників, засноване на узгодженні характеристичних опорів. Умова регулярності з'єднання чотириполюсників.
5. Основні визначення й класифікація електричних фільтрів. Умова пропускання для реактивного фільтра.
6. Фільтри типу К. К- фільтри НЧ і ВЧ, що смугасто пропускають і смугасто загороджують К- фільтри. Якісне визначення К- фільтра.
7. Фільтри типу m. Каскадне включення фільтрів, RC- фільтри.

### 4.2 Загальні положення

У різних областях електротехніки часто застосовуються апарати й пристрої із двома ділянками ланцюга, тобто чотириполюсники. Вивчення теорії чотириполюсників дає можливість аналізувати всілякі за структурою й принципом дії системи. При цьому складний ланцюг розчленовується на більше прості частини, характеристики яких дають повне подання про режим роботи всього ланцюга.

При вивченні теорії чотириполюсників насамперед необхідно звернути увагу на основні визначення й класифікацію. Необхідно усвідомити системи рівнянь чотириполюсника, визначення коефіцієнтів А-,

Y-, Z-, G-, H-, і V- форм запису рівнянь чотириполюсника через параметри холостого ходу й короткого замикання, а також визначення коефіцієнтів однієї форми рівнянь через коефіцієнти іншої форми. При цьому необхідно звернути увагу на позитивні напрямки для струмів і напруг при записі рівнянь чотириполюсників у різних формах.

Для полегшення дослідження загальних властивостей розглянутого ланцюга необхідно усвідомити побудову різних схем заміщення на підставі рівнянь чотириполюсника. При цьому необхідно розглянути методика визначення параметрів схем заміщення через коефіцієнти рівнянь чотириполюсника й методика знаходження коефіцієнтів рівнянь через параметри схем заміщення. Аналіз властивостей і характеристик чотириполюсників варто здійснювати, опанувавши розділом «Характеристичні параметри чотириполюсника». При цьому також необхідно звернути особливу увагу на каскадне з'єднання чотириполюсників, чітко представляти умови їхнього каскадного з'єднання.

При вивченні розділу «Каскадні фільтри» необхідно спочатку звернути увагу на визначення й класифікацію фільтрів. Варто мати на увазі, що теорія електричних фільтрів базується на теорії чотириполюсників. Розглядаючи К- фільтри необхідно чітко представляти умови функціонування НЧ, ВЧ, що смугасто пропускають і смугасто загороджують фільтрів. Вивчаючи m- фільтри необхідно мати на увазі, що звичайно напівланки m-m- фільтрів включаються каскадно з К- фільтрами. При цьому необхідно звернути увагу на два варіанти m- ланок: послідовно-довільного й паралельно-довільного.

### **4.3 Основні співвідношення**

1. Зв'язок між вхідними й вихідними напругами й струмами  $\underline{U}_1$  й  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{I}_2$  лінійного активного (неавтономного) і пасивного чотириполюсників (при позитивних напрямках напруг і струмів, зазначених на рис. 4.1), може бути виражена наступними шістьма формами основних рівнянь:

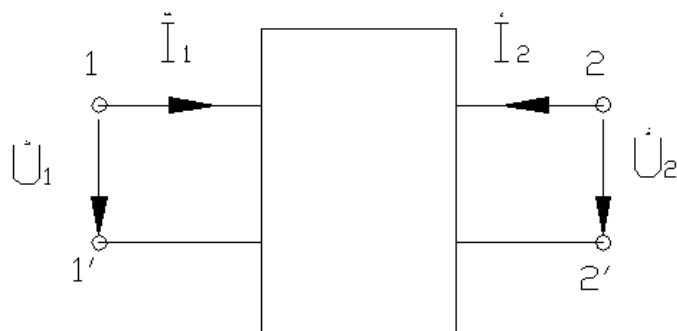


Рисунок 4.1

A- форма

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 - \underline{B}\underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 - \underline{D}\underline{I}_2;$$

H- форма

$$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 - \underline{H}_{12}\underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 - \underline{H}_{22}\underline{U}_2;$$

Y- форма

$$\underline{I}_1 = \underline{y}_{11}\underline{U}_1 - \underline{y}_{12}\underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{y}_{21}\underline{U}_1 - \underline{y}_{22}\underline{U}_2;$$

G- форма

$$\underline{I}_1 = \underline{G}_{11}\underline{U}_1 - \underline{G}_{12}\underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{G}_{21}\underline{U}_1 - \underline{G}_{22}\underline{I}_2;$$

Z- форма

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\underline{I}_1 - \underline{z}_{12}\underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\underline{I}_1 - \underline{z}_{22}\underline{I}_2;$$

B- форма

$$\underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 - \underline{B}_{12}\underline{I}_1;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 - \underline{B}_{22}\underline{I}_1;$$

2. Коефіцієнти чотирьохполюсника можуть бути визначені по відомих напругах і струмах у режимах холостого ходу й короткого замикання в такий спосіб:

$$\underline{A} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0}; \quad \underline{B} = \left( \frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{C} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0}; \quad \underline{D} = \left( \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0};$$

$$\underline{y}_{11} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{y}_{12} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0}; \quad \underline{y}_{21} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}; \quad \underline{y}_{22} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0};$$



$$\begin{aligned} \underline{z}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} ; \underline{z}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} ; \underline{z}_{21} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} ; \underline{z}_{22} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} ; \\ \underline{H}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} ; \underline{H}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} ; \underline{H}_{21} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} ; \underline{H}_{22} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} ; \\ \underline{G}_{11} &= \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} ; \underline{G}_{12} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_1=0} ; \underline{G}_{21} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} ; \underline{G}_{22} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_1=0} ; \\ \underline{B}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_1=0} ; \underline{B}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_1=0} ; \underline{B}_{21} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_1=0} ; \underline{B}_{22} = \left( \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_1=0} . \end{aligned}$$

3. Характеристичні параметри можна визначити через параметри форми А:

Характеристичні опори

$$\underline{z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{AB}}{\underline{CD}}} ; \underline{z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{DB}}{\underline{CA}}} ;$$

постійна передачі

$$g = a + jb = \ln(\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}}) ,$$

і навпаки, коефіцієнти форми А можуть бути виражені через характеристичні параметри:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{z}_{1c}}{\underline{z}_{2c}}} \operatorname{ch}(g) ; \underline{B} = \sqrt{\underline{z}_{1c} \underline{z}_{2c}} \operatorname{sh}(g) ; \underline{C} = \frac{1}{\sqrt{\underline{z}_{1c} \underline{z}_{2c}}} \operatorname{sh}(g) ; \underline{D} = \sqrt{\frac{\underline{z}_{2c}}{\underline{z}_{1c}}} \operatorname{ch}(g)$$

4. У розрахунках використовуються параметри холостого ходу  $\underline{z}_{1xx}$  й  $\underline{z}_{2xx}$  і короткого замикання  $\underline{z}_{1кз}$  й  $\underline{z}_{2кз}$ , обмірювані відповідно з боку первинних і вторинних затискачів, які зв'язані між собою співвідношенням:

$$\frac{\underline{z}_{1xx}}{\underline{z}_{2xx}} = \frac{\underline{z}_{1кз}}{\underline{z}_{2кз}} .$$

Характеристичні параметри виражаються через параметри холостого ходу й короткого замикання:

$$\underline{z}_{1c} = \sqrt{\underline{z}_{1xx} \underline{z}_{1кз}}; \underline{z}_{2c} = \sqrt{\underline{z}_{2xx} \underline{z}_{2кз}}; \text{th}(g) = \sqrt{\frac{\underline{z}_{1кз}}{\underline{z}_{1xx}}} = \sqrt{\frac{\underline{z}_{2кз}}{\underline{z}_{2xx}}};$$

Опору холостого ходу й короткого замикання визначаються через характеристичні параметри або коефіцієнти A,B,C,D:

$$\underline{z}_{1xx} = \underline{z}_{1c} \text{cth}(g) = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \underline{z}_{1кз} = \underline{z}_{1c} \text{th}(g) = \frac{\underline{B}}{\underline{D}};$$

$$\underline{z}_{2xx} = \underline{z}_{2c} \text{cth}(g) = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}; \underline{z}_{2кз} = \underline{z}_{1c} \text{th}(g) = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}.$$

Коефіцієнти A- форми запису рівнянь чотириполюсника обчислюються по опорах холостого ходу й короткого замикання:

$$\underline{A} = \frac{\underline{z}_{1xx}}{\sqrt{\underline{z}_{2xx} (\underline{z}_{1xx} - \underline{z}_{1кз})}}; \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{z}_{1xx}}; \underline{D} = \underline{C} \cdot \underline{z}_{2xx}; \underline{B} = \underline{D} \cdot \underline{z}_{1кз}.$$

5. Для К-фільтрів визначення границь смуги прозорості й характеру зміни кута в цій смузі, а також характеру зміни коефіцієнта загасання в смузі (смугах) загасання здійснюється по рівняннях:

$$\text{sh}(a) \cdot \sin(b) = 0; \text{ch}(a) \cdot \cos(b) = A$$

Для вивчення матеріалу даної теми необхідно проробити розділи в (1 гл.4,5 і 2 гл.8.18)

#### **4.4 Типові приклади. Розрахунок чотириполюсників, фільтрів**

1. Визначити коефіцієнти A, B, C і D T-образного чотириполюсника (рис.4.2), якщо R=100 Ом, x<sub>L</sub>=200 Ом, x<sub>C</sub>=100 Ом. Перевірити виконання співвідношення AD-BC=1. Знайти опір холостого ходу й короткого замикання з боку первинних і вторинних затискачів. Перевірити виконання співвідношення AD-BC=1. Знайти опір холостого ходу й короткого замикання з співвідношення  $\underline{z}_{1xx} / \underline{z}_{1кз} = \underline{z}_{2xx} / \underline{z}_{2кз}$ .

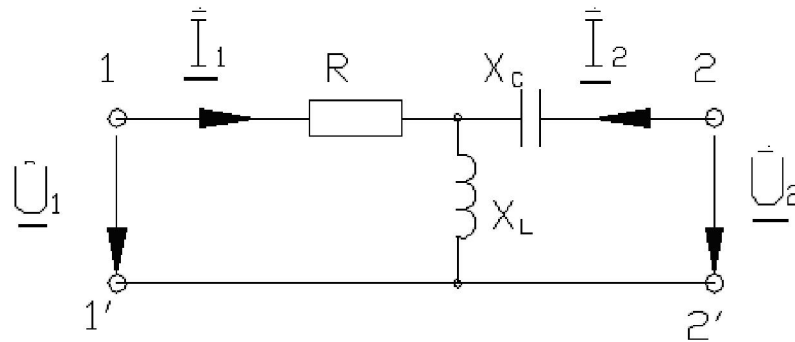


Рисунок 4.2

### Рішення

а) запишемо опір Т- образного чотириполюсника в комплексній формі:

$$\underline{z}_{1T} = R = 100 \text{ Ом}; \quad \underline{z}_{2T} = jx_L = j200 \text{ Ом}; \quad \underline{z}_{3T} = -jx_C = -j100 \text{ Ом};$$

б) запишемо рівняння, згідно законів Кирхгофа:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{z}_{1T} + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{z}_{2T};$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{z}_{3T} + (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \underline{z}_{2T};$$

і виразимо  $\underline{U}_1$  й  $\underline{I}_1$ , через  $\underline{U}_2$  і  $\underline{I}_2$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{z}_{1T}} \underline{U}_2 - \underline{I}_2 \frac{\underline{z}_{2T} + \underline{z}_{3T}}{\underline{z}_{2T}};$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{z}_{1T} + \underline{z}_{2T}}{\underline{z}_{2T}} \underline{U}_2 - \underline{I}_2 \left( \underline{z}_{1T} + \underline{z}_{2T} + \frac{\underline{z}_{1T} \cdot \underline{z}_{3T}}{\underline{z}_{2T}} \right);$$

в) порівнюючи отримані рівняння з рівняннями А- форми, одержимо:

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{z}_{1T}}{\underline{z}_{2T}}; \quad \underline{B} = \underline{z}_{1T} + \underline{z}_{2T} + \frac{\underline{z}_{1T} \cdot \underline{z}_{3T}}{\underline{z}_{2T}}; \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{z}_{2T}}; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{z}_{3T}}{\underline{z}_{2T}},$$

а при підстановці значень опорів маємо:

$$\underline{A} = 1 + \frac{100}{j200} = 1 - j0.5;$$

$$\underline{B} = 100 - j100 + \frac{100(-j100)}{j200} = 50 - j100;$$

$$\underline{C} = \frac{1}{j200} = -j0.005;$$

$$\underline{D} = 1 + \frac{-j100}{j200} = 0.5;$$

г) перевіряємо правильність визначення коефіцієнтів співвідношенням:

$$\underline{AD} - \underline{BC} = (1 - j0.5) * 0.5 - (50 - j100)(-j0.005) = 1;$$

д) визначення опору холостого ходу й короткого замикання з боку первинних і вторинних затискачів здійснюємо згідно виражень:

$$\underline{Z}_{1xx} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = \frac{1 - j0.5}{-j0.005} = (100 + j200) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{1кз} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} = \frac{50 - j100}{0.5} = (100 - j200) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2xx} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} = \frac{0.5}{-j0.005} = (j100) \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{2кз} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{50 - j100}{1 - j0.5} = (80 - j60) \text{ Ом};$$

е) правильність визначення опорів холостого ходу й короткого замикання перевірили за допомогою співвідношень:

$$\frac{\underline{Z}_{1xx}}{\underline{Z}_{1кз}} = \frac{100 + j200}{100 - j200} = (-0.6 + j0.8); \quad \frac{\underline{Z}_{2xx}}{\underline{Z}_{2кз}} = \frac{j100}{80 - j60} = (-0.6 + j0.8).$$

2 У несиметричного чотириполюсника з боку первинних затискачів були обмірювані напруги, струми й потужності при холостому ході й короткому замиканні, а також з боку вторинних затискачів - напруга, струм і потужність при холостому ході. Визначити коефіцієнти рівнянь А-форми чотириполюсника, якщо виміри показали:

$$U_{1xx} = 10 \text{ В}, I_{1xx} = 0.316 \text{ А}, P_{1xx} = 3 \text{ Вт} (\varphi_{1xx} > 0),$$

$$U_{1кз} = 5 \text{ В}, I_{1кз} = 0.139 \text{ А}, P_{1кз} = 0,576 \text{ Вт} (\varphi_{1кз} > 0),$$

$$U_{2xx} = 6 \text{ В}, I_{2xx} = 0.6 \text{ А}, P_{2xx} = 0 \text{ Вт} (\varphi_{2xx} < 0).$$

### Рішення

а) визначаємо опір холостого ходу й короткого замикання:

$$z_{1xx} = \frac{U_{1xx}}{I_{1xx}} = \frac{10}{0.316} = 31.6 \text{ Ом};$$

$$\cos(\varphi_{1xx}) = \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} I_{1xx}} = \frac{3}{10 * 0.316} = 0.949; \varphi_{1xx} = 18.41^\circ;$$

$$\underline{z}_{1xx} = 31.6 e^{j18.41} = (30 + j10) \text{ Ом};$$

$$z_{1кз} = \frac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = \frac{5}{0.139} = 36 \text{ Ом};$$

$$\cos(\varphi_{1кз}) = \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} I_{1кз}} = \frac{0.576}{5 * 0.139} = 0.83; \varphi_{1кз} = 33.82^\circ;$$

$$\underline{z}_{1кз} = 36 e^{j33.82} = (30 + j20) \text{ Ом};$$

$$z_{2xx} = \frac{U_{2xx}}{I_{2xx}} = \frac{6}{0.6} = 10 \text{ Ом};$$

$$\cos(\varphi_{2xx}) = \frac{P_{2xx}}{U_{2xx} I_{2xx}} = \frac{0}{6 * 0.6} = 0; \varphi_{2xx} = -90^\circ;$$

$$\underline{z}_{2xx} = 10 e^{-j90} = (-j10) \text{ Ом};$$

б) знаходимо коефіцієнти А- форми рівнянь чотириполюсника:

$$\underline{A} = \frac{(30 + j10)}{\sqrt{z_{2xx}(z_{1xx} - z_{1кз})}} = \frac{(30 + j10)}{\sqrt{(-j10)(30 + j10 - 30 - j20)}} = 1 - j3;$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{z_{1xx}} = \frac{1 - j3}{30 + j10} = -j0.1 \text{ См};$$

$$\underline{D} = \underline{C}z_{2xx} = -j0.1 * (-j10) = -1;$$

$$\underline{B} = \underline{D}z_{1кз} = -1(30 + j20) = (-30 - j20) \text{ Ом};$$

3/ Для чотирьох полюсника задачі 1 визначити характеристичні параметри  $z_{1C}$ ,  $z_{2C}$ ,  $q$ .

### Рішення

а) визначаємо характеристичні опори:

$$z_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A} \underline{B}}{\underline{C} \underline{D}}} = \sqrt{\frac{(1 - 0.5)(50 - j100)}{(-j0.005)0.5}} = 224 \text{ Ом};$$

$$z_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{D} \underline{B}}{\underline{C} \underline{A}}} = \sqrt{\frac{0.5(50 - j100)}{-0.005(1 - j0.5)}} = 100 e^{j26.5} \text{ Ом};$$

б) знаходимо постійну передачі:

$$e^q = e^a e^{jb} = \sqrt{\underline{A} \underline{D}} + \sqrt{\underline{B} \underline{C}} = \sqrt{(1 - j0.5)0.5} + \sqrt{-j0.005(50 - j100)} =$$

$$= \sqrt{0.56 e^{-j26.5}} + \sqrt{0.56 e^{-j153.5}} = 0.748 e^{-j13.25} + 0.748 = 1.275 e^{-j45};$$

$$e^a = 1.275, a = \ln(1.275) = 0.244 \text{ Нп};$$

$$e^{jb} = e^{-j45}, b = -45^\circ = 0.785 \text{ рад};$$

$$q = a + jb = 0.244 - j785.$$

4 Для фільтра (рис.4.3), що працює на погоджене навантаження, визначити значення граничних частот смуги прозорості (частота зрізу), якісно побудувати залежність характеристичного опору  $z$ , загасання  $a$  і зрушення по фазі  $b$  у функції частоти  $\omega$ , якщо  $L=1\text{мГн}$ ,  $C=1\text{мкФ}$ .

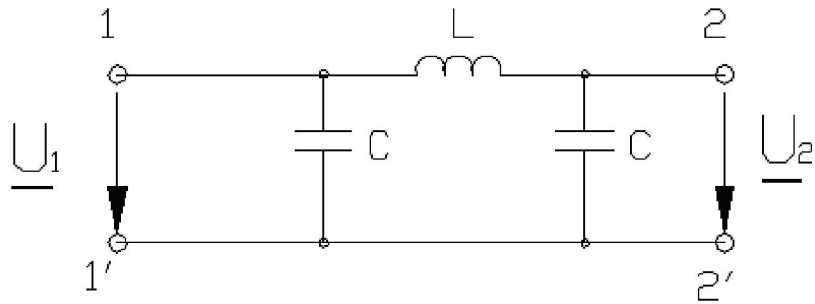


Рисунок 4.3

### Рішення

а) Визначаємо значення граничних частот смуги прозорості фільтра.  
Для П- схеми чотирьохполюсника маємо:

$$\underline{A} = 1 + \frac{z_4}{z_5} = 1 + \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 - \omega^2 LC.$$

При  $A=1$ ,  $\omega_1=0$ , а при  $A=-1$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}} = \sqrt{\frac{2}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 44721 \text{ рад/с.}$$

б) Для побудови залежностей  $z=f(\omega)$ ,  $a=f(\omega)$ ,  $b=f(\omega)$  скористаємося рівняннями:

$$z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{j\omega C}}} = \sqrt{\frac{L}{2C - \omega^2 LC^2}} = \sqrt{\left(\frac{2C}{L} - \omega^2 C^2\right)}.$$

У смугі прозорості  $0 \leq \omega \leq \omega_2$   $a=0$ , а коли в смугі загасання  $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$   $\text{ch}(a) = \omega^2 LC - 1$ . Коефіцієнт зрушення по фазі в смугі прозорості  $0 \leq \omega \leq \omega_2$  визначається вираженням  $b = \arccos(1 - \omega^2 LC)$ , а в смугі загасання  $\omega_2 \leq \omega \leq \infty$   $b = \pi$ .

в) Залежності  $z=f(\omega)$ ,  $a=f(\omega)$ ,  $b=f(\omega)$  наведені на рис.4.4. Побудову здійснюємо, змінюючи частоту від 0 до  $\infty$  і аналізуючи при цьому отримані вище вираження.

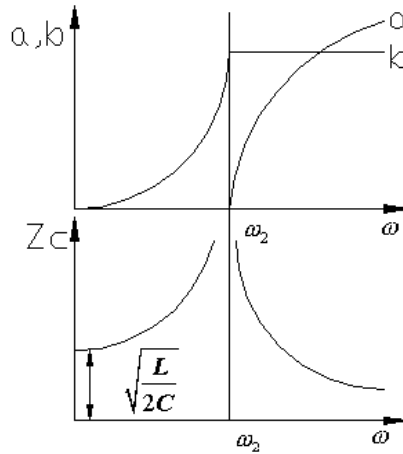


Рисунок 4.4

#### 4.5 Контрольне завдання 4

4.5.1. Для чотириполюсника, показано на рисунку 4.5 при певній частоті  $f$  знайдені опори холостого ходу й короткого замикання  $Z_{1xx}$ ,  $Z_{2xx}$ ,  $Z_{1кз}$ ,  $Z_{2кз}$ .

Необхідно:

а) визначити коефіцієнти A, B, C, D чотириполюсника й перевірити правильність їхнього визначення по співвідношенню  $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ ;

б) визначити параметри T- (або П-) образної схеми заміщення чотириполюсника, зробити висновки про його реалізуємість;

в) визначити характеристичні параметри чотириполюсника  $Z_{1c}$ ,  $Z_{2c}$ ,  $q$ , побудувати векторну діаграму для вхідних і вихідних струмів і напруг при  $U_1$  відповідно до варіанта;

г) визначити опір  $Z_H$  ( $R_H$ ,  $X_H$ ,  $\phi_H$ ), при якому буде виділятися максимальна потужність.

4.5.2. Для електричного фільтра (табл. 4.2.), що працює на погоджене навантаження необхідно:

а) визначити значення граничних частот смуги прозорості фільтра (частоти зрізу);



б) якісно побудувати залежність характеристичного опору  $z_c$ , загасання  $\alpha$  й зрушення по фазі  $\beta$  у функції частоти  $\omega$ ;

в) визначити чисельні значення постійної передачі  $g = a + jb$  характеристичного опору  $z_c$ , напруг і струмів у всіх гілках схеми фільтра й побудувати по них векторну діаграму струмів і напруг фільтра при заданій частоті й амплітуді вхідної напруги.

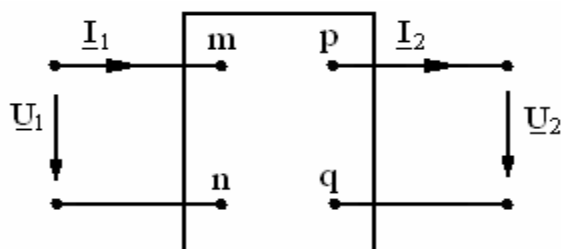


Рисунок 4.5

Таблиця 4.1 - Варіанти контрольного завдання №4 (задача 1)

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
Z1xx, Ом	10+j20	30+j40	50+j60	70+j80	90+j100	11-j12	1
Z2xx, Ом	10-j20	30-j40	50-j60	70-j80	90-j100	11+j12	2
Z1кз, Ом	5+j15	15+j5	15+j25	25+j15	-	-	3
Z2кз, Ом	-	-	-	-	25+j15	15+j25	4
U1, В	100	120	140	160	180	100	5
f, Гц	50	50	100	100	75	125	6
Схема заміщення	Т	П	Т	П	Т	П	7

Таблиця 4.2 - Варіанти контрольного завдання №4 (задача 2)

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
№ рис. схеми	4.6 а	4.6 б	4.6 в	4.6 г	4.6 г	4.6 б	1
L, мГн	1,44	11	1,5	2,58	20	3	2
C, мкФ	0,8	0,24	1	8	4	1,43	3
T · 10 <sup>3</sup> , с	0,16	1,2	0,314	0,568	0,483	1,92	4
Um, В	50	60	70	80	90	100	5

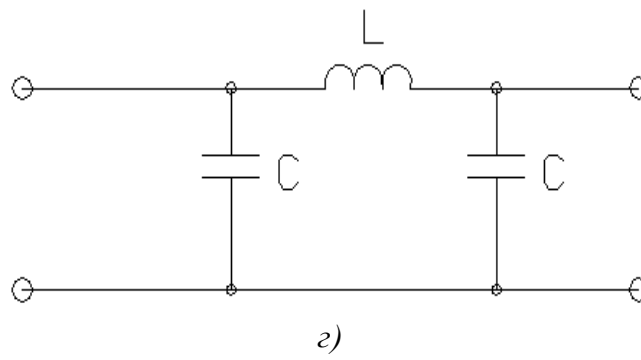
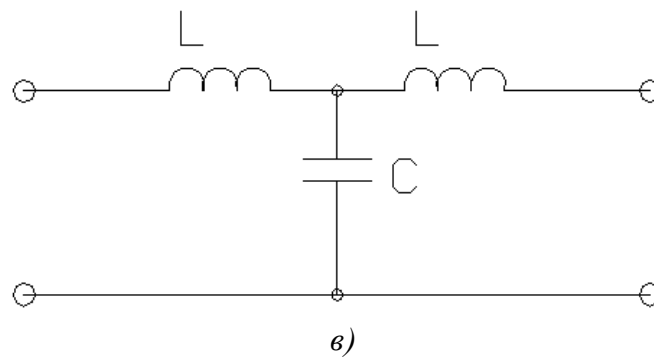
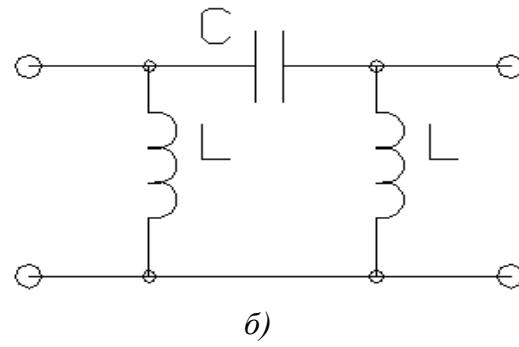
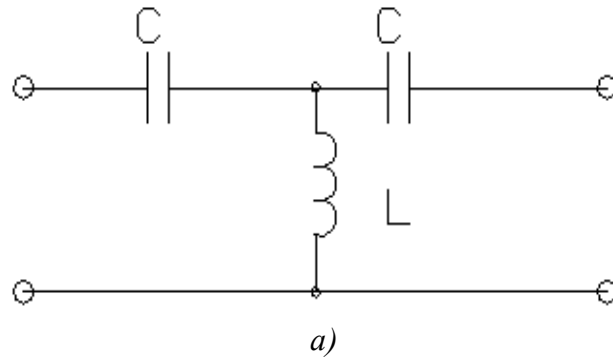


Рисунок 4.6

5

**ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО  
НЕСИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ**

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок електричних кіл не-  
синусоїдального струму***

***Контрольне завдання 5***

## 5. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

### 5.1 Робоча програма

1. Поняття про несинусоїдальні напруги, струму, ЕРС. Причини пере-  
кручування цих величин.
2. Розкладання періодичних функцій у гармонійний ряд. Наближені ме-  
тоди розкладання. Особливості ряду Фур'є для кривих, що володіють  
симетрією.
3. Діючі значення несинусоїдальних величин.
4. Коефіцієнти, що характеризують форму кривих.
5. Активна потужність і коефіцієнт потужності в ланцюгах несинусоїда-  
льного струму.
6. Розрахунок ланцюгів при несинусоїдальному струмі.
7. Вплив параметрів ланцюга на форму кривої струму при несинусоїда-  
льній напрузі.
8. Резонансні явища при несинусоїдальній напрузі і їхнє використання в  
електричних фільтрах.
9. Симетричні складові, що утворені різними гармоніками в трифазних  
ланцюгах.
10. Гармонійний склад фазних і лінійних струмів і напруг при різних за-  
собах з'єднання фазних ланцюгів з несинусоїдальними ЕРС. Вплив  
вищих гармонік на співвідношення між лінійними й фазними вели-  
чинами.
11. Показання вимірювальних приладів різних систем у ланцюгах неси-  
нусоїдального струму.
12. Биття коливань. Модульовані коливання.

### 5.2 Загальні положення

У деяких електротехнічних ланцюгах можуть мати місце струми й напруги, залежність яких від часу має вигляд періодичної несинусоїдальної функції. Розкладання несинусоїдальних ЕРС або напруг у гармонійний ряд еквівалентно заміні джерела такої ЕРС декількома, один із

яких має постійну ЕРС, а інші - синусоїдальні ЕРС різної частоти, амплітуди й початкової фази.

Таке подання несинусоїдальних ЕРС або напруг дозволяє здійснювати розрахунок ланцюгів методами, які застосовуються в ланцюгах постійного й змінного синусоїдального струму в сполученні із принципом накладення.

Розкладання більшості періодичних кривих «правильної» форми (що складаються з відрізків прямих або ділянок синусоїди) наведено в довідниках і в підручниках по ТЗЕ. Проте процедуру розкладання в ряд Фур'є необхідно відновити в пам'яті. Особливу увагу звернути на розкладання кривих, що володіють якою-небудь симетрією. Частина коефіцієнтів гармонійного ряду в кривих, що володіють симетрією, дорівнює нулю. Це потрібно врахувати до початку розкладання й не обчислювати такі коефіцієнти.

При розрахунку по гармоніках необхідно враховувати, що індуктивний опір зростає зі збільшенням порядку гармонік, а ємнісний - зменшується. Це пояснює те, що струм в індуктивності виявляється ближче до несинусоїдальної форми, чим напруга, а струм у конденсаторі перевернений більше, ніж крива напруги.

При вивченні трифазних ланцюгів з несинусоїдальними ЕРС необхідно звернути увагу на те, що незалежно від способу з'єднання генератора (зірка або трикутник) у лінійних напругах відсутні гармоніки кратні трьом. Що стосується лінійних струмів, то гармоніки кратні трьом можуть бути в них, якщо ланцюг складений зіркою з нейтральним проводом. У ланцюзі без нейтрального проводу й при з'єднанні в трикутник гармоніки кратні трьом відсутні.

Працюючи над розділом необхідно також звернути увагу на небажані наслідки, викликувані вищими гармоніками.

### **5.3 Основні співвідношення**

**1. Розкладання періодичних функцій у ряд Фур'є.** Усяку періодичну несинусоїдальну функцію  $f(\omega t)$  з періодом  $2\pi$ , що задовольняє умові Дирихле (тобто обмежена функція, що має за період кінцеве число розривів першого роду й кінцеве число максимумів і мінімумів) мо-

же бути розкладена в тригонометричний ряд Фур'є. Розкладання періодичної несинусоїдальної функції в ряд Фур'є може бути записане у двох формах

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \text{Cos}k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} A''_k \text{Sink}\omega t,$$

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{Sin}(k\omega t + \psi_k),$$

$$\text{де } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t;$$

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \text{Cos}k\omega t d\omega t;$$

$$A''_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \text{Sink}\omega t d\omega t;$$

$$A_k = \sqrt{(A'_k)^2 + (A''_k)^2};$$

$$\psi_k = \text{arctg} \frac{A'_k}{A''_k}.$$

Перший член ряду називається постійною складовою (нульовою гармонікою),  $A'_k \text{Cos}k\omega t$  –  $k^{\text{ой}}$  косинусною гармонікою,  $A''_k \text{Sink}\omega t$  –  $k^{\text{ой}}$  синусною гармонікою,  $A_k \text{Sin}(k\omega t + \psi_k)$  –  $k^{\text{ой}}$  гармонікою. Перша гармоніка називається основною, друга, третя й т.д. - вищими гармоніками.

**2. Види симетрії періодичних функцій.** Переважна більшість функцій, що зустрічаються в електротехніці, можна розділити на три основні групи:

а) Функції, симетричні щодо осі абсцис при сполученні двох напівперіодів, що задовольняють умові

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi).$$

Вони розкладаються в ряд, що не містить парних гармонік і постійної складової:

$$f(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots$$

б) Функції, що задовольняють умові

$$f(\omega t) = f(-\omega t).$$

Такі функції називаються симетричними щодо осі ординат. У цьому випадку ряд не містить синусів, а тільки косинуси

$$f(\omega t) = A_0 + A'_1 \cos \omega t + A'_2 \cos 2\omega t + A'_3 \cos 3\omega t + \dots$$

в) Функції, що задовольняють умові

$$f(\omega t) = -f(-\omega t).$$

Такі функції називаються симетричними відносно початку координат. Вони розкладаються в ряд, що не містить постійної складової й косинусів:

$$f(\omega t) = A''_1 \sin \omega t + A''_2 \sin 2\omega t + A''_3 \sin 3\omega t + \dots$$

**3. Графічний ( графо-аналітичний) метод визначення гармонік ряду Фур'є.** Заснований на заміні певного інтеграла сумою кінцевого числа доданків. Із цією метою період функції  $f(\omega t)$ , рівний  $2\pi$ , розбивають на  $n$  рівних частин  $\Delta\omega t = \frac{2\pi}{n}$  і інтеграли заміняють сумами:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t \cong \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f_p(\omega t),$$

$$A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d\omega t \cong \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cos_p k\omega t,$$

$$A''_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t \cong \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \sin_p k\omega t,$$

де  $p$  – поточний індекс, що приймає значення від 1 до  $n$ ;

$f_p(\omega t)$  – значення функції  $f(\omega t)$  при  $\omega t = (p - 0,5)\Delta\omega t$ , тобто в середині  $p^{\text{го}}$  інтервалу;

$\cos_p k\omega t$  і  $\sin_p k\omega t$  – відповідно значення  $\cos k\omega t$  й  $\sin k\omega t$  при  $\omega t = (p - 0,5)\Delta\omega t$ , тобто в середині  $p^{\text{го}}$  інтервалу.

#### **4. Діюче значення несинусоїдального струму й несинусоїдальної напруги**

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots},$$

тобто діюче значення несинусоїдального струму (напруги) дорівнює кореню квадратному із суми квадратів постійної складової й діючих значень окремих гармонік. Діюче значення на залежить від початкових фаз гармонік.

**5. Розрахунок струмів і напруг при несинусоїдальних джерелах живлення.** Розрахунок струмів і напруг при впливі несинусоїдальних джерел ЕРС (струму) виробляється для кожної з гармонік окремо. При розрахунку необхідно враховувати, що ємнісні і індуктивні опори залежать від частоти:

$$X_{C_k} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C_1}}{k}, \quad X_{L_k} = k\omega L = kX_{L_1},$$

індуктивний і ємнісний опори для нульової гармоніки відповідно рівні  $X_{L_0} = 0$ ;  $X_{C_0} = \infty$ . Розрахунок роблять відомими методами розрахунку електричних кіл постійного й синусоїдального струмів. Для кожної гармоніки можна побудувати векторну діаграму. Однак відкладати на векторній діаграмі струми й напруги різних частот не припустимо.

**6. Активна, реактивна й повна потужності.** Активна потужність несинусоїдального струму визначається



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots$$

Реактивна потужність

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k + \dots$$

Повна потужність

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}.$$

### **7. Коефіцієнти, що характеризують форму періодичних неси- нусоїдальних струмів (напрэг).**

а) Коефіцієнт форми струму

$$K_{\phi} = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt}.$$

б) Коефіцієнт амплітуди струму

$$K_a = \frac{I_{max}}{I}.$$

в) Коефіцієнт перекручування струму

$$K_n = \frac{I_1}{I}.$$

г) Коефіцієнт гармонік струму

$$K_r = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1}.$$

## 5.4 Типові приклади

### Розрахунок електричних кіл несинусоїдального струму

1. Несинусоїдальний струм заданий вираженням миттєвих значень

$$i = 14,14\sin\omega t + 7,07\sin 2\omega t$$

Визначити коефіцієнти амплітуди  $K_a$ , форми  $K_\phi$  і перекручувань  $K_\pi$ .

#### Рішення

Для визначення зазначених коефіцієнтів необхідно попередньо обчислити максимальне, діюче й середнє за половину періоду значення струму, а також діюче значення першої гармоніки.

Діюче значення струму

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{\left(\frac{14,14}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{7,07}{\sqrt{2}}\right)^2} = 11,2 \text{ A.}$$

Середнє за половину періоду значення струму

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (14,14\sin\alpha + 7,07\sin 2\alpha) d\alpha = 9,02 \text{ A,}$$

де  $\omega t = \alpha$ .

Значення  $\alpha$ , при якому  $i = I_{\text{max}}$  визначимо з умови  $\frac{di}{d\alpha} = 0$ .

$$\frac{di}{d\alpha} = 14,14\cos\alpha + 14,14\cos 2\alpha = 0.$$

Замінивши  $\cos\alpha$  вираженням  $2\cos^2\alpha - 1$  і скоротивши на 14,14, одержимо квадратне рівняння

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0,$$

рішення якого

$$\cos\alpha_1 = 0,5 \text{ або } \alpha = 60^\circ,$$

$$\cos\alpha_2 = -1 \text{ або } \alpha = 180^\circ.$$

Максимуму струму відповідає  $\alpha = \alpha_1 = 60^\circ$ .

$$I_{\max} = 14,14\sin 60^\circ + 7,07\sin 120^\circ = 18,34 \text{ А.}$$

Діюче значення 1<sup>ої</sup> гармоніки

$$I_1 = \frac{I_{m_1}}{\sqrt{2}} = \frac{14,14}{\sqrt{2}} = 10 \text{ А.}$$

Шукані коефіцієнти

$$K_a = \frac{I_{\max}}{I} = \frac{18,34}{11,2} = 1,64,$$

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{11,2}{9,02} = 1,24,$$

$$K_\pi = \frac{I_1}{I} = \frac{10}{11,2} = 0,852.$$

Для порівняння приведемо значення цих же коефіцієнтів у синусоїди

$$K_a = 1,41, K_\phi = 1,11, K_\pi = 1.$$

**2.** Параметри ланцюга на рис. 5.1  $R = 48 \text{ Ом}$ ,  $L = 60 \text{ мГн}$ . Напряга на вхідних затискачах

$$U = 120 + 200\sin\omega t + 50\sin(3\omega t + 30^\circ).$$

Частота основної гармоніки  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Визначити показання амперметра й вольтметра електромагнітної системи. Записати вираження миттєвих значень струму. Обчислити активну потужність.

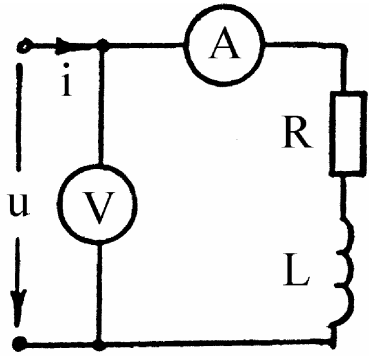


Рисунок 5.1

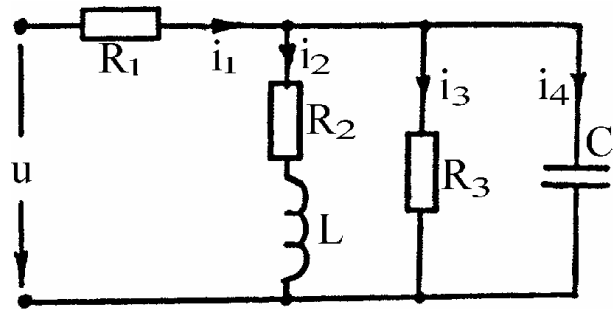


Рисунок 5.2

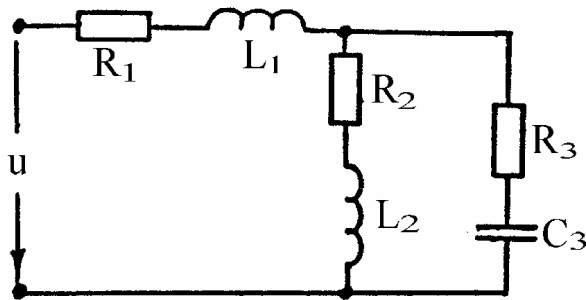


Рисунок 5.3

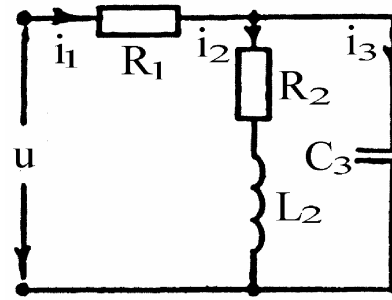


Рисунок 5.4

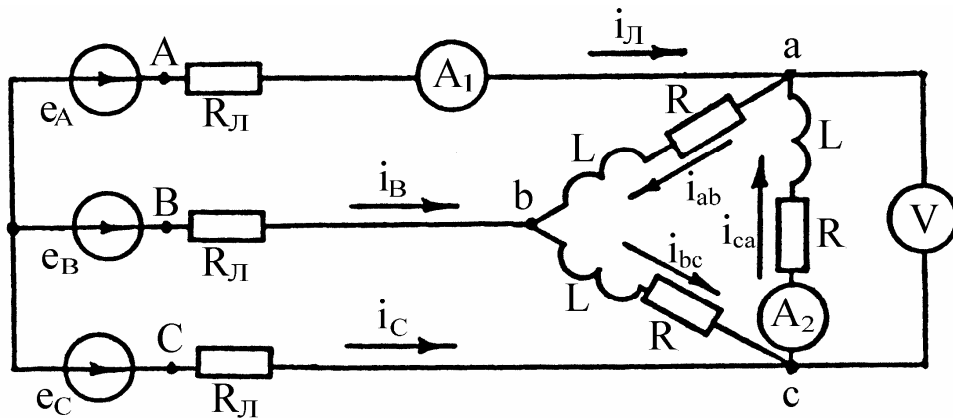


Рисунок 5.5

### Рішення

Постійна складова струму (нульова гармоніка)

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{120}{48} = 2,5 \text{ A.}$$

Перша гармоніка

$$\underline{z}_1 = R + j\omega L = 48 + j2\pi 50 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 48 + j18,85 = 51,57e^{j21,4^\circ},$$

$$\underline{I}_{m_1} = \frac{U_{m_1}}{\underline{z}_1} = \frac{200}{51,57e^{j21,4^\circ}} = 3,88e^{-j21,4^\circ}.$$

Третя гармоніка

$$\underline{z}_3 = 48 + 3 - j18,85 = 74,17e^{j49,7^\circ},$$

$$\underline{I}_{m_3} = \frac{U_{m_3}}{\underline{z}_3} = \frac{50e^{j30^\circ}}{74,17e^{j49,7^\circ}} = 0,674e^{-j19,7^\circ}.$$

Показання вольтметра й амперметра

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{120^2 + \left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} = 188,8 \text{ В},$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{2,5^2 + \left(\frac{3,88}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,674}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3,775 \text{ А}.$$

Вираження миттєвих значень струму

$$i = 2,5 + 3,88\text{Sin}(\omega t - 21,4^\circ) + 0,674\text{Sin}(3\omega t - 19,7^\circ).$$

Активна потужність від окремих гармонік і загальна активна потужність

$$P_0 = U_0 I_0 = 120 \cdot 2,5 = 300 \text{ Вт},$$

$$P_1 = U_1 I_1 \text{Cos}\varphi_1 = \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3,88}{\sqrt{2}} \text{Cos}21,4^\circ = 361,2 \text{ Вт},$$

$$P_3 = U_3 I_3 \text{Cos}\varphi_3 = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,674}{\sqrt{2}} \text{Cos}49,7^\circ = 10,9 \text{ Вт},$$

$$P = P_0 + P_1 + P_3 = 672,1 \text{ Вт}.$$

3. Параметри ланцюга на рис. 5.2  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $\omega L = 12 \text{ Ом}$ ,  $\frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом}$ . Напряга на вхідних затискачах

$$U = 30 + 100\sin\omega t + 40\sin(3\omega t + 20^\circ).$$

Визначити діюче значення всіх струмів. Записати вираження миттєвих значень струму нерозгалуженої частини ланцюга.

### Рішення

Розрахунок постійної складової струму

$$\underline{z}_{e(0)} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 + 4 = 10 \text{ Ом},$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{\underline{z}_{e(0)}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А}.$$

Постійна складова напруги на розгалуженій ділянці

$$U_{p(0)} = I_{1(0)} R_{23} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ В}.$$

Постійні складові токи в гілках

$$I_{2(0)} = \frac{U_{p(0)}}{R_2} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ А},$$

$$I_{3(0)} = \frac{U_{p(0)}}{R_3} = \frac{12}{20} = 0,6 \text{ А},$$

$$I_{4(0)} = 0 \text{ А}.$$

Розрахунок для 1<sup>ї</sup> гармоніки. Комплекси провідності й опору розгалуженої частини ланцюга

$$\underline{Y}_{p(1)} = \frac{1}{\underline{z}_{2(1)}} + \frac{1}{\underline{z}_{3(1)}} + \frac{1}{\underline{z}_{4(1)}} = \frac{1}{5 + j12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j30} = (0,0796 - j0,0377) \text{ См},$$

$$\underline{Z}_{p(1)} = \frac{1}{\underline{Y}_{p(1)}} = 10,25 + j4,83 = 11,4e^{j25,3^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплекс опору всього ланцюга для 1<sup>ї</sup> гармоніки

$$\underline{Z}_{e(1)} = \underline{Z}_{1(1)} + \underline{Z}_{p(1)} = 6 + 10,25 + j4,83 = 16,25 + j4,83 = 16,95e^{j16,55^\circ}.$$

Комплекси амплітуд струму в нерозгалуженій частині, напруги на розгалуженій ділянці й струму в гілках

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{e(1)}} = \frac{100}{16,95e^{j16,55^\circ}} = 5,9e^{j16,55^\circ} \text{ (A)},$$

$$\underline{U}_{pm(1)} = \underline{I}_{1m(1)}\underline{Z}_{p(1)} = 5,9e^{-j16,55^\circ} \cdot 11,4e^{j25,3^\circ} = 67,26e^{j8,75^\circ} \text{ (A)},$$

$$\underline{I}_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{pm(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{67,26e^{j8,75^\circ}}{5 + j12} = 5,17e^{j58,6^\circ} \text{ (A)},$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \frac{\underline{U}_{pm(1)}}{\underline{Z}_{3(1)}} = 3,36e^{j8,75^\circ} \text{ (A)},$$

$$\underline{I}_{4m(1)} = \frac{\underline{U}_{pm(1)}}{\underline{Z}_{4(1)}} = 2,24e^{j98,75^\circ} \text{ (A)}.$$

Розрахунок для 3<sup>ї</sup> гармоніки виробляється в такому ж порядку. Потрібно врахувати, що індуктивний опір зростає, а ємнісний зменшується в 3 рази.

$$\underline{Z}_{1(3)} = R_1 = 6 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{2(3)} = R_2 + 3j\omega L = 5 + j36 = 36,5e^{j82,17^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = R_3 = 20 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{4(3)} = -j\frac{1}{3\omega C} = -j10 \text{ Ом,}$$

$$\underline{Y}_{p(3)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5 + j36} + \frac{1}{-j10} = (0,0538 + j0,0728) \text{ См,}$$

$$\underline{Z}_{p(3)} = \frac{1}{\underline{Y}_{p(3)}} = 6,56 - j8,9 = 11,05e^{-j53,58^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_{e(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \underline{Z}_{p(3)} = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35,08^\circ} \text{ Ом,}$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{\vartheta(3)}} = \frac{40e^{j20^\circ}}{15,35e^{j35,08^\circ}} = 2,6e^{j55,08^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{U}_{pm(3)} = 2,6e^{j55,08^\circ} \cdot 11,05e^{-j53,58^\circ} = 28,7e^{j1,5^\circ},$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{36,5e^{j82,17^\circ}} = 0,79e^{-j80,67^\circ},$$

$$\underline{I}_{3m(3)} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{20} = 1,44e^{j1,5^\circ},$$

$$\underline{I}_{4m(3)} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 2,87e^{j91,5^\circ}.$$

Діючі значення струму в гілках

$$I_1 = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2,6}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5,45 \text{ A,}$$

$$I_2 = \sqrt{2,4^2 + \left(\frac{5,17}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,79}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4,4 \text{ A,}$$

$$I_3 = \sqrt{0,6^2 + \left(\frac{3,36}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1,44}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2,64 \text{ A,}$$

$$I_4 = \sqrt{\left(\frac{2,24}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2,87}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2,57 \text{ A.}$$

Виразення струму в нерозгалуженій частині ланцюга

$$i_1 = 3 + 5,9\sin(\omega t - 16,55^\circ) + 2,6\sin(3\omega t + 55,08^\circ).$$

#### 4. ЕРС фази А трифазного симетричного генератора (рис. 5.5)

$$e_A = 120\sin\omega t + 30\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t.$$

Параметри ланцюга:  $R_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $R = 60 \text{ Ом}$ ,  $\omega L = 30 \text{ Ом}$ .

Записати вираження ЕРС у фазах В і С. Знайти миттєві значення лінійних і фазних струмів. Визначити показання амперметрів і вольтметра електромагнітної системи.



## Рішення

$1^{\text{i}}$  гармоніки ЕРС утворюють симетричну систему прямої послідовності,  $3^{\text{i}}$  – нульовий і  $5^{\text{i}}$  – зворотній, тому вираження ЕРС у фазах У і С:

$$e_B = 120\sin(\omega t - 120^\circ) + 30\sin 3\omega t + 20\sin(5\omega t + 120^\circ),$$

$$e_C = 120\sin(\omega t + 120^\circ) + 30\sin 3\omega t + 20\sin(5\omega t - 120^\circ).$$

Ланцюг не має нейтрального проводу, тому в лінійних струмах відсутній  $3^{\text{a}}$  гармоніка.  $3^{\text{i}}$  гармоніки не буде й у фазних струмах трикутника. У зв'язку із цим розрахунок струмів потрібно виконати для  $1^{\text{i}}$  і  $5^{\text{i}}$  гармонік.

Для розрахунку ланцюга замінимо трикутник еквівалентною зіркою. Опір фаз еквівалентної зірки.

$$\underline{z}_{\wedge(1)} = \frac{z_{\Delta(1)}}{3} = 20 + j10 = 22,4e^{j26,58^\circ},$$

$$\underline{z}_{\wedge(5)} = \frac{z_{\Delta(5)}}{3} = 20 + j50 = 53,9e^{j68,17^\circ}.$$

Комплекси амплітуд лінійних струмів у фазі А

$$\underline{I}_{mA(1)} = \frac{\underline{E}_{mA(1)}}{R_{\pi} + \underline{z}_{\wedge(1)}} = \frac{120}{10 + 20 + j10} = 3,79e^{-j18,4^\circ},$$

$$\underline{I}_{mA(5)} = \frac{\underline{E}_{mA(5)}}{R_{\pi} + \underline{z}_{\wedge(5)}} = \frac{20}{10 + 20 + j50} = 0,343e^{-j59^\circ}.$$

Вираження миттєвих значень лінійних струмів

$$i_A = 3,79\sin(\omega t - 18,4^\circ) + 0,343\sin(5\omega t - 59^\circ),$$

$$i_B = 3,79\sin(\omega t - 138,4^\circ) + 0,343\sin(5\omega t + 61^\circ),$$

$$i_C = 3,79\sin(\omega t + 101,6^\circ) + 0,343\sin(5\omega t - 179^\circ).$$

Ланцюг симетричний, тому фазні струми трикутника менше лінійних у  $\sqrt{3}$  раз. Система фазних струмів  $1^{\text{i}}$  гармоніки випереджає систему лінійних на  $30^\circ$ . Фазні струми  $5^{\text{i}}$  гармоніки на такий же кут відста-

ють від лінійних. З урахуванням цього вираження миттєвих значень фазних струмів

$$i_{ab} = 2,19\sin(\omega t + 11,6^\circ) + 0,198\sin(5\omega t - 89^\circ),$$

$$i_{bc} = 2,19\sin(\omega t - 108,4^\circ) + 0,198\sin(5\omega t + 31^\circ),$$

$$i_{ca} = 2,19\sin(\omega t + 131,6^\circ) + 0,198\sin(5\omega t + 151^\circ).$$

Амперметр  $A_1$  показує діюче значення лінійного струму,  $A_2$  – фазного, тому

$$I_1 = \sqrt{\frac{3,79^2 + 0,343^2}{2}} = 2,69 \text{ А},$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{2,19^2 + 0,198^2}{2}} = 1,56 \text{ А}.$$

Для визначення показання вольтметра обчислимо діючі значення  $1^i$  і  $5^i$  гармонік напруги фази са.

$$\dot{U}_{ca(1)} = \dot{I}_{ca(1)} \cdot Z_{\Delta(1)} = \frac{2,19}{\sqrt{2}} e^{j131,6^\circ} (60 + j30) = 104 e^{j158,16^\circ},$$

$$\dot{U}_{ca(5)} = \dot{I}_{ca(5)} \cdot Z_{\Delta(5)} = \frac{0,198}{\sqrt{2}} e^{j151^\circ} (60 + j150) = 22,7 e^{j219,2^\circ}.$$

Показання вольтметра

$$U_v = \sqrt{104^2 + 22,7^2} = 106,4 \text{ В}.$$

### 5.5 Контрольне завдання 5

**1.** До ланцюга на рис. 5.6 прикладена несинусоїдальна напруга

$$u = U^{(0)} + U_m^{(1)} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + U_m^{(3)} \sin\left(3\omega t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Параметри ланцюга для основної гармоніки наведені в табл. 5.1.

Необхідно розрахувати:

1. миттєві й діючі значення струму у всіх ділянках;
2. активну потужність і коефіцієнт потужності ланцюга;
3. коефіцієнти  $K_a$ ,  $K_\phi$  і  $K_\pi$  без урахування постійних складових для прикладеної напруги й струмів у двох ділянках, один із яких містить індуктивний елемент, а другий ємнісний. Зрівняти отримані значення коефіцієнтів і сформулювати висновки про вплив параметрів на форму кривих.

2. ЕРС фази А симетричного трифазного генератора й ланцюга на рис. 5.7.

$$e_A = E_m^{(1)} \sin \omega t + E_m^{(3)} \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + E_m^{(5)} \sin \left( 5\omega t - \frac{\pi}{3} \right).$$

Параметри ланцюга й основна частота наведені в таблиці 5.2.

Думаючи ключ SA розімкнутим:

1. обчислити показання приладів електромагнітної системи;
2. записати вирази миттєвих значень ЕРС в інших фазах; фазних і лінійних напруг приймача енергії, струмів у лінійних проводах;
3. виконати роботу з пунктів 1 і 2 при замкнутому ключі (у цьому випадку крім того записати вирази миттєвих значень струму в нейтральному проводі).

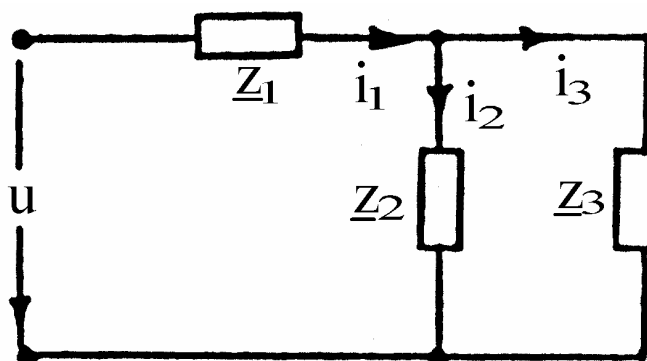


Рисунок 5.6

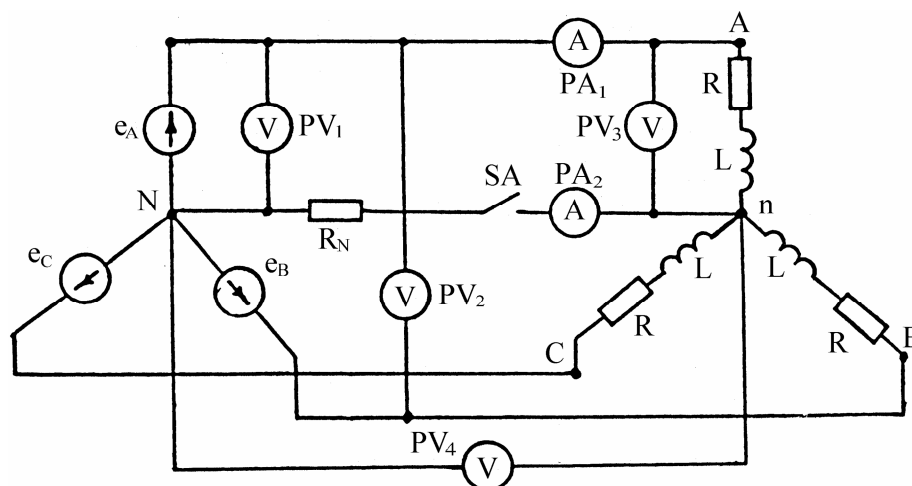


Рисунок 5.7

Таблица 5.1

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ бу- кви
$Z_1$ (Ом)	$5 + j7$	$8 - j10$	$13 + j10$	$10 - j10$	$15 + j8$	$10 - j5$	1
$Z_2$ (Ом)	$4 - j8$	$5 + j8$	$10 - j8$	$15 - j10$	$6 + j8$	$8 + j8$	2
$Z_3$ (Ом)	$9 + j18$	$3 - j3$	$6 - j6$	$5 + j8$	$7 - j9$	$4 - j9$	3
$U^{(0)}$ (В)	60	80	100	120	140	160	4
$U_m^{(1)}$ (В)	141	282	70,7	70,7	141	282	5
$U_m^{(3)}$ (В)	35,35	70,7	141	141	70,7	35,35	6

Таблица 5.2

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
$E_m^{(1)}$ (В)	100	120	140	160	180	200	1
$E_m^{(3)}$ (В)	60	80	100	120	140	160	2
$E_m^{(5)}$ (В)	40	60	80	100	120	140	3
$f$ (Гц)	30	35	40	45	50	55	4
$R$ (Ом)	10	20	30	40	50	60	5
$R_N$ (Ом)	10	15	10	15	10	15	6
$L$ (Гн)/ $C$ (МкФ)	0,1/60	0,12/80	0,14/100	0,16/80	0,1/60	0,12/100	7

# 6

## **ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ**

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок перехідних процесів  
у лінійних електричних колах***

***Контрольне завдання 6***

## **6 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ**

### ***6.1 Робоча програма***

1. Поняття про сталі й перехідні процеси. Причини виникнення перехідних процесів, необхідність їхнього аналізу й розрахунку.
2. Закони комутації.
3. Сутність класичного методу розрахунку перехідних процесів. Примушені й вільні складові струми й напруги. Незалежні й залежні початкові умови, методика їхнього визначення.
4. Перехідні процеси в ланцюзі RC. Включені на постійну напругу. Розряд конденсатора на активний опір. Включення на синусоїдальну напругу.
5. Перехідні процеси в ланцюзі RL. Включення на постійні й синусоїдальні напруги. Коротке замикання ланцюга RL. Відключення від джерела.
6. Перехідні процеси в контурі RLC: аперіодичні, коливальні й граничний аперіодичний процеси при включенні на постійну напругу й розряді конденсатора на ланцюг RL.
7. Розрахунок перехідних процесів класичним методом у складних ланцюгах. Використання головного визначника системи керувань, а також вираження вхідного опору. Визначення числа корінь характеристичного рівняння по виду схеми.
8. Сутність операторного методу розрахунку перехідних процесів. Перетворення Лапласа.
9. Формула розкладання і її застосування.
10. Закони Кірхгофа та Ома в операторній формі. Операторні схеми заміщення.
11. Застосування в операторній формі до розрахунку перехідних процесів тих же методів, що й для розрахунку ланцюгів постійний і синусоїдальний струми.
12. Розрахунок перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля.
13. Розрахунок перехідних процесів при впливі імпульсів різної форми.
14. Перехідні процеси при «некоректних» комутаціях.

## 6.2 Загальні положення

Струми, напруги й інші величини, методи розрахунку яких були предметом вивчення в попередніх розділах курсу ТОЕ, ставляться до сталих режимів. Такі режими характеризуються незмінними в часі значеннями струмів і напруг у ділянках ланцюга або ж змінюється за періодичним законом з незмінними амплітудними значеннями.

При включенні або відключенні в ланцюзі активних або пасивних ділянок, при різного роду перемикаваннях, у ланцюзі виникають перехідні процеси (ПП). Після закінчення ПП струми й напруги в елементах ланцюга приймають нові значення.

Задачею розрахунку ПП є встановлення законів, по яких відбувається зміна струмів і напруг у часі цих процесів. Теоретично ПП тривають нескінченно довго. Практично, у більшості випадків, це доли секунди. Необхідність розрахунку ПП диктується двома обставинами: перше - під час ПП струми й напруги в окремих елементах ланцюга можуть багаторазово перевищувати свої сталі значення, досягаючи при цьому неприпустимих і небезпечних величин; друге - у ряді випадків періодично повторювані, а також неперіодичні ПП є нормальним режимом роботи (наприклад, у пристроях електронної техніки, в електроприводах прокатних станів і ін.).

ПП у лінійних електричних колах описуються системою лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, що складаються згідно законів Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг. Розрахувати ПП означає вирішити ці рівняння. Спосіб рішення диференціальних рівнянь визначає метод розрахунку ПП. У теорії ланцюгів застосовуються два основних методи розрахунку ПП - класичний і операторний. Суть класичного методу полягає в тім, що інтегруючи перехідну величину (струм або напругу) знаходять у вигляді суми примушеної й вільної складових. Зручно розрахунок ПП у ланцюзі робити щодо незалежної перехідної величини (НПВ) (струм в індуктивності або напругу на ємності), а інші перехідні величини визначаються на підставі законів Кірхгофа, Ома й інтегро-диференціальних співвідношень, що зв'язують миттєві значення струмів і напруг, при відомому законі зміни НПВ. Розрахунок ПП класичним методом можна здійснювати в наступній послідовності:

- а) розраховують докомутаційний стан електричного кола й визначають струми в індуктивностях і напругу на ємностях при  $t = 0$ ;
- б) згідно законів комутації знаходять незалежні початкові умови (НПУ);
- в) вибирають НПВ, щодо якої роблять розрахунок ПП, і записують її у вигляді суми примушеної й вільної складових;
- г) визначають примушену складову НПВ;
- д) становлять характеристичне рівняння комутаційного ланцюга й знаходять його корінь;
- е) по виду корінь характеристичного рівняння записують вільну складову НПВ;
- ж) складають систему алгебраїчних рівнянь для визначення постійних інтегрування шляхом запису НПВ і її похідних для  $t = 0$ ;
- з) на підставі рівнянь згідно законів Кірхгофа, Ома й інтегро-диференційних співвідношень із використанням НПУ знаходять залежні початкові умови (ЗПУ), необхідні для визначення постійних інтегрування;
- и) вирішують систему алгебраїчних рівнянь п. ж) з урахуванням п. з) і п. б) і визначають постійні інтегрування;
- к) записують закон зміни НПВ;
- л) на підставі законів Кірхгофа, Ома й інтегро-диференційних співвідношень знаходять закони зміни інших перехідних величин.

Іншим методом розрахунку ПП є операторний. Суть його полягає в тім, що за допомогою другого перетворення Лапласа переходять від інтегро-диференційних рівнянь в області дійсного змінного до алгебраїчних рівнянь в області комплексного змінного. У порівнянні із класичним методом операторний метод більше формалізований. Його достоїнство полягає в тому, що тут немає необхідності визначати ЗПУ й постійні інтегрування. НПУ вводяться автоматично у вихідні рівняння або операторні схеми заміщення.

Розрахунок ПП операторним методом містить два основних етапи:

- 1) визначення зображення перехідної величини, шляхом розрахунку операторної схеми заміщення методами розрахунку складних ланцюгів постійного й змінного струмів;



2) по відомому зображенню перехідної величини за допомогою таблиць відповідності або формули розкладання визначають оригінал перехідної величини.

Розрахунок ПП при впливі напруги довільної форми, у тому числі, коли  $u(t)$  не є безперервною функцією, здійснюється за допомогою інтеграла Дюамеля.

При розрахунку ПП за допомогою інтеграла Дюамеля:

а) визначають перехідну провідність (перехідну функцію по напрузі);

б) записують для кожної тимчасової ділянки  $u(t)$  інтеграл Дюамеля щодо шуканої величини і його обчислюють.

### **6.3 Основні співвідношення**

**1. Миттєві значення напруг і струмів на реактивних елементах** зв'язані співвідношеннями:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt,$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt.$$

**2. Закони комутації.** Незалежні й залежні початкові умови.

У момент комутації в електричних колах виконуються наступні рівності:

$$i_L(0+) = i_L(0-) \quad (\text{перший закон комутації}),$$

$$u_C(0+) = u_C(0-) \quad (\text{другий закон комутації}),$$

тобто струми в індуктивностях і напруги на ємностях у момент комутації не змінюються стрибком.

На підставі законів комутації визначаються НПУ, тобто  $i(0)$  і  $u(0)$ . Значення всіх інших струмів і напруг в елементах електричного кола, значення похідних всіх струмів і напруг при  $t = 0$  називаються ЗПУ й вони визначаються за законами Кірхгофа з урахуванням НПУ.

**3. Примушена складова перехідної величини.** Примушена складова, математично, є приватне рішення неоднорідного диференціального рівняння, записаного щодо перехідної величини, що цікавить. Фізично, примушена складова, є нове стале значення перехідної величини. Вона визначається шляхом розрахунку післякомутаційного сталого режиму.

**4. Характеристичне рівняння.** При складанні характеристичного рівняння в рівняннях, складених згідно законів Кірхгофа для вільних складових струмів післякомутаційного ланцюга, символи диференціювання заміняють співмножником  $p$ , а символи інтегрування – співмножником  $\frac{1}{p}$  і прирівнюють нулю, що відповідає визначник системи.

Часто характеристичне рівняння складають по характеристичному вхідному опорі схеми, яке складають із урахуванням: опору індуктивності  $p$ , а ємності –  $\frac{1}{pC}$ . Отриманий вхідний опір прирівнюють нулю, це й буде характеристичне рівняння ланцюга.

**5. Вільна складова перехідної величини.** Вільна складова, математично, є загальне рішення однорідного диференціального рівняння, записаного щодо інтегруючої перехідної величини, тобто ця складова є рішення рівняння, вільного від сили, що змушує. Вид вільної складової визначається видом коренів характеристичного рівняння.

Якщо характеристичне рівняння має:

«n» коренів негативних дійсних різних ( $p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2, \dots, p_k = -\alpha_k, \dots, p_n = -\alpha_n$ );

«m» коренів рівних (кратних) ( $p_1 = p_2 = \dots = p_k = \dots = p_n = -\beta$ );

«l» пара комплексно-сполучених коренів ( $p_{1,2} = -\alpha_1 \pm k\omega_1, \dots, p_{k,k+1} = -\alpha_k \pm k\omega_k, \dots$ ), то вільна складова перехідної величини (струму) буде мати вигляд:

$$i_b(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} + e^{-\beta t} \cdot \sum_{k=1}^m B_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^l D_k e^{-\alpha_k t} \text{Sin}(\omega_k t + v_k),$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m, D_1, D_2, \dots, D_l, v_1, v_2, \dots, v_l$  – постійні інтегрування, їхні значення визначаються з початкових умов.

**6. Перетворення Лапласа.** Відповідно до перетворення Лапласа функції часу (струм, напруга, ЕРС)  $f(t)$  (оригінал) відповідає функція  $F(p)$  (зображення) комплексного змінного. Ці функції зв'язані співвідношенням

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

яка називається прямим перетворенням Лапласа. Відповідність між  $F(p)$  і  $f(t)$  записують так

$$F(p) \doteq f(t).$$

Математичним операціям над оригіналами відповідають певні операції над зображеннями й навпаки.

Знання цих операцій (властивостей перетворення Лапласа) дозволяє переходити від інтегро-диференціальних рівнянь, записаних для функцій-оригіналів, до операторних рівнянь. Деякі властивості (часто зустрічаються в електротехніці) прямого перетворення Лапласа:

а) Властивості лінійності

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n a_i F_i(p).$$

б) Властивість комутативності перетворень Лапласа й операцій  $\text{Re}$  і  $\text{Im}$

$$\text{Re} f(t) \doteq \text{Re} F(p), \quad \text{Im} f(t) \doteq \text{Im} F(p).$$

в) Теорема диференціювання

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

г) Теорема інтегрування

$$\int_0^t f(t)dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Використовуючи вираження прямого перетворення Лапласа приведемо зображення функцій, що зустрічаються часто в електротехніці:

а) зображення постійної

$$A \doteq \frac{A}{p},$$

б) зображення показової функції

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha},$$

в) зображення комплексу синусоїдальної функції (струму)

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \doteq \frac{\underline{I}_m}{p - j\omega}.$$

**7. Операторна схема заміщення.** Операторна схема заміщення складається для післякомутаційного ланцюга. При її складанні: всі змінні величини замінюються їх операторними зображеннями ( $i(t) \doteq I(p)$ ,  $u(t) \doteq U(p)$ ,  $e(t) \doteq E(p)$ ); індуктивності  $L$  замінюються послідовними ланцюжками, що складаються з операторного опору  $p$  і джерела ЕРС  $Li(0-)$ , де  $i(0-)$  – початкове значення струму в індуктивності, ємності  $C$  замінюються послідовними ланцюжками, що складаються з операторного опору  $\frac{1}{pC}$  й джерела ЕРС  $\frac{u_c(0-)}{p}$ , де  $u(0-)$  – початкове значення напруги на ємності. ЕРС  $Li(0-)$  має напрямок, що збігається зі струмом  $i(t)$ , а ЕРС  $\frac{u_c(0-)}{p}$  спрямована проти напруги на ємності. З урахуванням цього операторні напруги і ємності визначаються

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0-), U_C(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{U_C(0-)}{p}.$$

**8. Закон Ома в операторній формі.** Зображення струму  $I(p)$  у гілці  $ab$ , що містить  $R, L, C, e_1(t)$  і  $e_2(t)$  ( $e_1(t)$  збігається по напрямку зі струмом, а  $e_2(t)$  спрямована зустрічно струму) пов'язане із зображенням  $U_{ab}(p)$  законом Ома в операторній формі

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E_1(p) + Li(0-) - \frac{U_C(0-)}{p} - E_2(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}},$$

де  $R + pL + \frac{1}{pC} = Z(p)$  – операторний опір ділянки,

$Li(0-)$  і  $\frac{U_C(0-)}{p}$  – внутрішні ЕРС, що враховують НПУ.

**9. Закони Кірхгофа в операторній формі.** Перший закон

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0,$$

тобто алгебраїчна сума операторних струмів у вузлі дорівнює нулю.

Другий закон. У загальному випадку при ненульових початкових умовах для якого-небудь контуру, що містить  $N$  гілок

$$\sum_{k=1}^N I_k(p)Z_k(p) = \sum_{k=1}^N \left[ E_k(p) + L_k i_k(0-) - \frac{U_{Ck}(0-)}{p} \right],$$

тобто алгебраїчна сума операторних спадань напруги гілок замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі операторних ЕРС (з урахуванням внутрішніх ЕРС), що діють у контурі.

**10. Формула розкладання.** Якщо зображення струму (напруги) має вигляд

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)},$$

причому багаточлени (відносно  $p$ )  $N(p)$  і  $M(p)$  задовольняють наступним умовам ступінь  $N(p)$  нижче ступеня  $M(p)$ , а корінь  $p_1, \dots, p_n$  рівняння  $M(p) = 0$  різні, то оригінал струму (напруги)

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Якщо знаменник  $M(p)$  має один корінь, дорівнює нулю, то оригінал знаходиться по формулі

$$i(t) = \frac{N(0)}{M'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Якщо  $M(p)$  має  $n$  різних коренів ( $p_1, p_2, \dots, p_s$ ) і з них корінь  $p_1$  кратністю  $m_1$ , корінь  $p_2$  кратністю  $m_2$ , корінь  $p_s$  кратністю  $m_s$ , те зображення  $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  має оригінал

$$i(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[ \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \cdot \frac{N(p)e^{pt}}{M(p)(p-p_k)^{m_k}} \right]_{p=p_k}.$$

Тут вираження, що стоїть в знаменнику квадратної дужки, треба спочатку скоротити на  $(p-p_k)^{m_k}$  й лише після цього диференціювати.

**11. Перехідна провідність.** Перехідна функція по напрузі

Якщо на вхід якого-небудь ланцюга в момент  $t = 0$  включається постійна напруга  $U$  (э.д.с.  $E$ ), то струм  $i(t)$  у будь-якій гілці цієї схеми дорівнює

$$i(t) = U \cdot g(t),$$

де  $g(t)$  - перехідна провідність [См].

Перехідна провідність  $g(t)$  якої-небудь гілки чисельно дорівнює струму  $i(t)$  у цій гілці при підключенні ланцюга до постійної напруги в 1 В.

При підключенні лінійного електричного кола з нульовими початковими умовами до постійного  $U$  між якимись двома крапками а і b схеми виникає напруга  $U_{ab}(t)$ , що являється функцією часу й пропорційна напрузі, що впливає,  $U$ :

$$U_{ab}(t) = U \cdot h(t),$$

де  $h(t)$  - перехідна функція по напрузі (безрозмірна величина), чисельно дорівнює напрузі між крапками а і b схеми, якщо на її вхід подати постійну напругу в 1 В.

**12. Інтеграл Дюамеля.** Якщо на пасивний ланцюг у момент  $t = 0$  включається вплив  $u(t)$ , то струм  $i(t)$  у якій-небудь гілці схеми визначається інтегралом Дюамеля

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau,$$

де  $u(0)$  – початкове значення впливу;

$$u'(\tau) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=\tau} \text{ – похідна впливу;}$$

$g(t - \tau)$  - перехідна провідність при заміні  $t$  на  $(t - \tau)$ .

Якщо вплив  $u(t)$  має різні вираження на різних інтервалах часу, то інтервал інтегрування розбивається на окремі ділянки, а  $i(t)$ , що розраховується інтегралом Дюамеля, записується для окремих інтервалів часу.

#### 6.4 Типові приклади. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах

1. Знайти струми у всіх гілках ланцюга на рис. 6.1.а після замикання ключа. Визначити час, за який струм  $i_2$  досягне 98 % свого сталого значення. Параметри ланцюга:  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $E = 150 \text{ В}$ .

#### Рішення

Система рівнянь Кірхгофа для ланцюга після комутації

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0, \quad (6.1)$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} = E, \quad (6.2)$$

$$R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} - R_3 i_3 = 0. \quad (6.3)$$

Визначимо  $i_2$  у вигляді суми примушеної й вільної складових

$$i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}}. \quad (6.4)$$

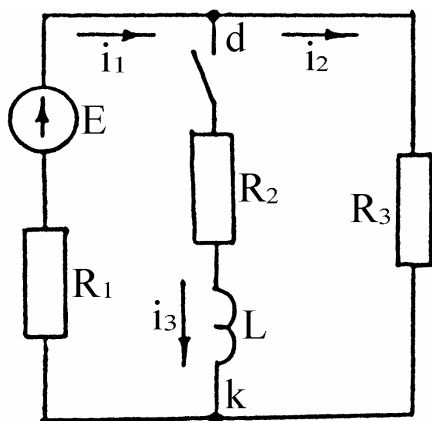
Примушена складова

$$i_{2\text{пр}} = \frac{U_{\text{dk пр}}}{R_2}, \quad U_{\text{dk пр}} = i_{1\text{пр}} R_{23}, \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 50 \text{ Ом},$$

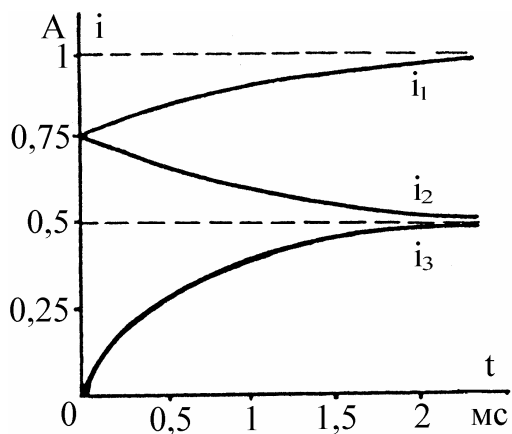
$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_{23}} = 1 \text{ А}, \quad U_{\text{dk пр}} = 50 \text{ В}, \quad i_{2\text{пр}} = 0,5 \text{ А}.$$

Запишемо характеристичне рівняння у вигляді вираження  $Z(p) = 0$  і визначимо його корінь



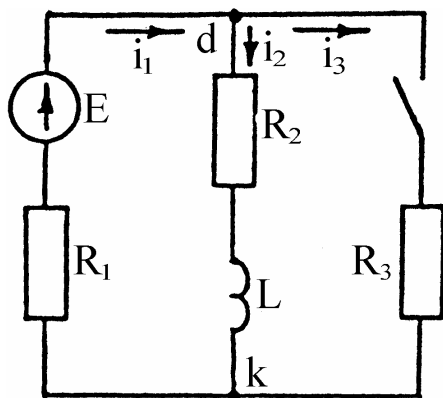


a)

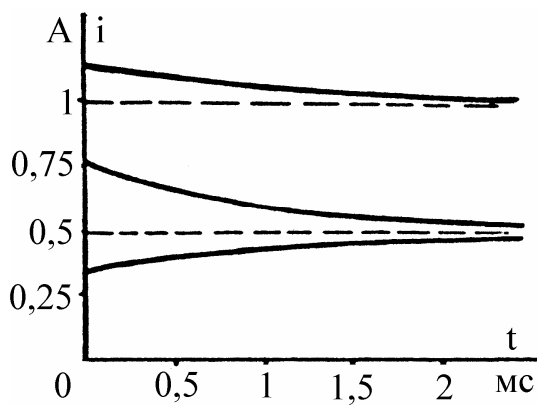


б)

Рисунок 6.1



a)



б)

Рисунок 6.2

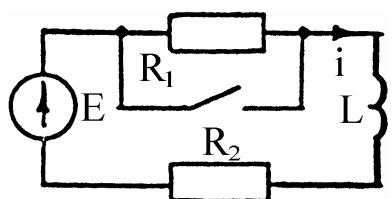


Рисунок 6.3

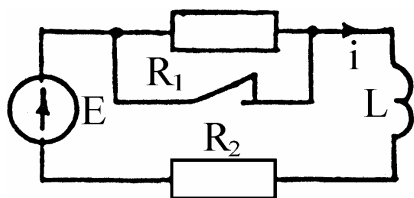


Рисунок 6.4

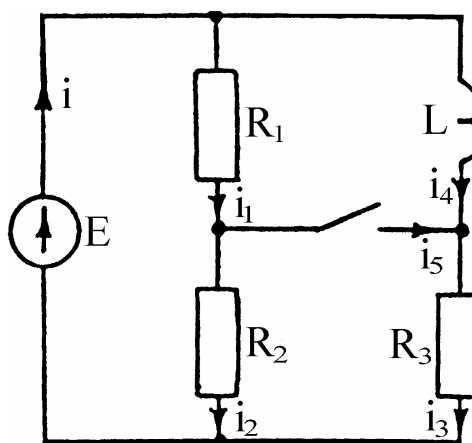


Рисунок 6.5

$$z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL)R_3}{R_2 + pL + R_3} = \frac{pL(R_1 + R_3) + R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2 + pL + R_3} = 0,$$

$$p = -\frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{L(R_1 + R_3)} = -1500 \frac{1}{c}.$$

Вільна складова струму  $i_2$

$$i_{2в} = Ae^{-1500t}.$$

Перехідний струм (2.4)

$$i_2 = 0,5 + Ae^{-1500t}. \quad (6.5)$$

Для визначення  $A$  складаємо початкову умову. Відповідно до 1<sup>го</sup> закону комутації при  $t = 0$ ,  $i_2 = 0$ , тому що до комутації, струму в 2<sup>й</sup> гілці не було. Поставимо цю умову в (2.5)  $0 = 0,5 + A$ , звідки  $A = -0,5$ .

Остаточне вираження струму  $i_2$

$$i_2 = 0,5 - 0,5e^{-1500t}. \quad (6.6)$$

Отримане вираження  $i_2$  в (2), у результаті одержимо

$$i_1 = 1 - 0,25e^{-1500t}.$$

З (1) треба

$$i_3 = i_1 - i_2 = 0,5 + 0,25e^{-1500t}.$$

Графіки струмів показані на рис. 6.1.б.

Час, за який  $i_2$  досягає 98% свого сталого значення визначимо з (6)

$$0,98 \cdot 0,5 = 0,5 - 0,5e^{-1500t} \rightarrow 0,02 = e^{-1500t} \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{\ln 0,02}{-1500} = 2,61 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 2,61 \text{ мс.}$$

2. Визначити струми в ланцюзі на рис. 6.2.а після комутації

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}, L = 0,1 \text{ Гн}, E = 150 \text{ В}.$$

### Рішення

Рівняння Кірхгофа такі ж, як і в попередній задачі (див. (6.1), (6.2), (6.3)). Закони зміни струмів під час перехідного процесу інші, тому що тут початкові умови інші.

Як і в попередній задачі

$$i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{в}}, \quad i_{2\text{пр}} = 0,5 \text{ А}, \quad i_{2\text{в}} = \text{В}e^{-1500t},$$

$$i_2 = 0,5 + \text{В}e^{-1500t}. \quad (6.7)$$

Струм  $i_2$  до комутації

$$i_2(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,75 \text{ А}.$$

Таким же  $i_2$  буде в перший момент після комутації, тобто при  $t = 0$ ,  $i_2 = 0,75 \text{ А}$ . Підставивши цю умову в (2.7), одержимо  $\text{В} = 0,25$ .

Підставивши знайдене значення  $\text{В}$  в (2.7), одержимо

$$i_2 = 0,5 + 0,25e^{-1500t}.$$

Струми  $i_1$  і  $i_3$ , як у попередній задачі визначимо з (2.2) і (2.1)

$$i_1 = 1 + 0,125e^{-1500t}, \quad i_3 = 0,5 - 0,125e^{-1500t}.$$

Графіки струмів показані на рис. 6.2.б.

Варто звернути увагу на те, що струми  $i_1$  і  $i_3$  у момент комутації змінюються стрибком. До комутації  $i_1 = i_2 = 0,75 \text{ А}$ ;  $i_3 = 0$ . У перший момент після комутації, тобто при  $t = 0$ ,  $i_1 = 1,125 \text{ А}$ ;  $i_2 = 0,75 \text{ А}$ ;  $i_3 = 0,375 \text{ А}$ .

3. Визначити струм в індуктивній котушці в ланцюзі на рис. 6.6.a після комутації (ключ миттєво переводиться з верхнього положення в нижнє). Параметри ланцюга:  $R = 50 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,1\sqrt{3} \text{ Гн}$ ;  $C = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ мкФ}$ .

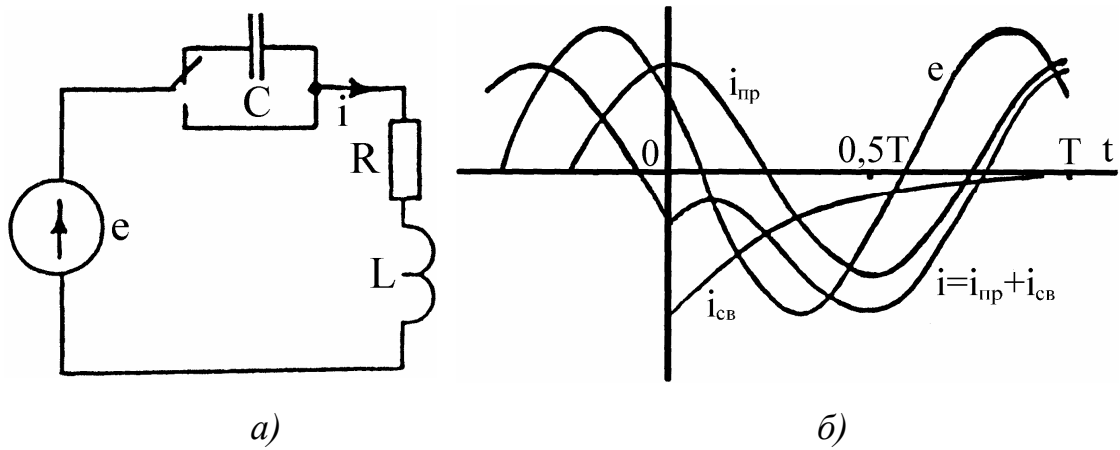


Рисунок 6.6

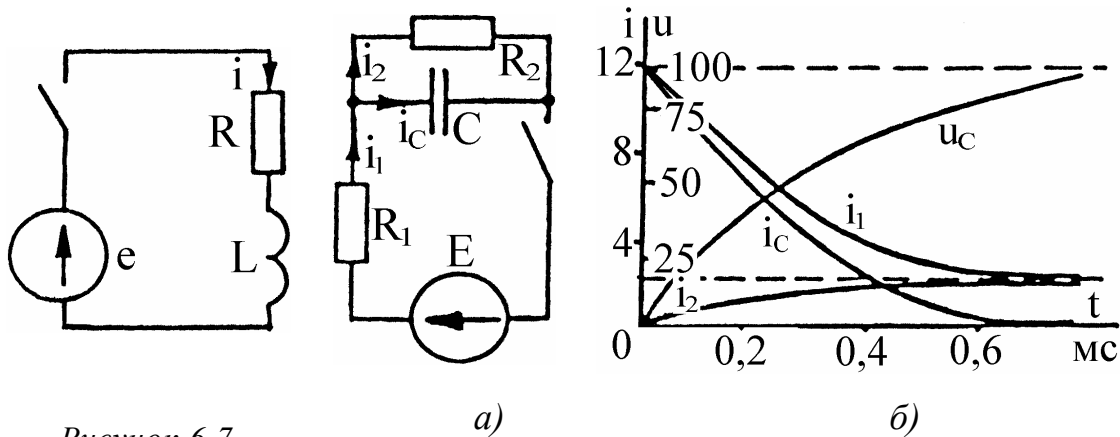


Рисунок 6.7

Рисунок 6.8

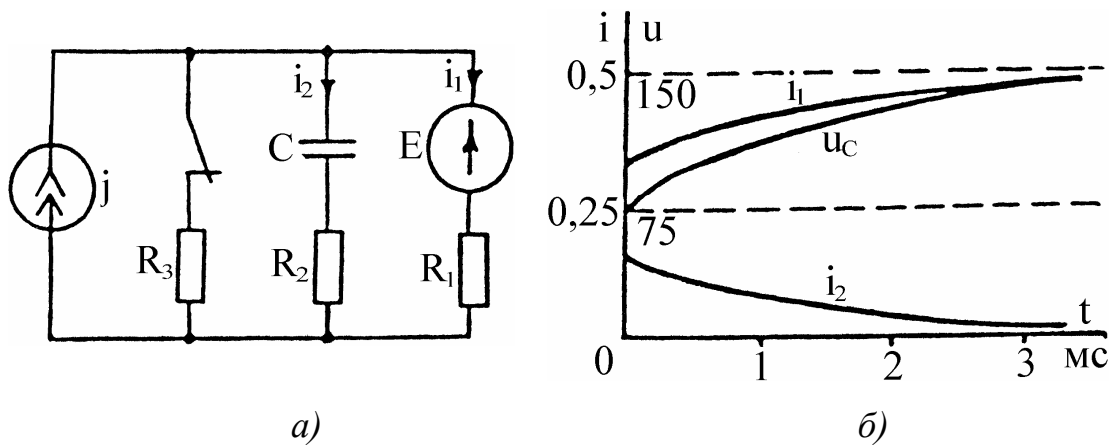


Рисунок 6.9

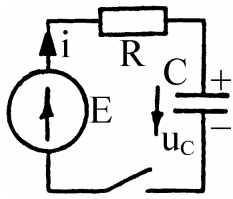


Рисунок 6.10

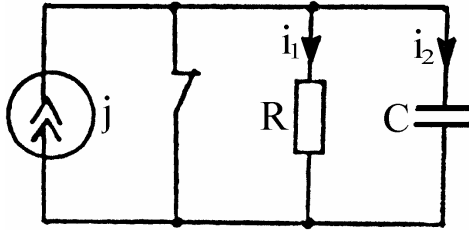


Рисунок 6.11

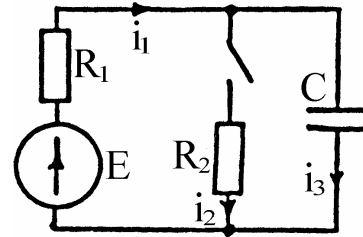


Рисунок 6.12

У ланцюзі діє синусоїдальна ЕРС:  $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ ;  $E_m = 300 \text{ В}$ ;  
 $\omega = 500 \frac{1}{\text{с}}$ ;  $\psi = 150^\circ$ .

### Рішення

Струм до комутації і його значення в момент комутації.

$$x_L = \omega L = 50\sqrt{3} \text{ Ом}, \quad x_C = \frac{1}{\omega C} = 100\sqrt{3} \text{ Ом},$$

$$z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = 100 \text{ Ом}, \quad \varphi = \arctg \frac{x_L - x_C}{R} = -60^\circ,$$

$$I_m = \frac{E_m}{z} = 3 \text{ А}, \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) = 3 \sin(500t + 210^\circ), \quad i(0) = 1 - 0,5 \text{ А}.$$

Примушена складова струму.

$$z = \sqrt{R^2 + x_L^2} = 100 \text{ Ом}, \quad I_m = \frac{E_m}{z} = 3 \text{ А}, \quad \varphi = \arctg \frac{x_L}{R} = 60^\circ,$$

$$i_{\text{пр}} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) = 3 \sin(500t + 90^\circ) = 3 \cos 500t.$$

Характеристичне рівняння, його корінь і вільна складова струму

$$R + pL = 0, \quad p = -\frac{R}{L} = -289 \text{ с}^{-1}, \quad i_{\text{в}} = Ae^{-289t}.$$

Початкова умова: при  $t = 0$ ,  $i = -1,5$ .

Підставимо його у вираження струму, визначимо А

$$-1,5 = 3 + A, \quad A = -4,5.$$

Остаточне вираження струму

$$i = 3\cos\omega t - 4,5e^{-289t}.$$

Графіки залежності  $i$ ,  $i_{пр}$ ,  $i_{в}$ , а також ЕРС від часу показані на рис. 6.6.б. Ліворуч від початку координат показані криві токи й ЕРС до комутації.

Із графіків видно, що в момент комутації стрибком змінюється кут зрушення фаз від  $-60^\circ$  до  $+60^\circ$ . Амплітуда в новому сталому режимі така ж, як і до комутації, але за рахунок перехідного процесу струм у момент часу  $t = \frac{T}{2}$  перевищує амплітуду сталого режиму.

**4.** У ланцюзі на рис. 2.8.а  $E = 120$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом,  $C = 20$  мкФ. Знайти вираження  $u$ ,  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  після комутації. Побудувати графіки.

### Рішення

Рівняння Кірхгофа для ланцюга після комутації

$$i_1 = i_2 + i_C, \quad (6.8)$$

$$R_1 i_1 + u_C = E, \quad (6.9)$$

$$R_2 i_2 = u_C. \quad (6.10)$$

Вхідний опір ланцюга й корінь характеристичного рівняння

$$z(p) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1 R_2 pC + R_1 + R_2}{R_2 pC + 1} = 0 \rightarrow p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -6000 \frac{1}{c}.$$

Примушені й вільна складові напруги на конденсаторі

$$u_{C_{np}} = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = 100\text{В}, \quad u_{C_B} = Ae^{-6000t}.$$

Загальне рішення

$$u_C = u_{C_{np}} + u_{C_B} = 100 + Ae^{-6000t}.$$

Початкова умова й постійна інтегрування при  $t = 0$ ,  $u = 0$ ,  $0 = 100 + A \rightarrow A = -100$ .

Напруга на конденсаторі й струми в гілках

$$u_C = 100 - 100e^{-6000t}.$$

$$3 (6.10) \quad i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 2 - 2e^{-6000t}.$$

$$3 (6.9) \quad i_1 = \frac{E - u_C}{R_1} = 2 + 10e^{-6000t}.$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = 12e^{-6000t}.$$

Графіки всіх струмів і напруги  $u$  наведені на мал. 6.8.б.

**5.** У ланцюзі на рис. 6.9.а  $E = 50$  В;  $j = 0,5$  А;  $R_1 = R_3 = 200$  Ом;  $R_2 = 300$  Ом;  $C = 4$  мкФ.

Визначити  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u$  після розмикання ключа.

### Рішення

Напругу на конденсаторі до комутації визначимо методом двох вузлів

$$u_C = u_C(0) = \frac{E_1 g_1 + j}{g_1 + g_3} = 75\text{В}.$$

Рівняння Кірхгофа для ланцюга після комутації

$$i_1 + i_2 = j, \quad (6.11)$$

$$u_C + R_2 i_2 - R_1 i_1 = E. \quad (6.12)$$

Вхідний опір, наприклад, відносно  $E$  і корінь характеристичного опору

$$R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} = 0, \quad p = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -500 \frac{1}{c}.$$

Примушена складова  $u$

$$u_{C_{пр}} = E + R_1 i_{1_{пр}} = E + R_1 j = 150 \text{ В}.$$

Загальне вираження  $u$

$$u_C = u_{C_{пр}} + u_{C_b} = 150 + Ae^{-500t}.$$

Початкова умова й постійна  $A$ , при  $t = 0$ ,  $u = 75 \text{ В}$ ,  $75 = 150 + A$ ,  
 $A = -75$ .

Остаточне вираження  $u$

$$u_C = 150 - 75e^{-500t}.$$

Струми в гілках ланцюга, з урахуванням (6.11)

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt} = 0,15e^{-500t},$$

$$i_1 = j - i_2 = 0,5 - 0,15e^{-500t}.$$

Графіки  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $u(t)$  показані на рис. 6.9.б.

**6.** Знайти закони зміни струмів у ланцюзі на рис. 6.13 після зами-  
кання ключа  $E = 60 \text{ В}$ ,  $R = 80 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 0,2 \text{ Гн}$ ,  $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ .



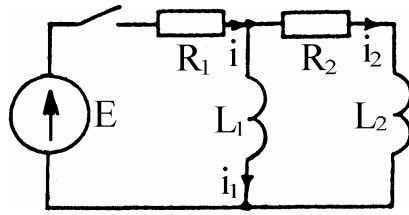


Рисунок 6.13

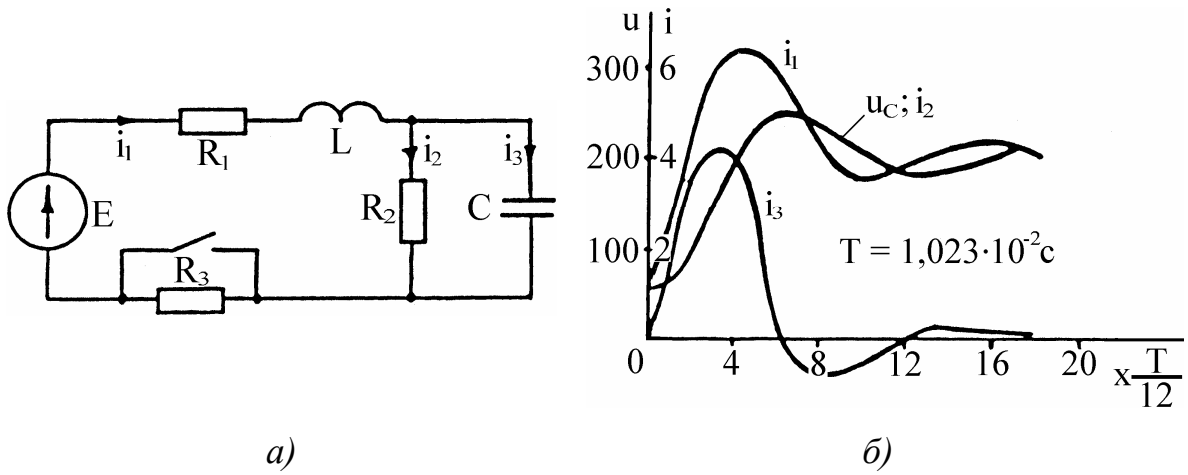


Рисунок 6.14

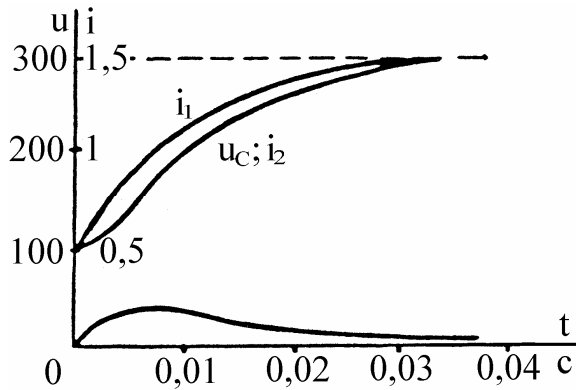


Рисунок 6.15

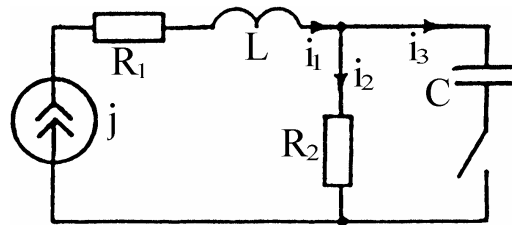


Рисунок 6.16

### Рішення

Рівняння Кірхгофа для ланцюга після комутації

$$i = i_1 + i_2, \quad (6.13)$$

$$Ri + L_1 \frac{di_1}{dt} = E, \quad (6.14)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (6.15)$$

Вхідний опір щодо джерела ЕРС

$$z(p) = R + \frac{pL_1(R_2 + pL_2)}{pL_1 + R_2 + pL_2} = 0, \quad (6.16)$$

звідси впливає характеристичне рівняння і його корінь

$$L_1 L_2 p^2 + (RL_1 + RL_2 + R_2 L_1)p + RR_2 = 0, \quad (6.17)$$

$$0,02p^2 + 44p + 8000 = 0,$$

$$p_1 = -200 \frac{1}{c}, \quad p_2 = -2000 \frac{1}{c}.$$

Примушені й вільна складові струми  $i_1$

$$i_{1np} = \frac{E}{R} = 0,75, \quad i_{1в} = A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-2000t}.$$

Для визначення двох постійних  $A_1$  і  $A_2$  запишемо вираження перехідного струму  $i_1$  і його похідній

$$i_1 = 0,75 + A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-2000t}, \quad (6.18)$$

$$\frac{di_1}{dt} = -200A_1 e^{-200t} - 2000A_2 e^{-2000t}. \quad (6.19)$$

Початкові умови. При  $t = 0$ : 1)  $i_1 = 0$ , 2)  $\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L_1} = 300 \frac{A}{C}$ , 1<sup>е</sup> початкова умова впливає безпосередньо з першого закону комутації; 2<sup>е</sup> умова – з (6.14), де при  $t = 0$ ,  $i = 0$ , тому що  $i_1$  і  $i_2$  не можуть з'явитися стрибком після замикання ключа.

Представимо 1<sup>е</sup> умова в (6.18), друге – в (6.19). Одержуємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= -0,75 \\ -200A_1 - 2000A_2 &= 300 \end{aligned} \right\}, \text{ звідки } \begin{aligned} A_1 &= -0,667; \\ A_2 &= -0,0833. \end{aligned}$$

Остаточне вираження  $i_1$

$$i_1 = 0,75 - 0,667e^{-200t} - 0,0833e^{-2000t},$$

з рівняння (6.14)

$$i = \frac{1}{R} \left( E - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) = 0,75 - 0,333e^{-200t} - 0,417e^{-2000t}.$$

З рівняння (6.13)

$$i_2 = i - i_1 = 0,333e^{-200t} - 0,333e^{-2000t}.$$

**7.** У ланцюзі на рис. 6.14.а  $E = 450$  В,  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 200$  Ом,  $R_3 = 600$  Ом,  $L = 4,138$  Гн,  $C = 18,127$  мкФ. Визначити  $u(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  після замикання ключа. Побудувати графіки цих величин.

### Рішення

Струм в індуктивному елементі й напруга на конденсаторі до комутації

$$I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,5 \text{ А}, \quad U_C = I_2 R_2 = 100 \text{ В}.$$

Примушені складові цих величин

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ А}, \quad u_{Cnp} = i_{2np} R_2 = 300 \text{ В}.$$

Рівняння Кірхгофа для ланцюга після комутації

$$i_1 = i_2 + i_3, \tag{6.20}$$

$$R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + u_C = E, \quad (6.21)$$

$$R_2 i_2 = u_C. \quad (6.22)$$

Вхідний опір, що впливає з нього характеристичне рівняння (6.23) і його корінь

$$z(p) = R_1 + pL + \frac{\frac{R_2}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = 0, \quad (6.23)$$

$$p^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} p + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} = 0,$$

$$p^2 + 300p + 20000 = 0, \quad p_1 = -100 \frac{1}{c}, \quad p_2 = -200 \frac{1}{c}.$$

Вільна складова напруги на ємності, перехідну напругу на ємності і його похідній

$$u_{C_B} = Ae^{-100t} + Be^{-200t},$$

$$u_C = u_{C_{np}} + u_{C_B} = 300 + Ae^{-100t} + Be^{-200t}, \quad (6.24)$$

$$\frac{du_C}{dt} = -100Ae^{-100t} - 200Be^{-200t}. \quad (6.25)$$

Початкові умови. При  $t = 0$ : 1)  $u_C = 100$  В; 2)  $\frac{du_C}{dt} = 0$ . 1<sup>е</sup> умова – з 2<sup>го</sup> закони комутації; 2<sup>е</sup> початкова умова впливає із  $C \frac{du_C}{dt} \Big|_{(0)} = i_3(0)$  із (2.20)  $i_3(0) = i_1(0) - i_2(0)$ ; по 1<sup>му</sup> законі комутації  $i_1(0) = 0,5$  А; з (2.22)  $i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R} = 0,5$  А; отже  $i_3(0) = 0$ .

Склавши 1<sup>у</sup> початкову умову в (6.24) і 2<sup>е</sup> в (6.25), одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A + B = -200; \\ -100A - 200B = 0, \end{cases}$$

з якої випливає  $A = -400$ ;  $B = 200$ .

Напруга й струм конденсатора

$$u_C = 300 - 400e^{-100t} + 200e^{-200t},$$

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 0,725e^{-100t} + 0,725e^{-200t}.$$

Струм  $i_2$  визначаємо з (2.22),  $i_2$  – з (2.20)

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 1,5 - 2e^{-100t} + e^{-200t},$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 1,5 - 1,275e^{-100t} + 0,275e^{-200t}.$$

Більша постійна часу  $\tau_1 = \frac{1}{100} = 0,01$  с. Задаючись різними значеннями  $t$  у межах від 0 до  $4\tau_1 = 0,04$  с обчислюємо  $u$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  у різні моменти часу й за отриманими даними будуємо графіки (показані на рис. 6.14.б).

**8.** У ланцюзі до попередньої задачі (рис. 6.14.а) параметри змінені:  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом,  $R_3 = 165$  Ом,  $L = 0,05$  Гн,  $C = 50$  мкФ,  $E = 220$  В. знайти вираження  $u(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  і побудувати їхні графіки.

### Рішення

До комутації

$$I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 1 \text{ А}, \quad u_C = I_2 R_2 = 50 \text{ В}.$$

Примушені значення цих величин

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 4 \text{ A}, \quad u_{Cnp} = i_{2np} R_2 = 200 \text{ В.}$$

Рівняння Кірхгофа див. (6.20); (6.21); (6.22), характеристичне рівняння див. (6.23), але коефіцієнти, а отже, і корінь - інші.

$$p^2 + 500p + 440000 = 0, \quad p_{1,2} = -250 \pm j614.$$

Корені комплексні, сполучені, тому вільна складова  $u$

$$u_{C_B} = e^{-250t} (A \cos 614t + B \sin 614t).$$

Перехідна напруга і її похідна

$$u_C = 200 + e^{-250t} (A \cos 614t + B \sin 614t),$$

$$\frac{u_C}{dt} = e^{-250t} (A \cos 614t + B \sin 614t) + 614e^{-250t} (-A \sin 614t + B \cos 614t).$$

Початкові умови: при  $t = 0$ , 1)  $u_C = 50 \text{ В}$ ; 2)  $\frac{du_C}{dt} = 0$ . Підставивши

1<sup>у</sup> початкову умову у вираження  $u_C$  й 2<sup>е</sup> - в  $\frac{du_C}{dt}$ , одержимо систему рі-

внянь

$$\left. \begin{array}{l} -150 = A \\ 0 = -250A + 614B \end{array} \right\}, \quad \text{звідки} \quad \begin{array}{l} A = -150; \\ B = -61,075. \end{array}$$

Напруга на конденсаторі

$$\begin{aligned} u_C &= 200 - e^{-250t} (150 \cos 614t + 61 \sin 614t) = \\ &= 200 - 162e^{-250t} \sin(614t + 67,8^\circ). \end{aligned}$$

Струми визначаємо в тім же порядку, що й у попередній задачі

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 5,37e^{-250t} \sin 614t,$$

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 4 - e^{-250t} (3 \cos 614t + 1,22 \sin 614t),$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 4 - e^{-250t} (3 \cos 614t - 4,15 \sin 614t).$$

Графіки всіх величин показані на рис. 6.15.

**9.** Визначити перехідні струми й напруга на ємності в ланцюзі на рис. 6.16, де  $j = 2$  А,  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 200$  Ом,  $L = 0,5$  Гн,  $C = 50$  мкФ.

### Рішення

До комутації струм в індуктивному елементі й напруга на ємності

$$I_1 = j = 2 \text{ А}, \quad U_0 = 0.$$

Примушені значення

$$i_{1\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = j = 2 \text{ А}, \quad u_{C\text{пр}} = i_{2\text{пр}} R_2 = 400 \text{ В}.$$

Вхідний опір щодо затисків ключа й корінь характеристичного рівняння

$$\frac{1}{pC} + R_2 = 0, \quad p = -\frac{1}{R_2 C} = -100 \frac{1}{\text{с}}.$$

Вільна складова  $u$  і загальне його вираження

$$u_{C_B} = Ae^{-100t}, \quad u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C_B} = 400 + Ae^{-100t}.$$

При  $t = 0$ ,  $u = 0$ ,  $0 = 400 + A$ , звідки  $A = -400$ , отже,

$$u_C = 400 - 400e^{-100t},$$

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 2 - 2e^{-100t},$$

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 2e^{-250t}.$$

Перевірка:  $i_2 + i_3 = 2A = j$ .

Висновок: параметри  $R_1$  і  $L$  гілки із джерелом струму не впливають на перехідний процес.

**10.** Вирішити задачу 1 операторним методом.

### Рішення

Операторна схема заміщення показана на рис. 6.17. до комутації струм  $i_2 = 0$ , тому додаткова ЕРС  $Li_2(0) = 0$ . Ця обставина дозволяє визначити зображення струму  $i_1$  гілки за допомогою закону Ома

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p}}{R_1 + \frac{(R_2 + pL)R_3}{R_2 + R_3 + pL}} = \frac{pLE + (R_2 + R_3)E}{p[pL(R_1 + R_3) + R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1]}.$$

Після підстановки числових значень

$$I_1(p) = \frac{0,75p + 1500}{p(p + 1500)}.$$

Для переходу до оригіналу застосуємо формулу розкладання

$$i_1 = \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t},$$

де  $N(p) = 0,75p + 1500$ ;

$M(p) = p(p + 1500)$ ;

$M'(p) = 2p + 1500$ ,



з  $M(p)=0$  визначаємо корінь

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -1500,$$

$$N(p_1)=1500, \quad M'(p_1)=1500, \quad N(p_2)=375, \quad M'(p_2)=-1500.$$

Оригінал струму

$$i_1 = \frac{1500}{1500} e^{0t} + \frac{375}{-1500} e^{-1500t} = 1 - 0,25e^{-1500t}.$$

Інші струми визначаються за допомогою рівнянь Кирхгофа

$$i_3 = \frac{E - R_1 i_1}{R_3} = 0,5 + 0,25e^{-1500t},$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = 0,5 - 0,5e^{-1500t}.$$

**11.** Вирішити задачу 2 операторним методом.

### Рішення

Операторна схема заміщення ланцюга така ж, як і в попередній задачі (рис. 6.17), але в цьому випадку  $Li_2(0) \neq 0$ . Починати розрахунок із застосуванням закону Ома не можна. Застосовуємо метод  $2^x$  вузлів. Зображення вузлової напруги

$$U(p) = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1} - Li_2(0) \frac{1}{R_2 + pL}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + pL} + \frac{1}{R_3}}.$$

Після алгебраїчних перетворень і підстановки числових значень із обліком  $i_2(0) = 0,75$  А одержимо

$$U(p) = \frac{37,5p + 75000}{p(p + 1500)}.$$

Оригінал вузлової напруги знайдемо за допомогою формули розкладання

$$N(p) = 37,5p + 75000,$$

$$M(p) = p(p + 1500),$$

$$M'(p) = 2p + 1500.$$

Корінь знаменника:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -1500,$$

$$u = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = 50 - 12,5e^{-1500t}.$$

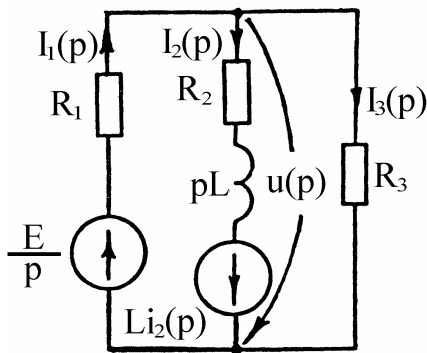


Рисунок 6.17

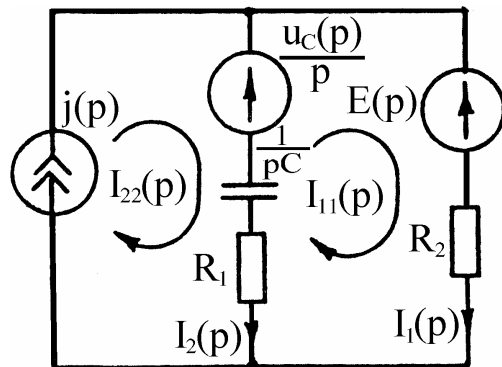


Рисунок 6.18

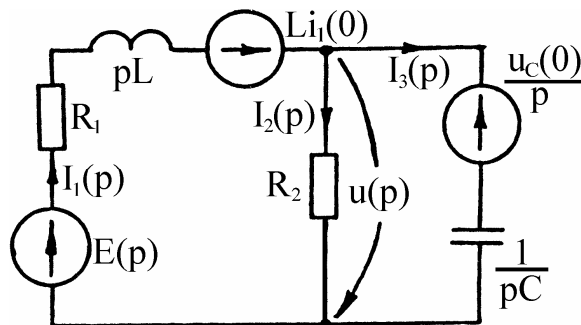


Рисунок 6.19

Оригінали струмів

$$i_1 = \frac{Eu}{R_1} = 0,5 - 0,125e^{-1500t},$$

$$i_3 = \frac{u}{R_3} = 0,5 - 0,125e^{-1500t},$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = 0,5 + 0,25e^{-1500t}.$$

**12.** Вирішити операторним методом задачу 5.

### Рішення

Операторна схема заміщення ланцюга після комутації показана на рис. 6.18. Застосуємо метод контурних струмів. Зображення контурного струму  $I_{22}(p)$  є відомим

$$I_{22}(p) = j(p) = \frac{j}{p} = \frac{0,5}{p},$$

для визначення  $I_{11}(p)$  складемо рівняння

$$I_{11}(p) \cdot \left( R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} \right) - \frac{j}{p} \left( R_2 + \frac{1}{pC} \right) = -\frac{E}{p} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Вирішивши це рівняння відносно  $I_{11}(p)$  і підставивши числові значення вхідних у рівняння величин, одержимо:

$$I_{11}(p) = I_1(p) = \frac{0,35p + 250}{p(p + 500)}.$$

Перейдемо до оригіналу

$$N(p) = 0,35p + 250, \quad M(p) = p(p + 500), \quad M'(p) = 2p + 500,$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -500,$$

$$i_1 = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = 0,5 - 0,15e^{-500t}, \quad i_2 = j - i_1 = 0,15e^{-500t}.$$

Напруга на конденсаторі

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_2 dt = \frac{10^6}{4} 0,15 \frac{1}{-500} e^{-500t} + K = K - 75e^{-500t},$$

де  $K$  – постійна інтегрування. Визначимо її з початкових умов. При  $t = 0$ ,  $u = 75$ У.  $75 = K - 75$  ( $K = 150$ ).

Підставимо знайдене значення  $K$  у вираженні  $u$

$$u_C = 150 - 75e^{-500t}.$$

### 13. Вирішити операторним методом задачу 7.

#### Рішення

Операторна схема заміщення ланцюга після комутації на рис. 6.19. Зображення вузлової напруги є зображенням напруги на конденсаторі, тобто

$$u_C(p) = u(p) = \frac{\left(\frac{E}{p} + Li_1(0)\right) \frac{1}{R_1 + pL} + \frac{u_C(0)}{p} pC}{\frac{1}{R_1 + pL} + \frac{1}{R_2} + pC}.$$

Після алгебраїчних перетворень і підстановки числових значень одержимо

$$u_C(p) = \frac{100p^2 + 30000p + 6 \cdot 10^6}{p(p^2 + 300p + 20000)}.$$

Примітка. Значення  $i_1(0)$  і  $u(0)$  дорівнюють значенням цих величин до комутації (див. рішення 5 класичним методом). Застосовуємо формулу розкладання.

$$N(p) = 100p^2 + 3 \cdot 10^4 p + 6 \cdot 10^6,$$

$$M(p) = p(p^2 + 300p + 2 \cdot 10^4),$$

$$M'(p) = 3p^2 + 600p + 2 \cdot 10^4.$$

З  $p(p^2 + 300p + 2 \cdot 10^4) = 0$  визначаємо

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -100, \quad p_3 = -200.$$

Обчислюємо  $N(p)$  й  $M'(p)$  при цих значеннях корінь

$$N(p_1) = 6 \cdot 10^6, \quad M'(p_1) = 2 \cdot 10^4,$$

$$N(p_2) = 4 \cdot 10^6, \quad M'(p_2) = -10^4,$$

$$N(p_3) = 4 \cdot 10^6, \quad M'(p_3) = 2 \cdot 10^4.$$

Оригінал напруги на конденсаторі

$$u_C = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{N(p_3)}{M'(p_3)} e^{p_3 t} = 300 - 400e^{-100t} + 200e^{-200t}.$$

Струми відразу визначаємо в оригіналах

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 0,725e^{-100t} - 0,725e^{-200t},$$

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2} = 1,5 - 2e^{-100t} + e^{-200t},$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 1,5 - 1,275e^{-100t} + 0,275e^{-200t}.$$

**14.** Вирішити операторним методом задачу 8.

### Рішення

У цій задачі розглядається та ж схема, що й у задачі 7, але параметри її інші. Вираження  $u(p)$  відрізняється від попереднього випадку коефіцієнтами

$$u_C(p) = \frac{50p^2 + 2,5 \cdot 10^4 p + 8,8 \cdot 10^7}{p(p^2 + 500p + 4,4 \cdot 10^5)},$$

$$N(p) = 50p^2 + 2,5 \cdot 10^4 p + 8,8 \cdot 10^7,$$

$$M'(p) = 3p^2 + 1000p + 4,4 \cdot 10^5,$$

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -250 \pm j614,4 = 663,3e^{\pm j112^\circ}.$$

Обчислюємо  $N(p)$  й  $M'(p)$  для  $p = p_1, p_2$  і  $p_3$

$$N(p_1) = 8,8 \cdot 10^7, \quad M'(p_1) = 4,4 \cdot 10^5,$$

$$\begin{aligned} N(p_2) &= 50 \cdot 663,3^2 e^{j224^\circ} + 2,5 \cdot 10^4 \cdot 663,3 e^{j112^\circ} + 8,8 \cdot 10^7 = \\ &= 2,2 \cdot 10^7 (\cos 224^\circ + j \sin 224^\circ) + 1,658 \cdot 10^7 (\cos 112^\circ + j \sin 112^\circ) + \\ &+ 8,8 \cdot 10^7 = 6,596 \cdot 10^7 + j9,369 \cdot 10^4 = 6,596 \cdot 10^7 e^{j0,08^\circ} \approx 6,596 \cdot 10^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'(p_2) &= 3 \cdot 663,3^2 e^{j224^\circ} + 6,633 \cdot 10^5 e^{j112^\circ} + 4,4 \cdot 10^5 = \\ &= -7,579 \cdot 10^5 - j3,0187 \cdot 10^5 = 8,158 \cdot 10^5 e^{-j158,3^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(p_3) &= 50 \cdot 663,3^2 e^{-j224^\circ} + 2,5 \cdot 10^4 \cdot 663,3 e^{-j112^\circ} + 8,8 \cdot 10^7 = \\ &= 6,596 \cdot 10^7 - j9,369 \cdot 10^4 \approx 6,596 \cdot 10^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'(p_3) &= 3 \cdot 663,3^2 e^{-j224^\circ} + 6,633 \cdot 10^5 e^{-j112^\circ} + 4,4 \cdot 10^5 = \\ &= -7,579 \cdot 10^5 + j3,0187 \cdot 10^5 = 8,158 \cdot 10^5 e^{j158,3^\circ}. \end{aligned}$$

Оригінал напруги на конденсаторі

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{8,8 \cdot 10^7}{4,4 \cdot 10^5} + \frac{6,596 \cdot 10^7 e^{(-250+j614,4)t}}{8,158 \cdot 10^5 e^{-j158,3^\circ}} + \frac{6,596 \cdot 10^7 e^{(-250-j614,4)t}}{8,158 \cdot 10^5 e^{j158,3^\circ}} = \\ &= 200 + 80,85 e^{-250t} \left( e^{j(614,4t+158,3^\circ)} + e^{-j(614,4t+158,3^\circ)} \right) = \\ &= 200 + 161,7 e^{-250t} \cos(614,4t + 158,3^\circ). \end{aligned}$$

Представивши в отриманому вираженні аргумент косинуса у вигляді  $614,4t + 68,3^\circ + 90^\circ$  й скориставшись формулою

$\text{Cos}(\alpha + 90^\circ) = -\text{Sin}\alpha$ , де  $\alpha = 614,4t + 68,3^\circ$ , одержимо таке ж вираження як і в класичному методі (задача 8). Розбіжність у модулі й початковій фазі менш 1%.

Примітка. При комплексних сполучених коренях значення  $N(p_k)$  й  $M'(p_k)$  і відповідні доданки, у формулі розкладання також виявляються комплексно-сполученими. З огляду на це, у формулі розкладання досить подвоїти дійсну частину доданка від одного з комплексно-сполучених коренів, а мниму частину відкинути, отже й можна не обчислювати.

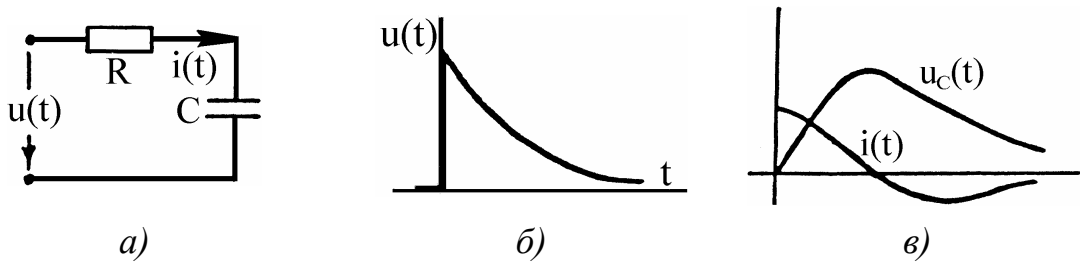


Рисунок 6.20

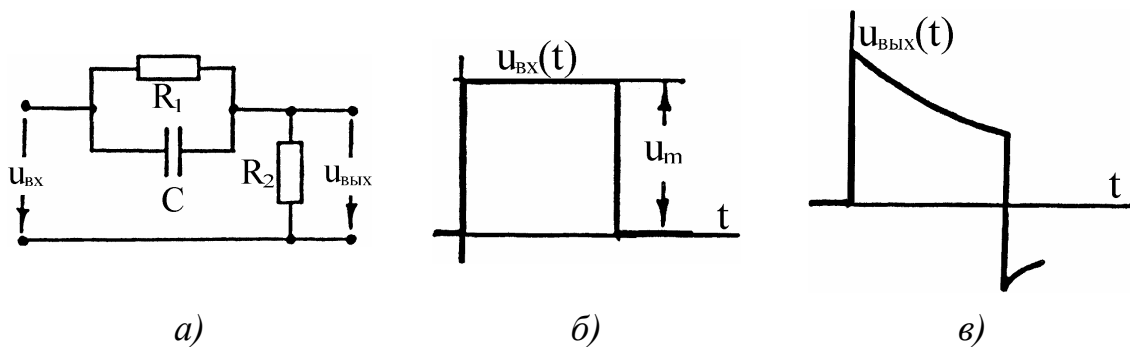


Рисунок 6.21

15. У ланцюг на рис. 6.20.а подається імпульс напруги  $u(t) = 100e^{-40t}$  (рис. 6.20.б).  $R = 100$  Ом,  $C = 200$  мкФ. Знайти закони зміни струму  $i(t)$  і напругу  $u(t)$ .

### Рішення

При включенні даного ланцюга на постійну напругу  $U$

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0,01Ue^{-50t}, \quad u_c(t) = U(1 - e^{-50t}).$$

Із цих виражень впливають перехідна провідність і передатна функція по напрузі

$$g(t) = 0,01e^{-50t}, \quad g(t-x) = 0,01e^{-50t}e^{50x},$$

$$h(t) = 1 - e^{-50t}, \quad h(t-x) = 1 - e^{-50t}e^{50x}.$$

У вираженні  $u(t)$  замінимо  $t$  на  $x$  і знайдемо похідну  $u(x)$

$$u(x) = 100e^{-40x}, \quad u'(x) = -4000e^{-40x}.$$

Перехідний струм і напруга з урахуванням  $u(0) = 100$

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(x)g(t-x)dx = 5e^{-50t} - 4e^{-40t},$$

$$u_C(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(x)h(t-x)dx = 500e^{-40t} - 500e^{-50t}.$$

Графіки  $i(t)$  і  $u(t)$  показані на рис. 6.20.в.

**16.** Визначити  $u_{\text{вих}}(t)$  у ланцюзі на рис. 6.21.а при подачі на вхід ланцюга імпульсу  $u_{\text{вх}}(t)$  (рис. 6.21.б)  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $C = 1$  мкФ,  $U_m = 100$  В,  $t = 1$  мс.

### Рішення

Визначимо передатну функцію по напрузі. Для цього знайдемо  $u_{\text{вих}}(p)$  при підключенні ланцюга на рис. 6.21.а до джерела постійної напруги  $U$

$$U_{\text{вих}}(p) = R_2 I(p), \quad I(p) = \frac{U(p)}{z(p)}, \quad U(p) = \frac{U}{p},$$

$$z(p) = \frac{R_1}{R_1 p C + 1} + R_2 = \frac{p R_1 R_2 C + R_1 + R_2}{p R_1 C + 1},$$



$$U_{\text{вих}}(p) = \frac{U(8p + 4000)}{p(8p + 6000)} = U(0,667 + 0,333e^{-750t}),$$

$$h(t) = 0,667 + 0,333e^{-750t}, \quad h(t-x) = 0,667 + 0,333e^{-750t} e^{750x}.$$

На інтервалі  $0 \leq t \leq t_1$

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m = 100, \quad u_{\text{вх}}(0) = 100, \quad u_{\text{вх}}(x) = 100, \quad u'_{\text{вх}}(x) = 100,$$

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_0^t u'_{\text{вх}}(x)h(t-x)dx = \\ &= 100(0,667 + 0,333e^{-750t}) = 66,7 - 33,3e^{-750t}. \end{aligned}$$

На інтервалі  $t_1 \leq t \leq \infty$  (див. [1, §8.55])

$$\begin{aligned} U_{\text{вих}}(t) &= U_{\text{вх}}(0)h(t) + \int_{x=0}^{t_1} u'_{\text{вх}}(x)h(t-x)dx + (0 - U_m)h(t-t_1) + \\ &+ \int_{t_1}^t u'_{\text{вх}}(x)h(t-x)dx = 66,7 - 33,3e^{-750t} - 100(0,667 + 0,333e^{-750t} e^{-0,75}) = \\ &= -37,2e^{-750t}. \end{aligned}$$

Крива  $U_{\text{вих}}(t)$  показана на рис. 6.26.в.

**17.** Визначити струм у ланцюзі на рис. 6.22.а при подачі на її вхід напруги у формі імпульсу на рис. 6.22.б.  $R = 20$  Ом,  $L = 0,1$  Гн,  $t_1 = 4$  мс,  $t_2 = 8$  мс.

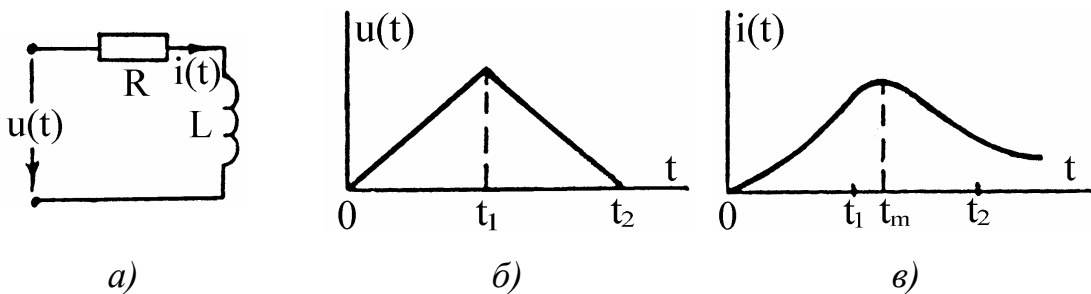


Рисунок 6.22

## Рішення

Струм у цьому ланцюзі при його підключенні до джерела постійної напруги

$$i = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = U(0,05 - 0,05e^{-200t}).$$

Перехідна провідність

$$g(t) = 0,05 - 0,05e^{-200t}, \quad g(t-x) = 0,05 - 0,05e^{-200t}e^{200x}.$$

Перехідний струм від імпульсу на рис. 6.22.б по інтервалах:

1) інтервал  $0 \leq t \leq t_1$

$$U_{\text{BX}_1}(t) = \frac{U_m}{t_1} t = 25000t, \quad U_{\text{BX}_1}(x) = 25000x,$$

$$U'_{\text{BX}_1}(x) = 25000, \quad U_{\text{BX}_1}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} i(t) &= U_{\text{BX}}(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'_{\text{BX}}(x)g(t-x)dx = 25000 \cdot 0,05 \int_0^{t_1} (1 - e^{-200t}e^{200x})dx = \\ &= -6,25 + 1250t + 6,25e^{-200t}; \end{aligned}$$

2) інтервал  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$U_{\text{BX}_2}(x) = 200 - 25000x, \quad U'_{\text{BX}_2}(x) = -25000,$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} u'_{\text{BX}_1}(x)g(t-x)dx + \int_{t_1}^t u'_{\text{BX}_2}(x)g(t-x)dx = \\ &= 16,25 - 1250t - 21,57e^{-200t}; \end{aligned}$$

3) інтервал  $t_2 \leq t \leq \infty$

$$U_{\text{BX}_3}(t) = U_{\text{BX}_3}(x) = 0, \quad U'_{\text{BX}_3}(x) = 0,$$

$$i(t) = \int_0^{t_1} u'_{\text{вх}_1}(x)g(t-x)dx + \int_{t_1}^{t_2} u'_{\text{вх}_2}(x)g(t-x)dx = 9,387e^{-200t}.$$

Крива  $i(t)$ , розрахована по отриманих вираженнях, показана на рис. 6.22.в.

### 6.5 Контрольне завдання 6

Задача. Визначити струми в гілках і напругу на конденсаторі під час перехідного процесу в одній зі схем. Побудувати графіки залежності цих величин від часу.

Номер схеми й вихідні дані для свого варіанта вибрати з табл. 6.1.

Перехідний процес розрахувати двома методами: класичним і операторним.

Таблиця 6.1

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, І	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
Схема	<u>Рис. 6.23</u> Рис. 6.29	<u>Рис. 6.24</u> Рис. 6.30	<u>Рис. 6.25</u> Рис. 6.31	<u>Рис. 6.26</u> Рис. 6.32	<u>Рис. 6.27</u> Рис. 6.33	<u>Рис. 6.28</u> Рис. 6.34	1
$E(B)/I(A)$	160/2	180/3	200/4	220/5	240/4	260/3	2
$R_1(\text{Ом})$	10	20	25	30	35	40	3
$R_2(\text{Ом})$	40	30	50	60	30	40	4
$R_3(\text{Ом})$	60	50	40	30	20	10	5
$L(\text{Гн})$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	6
$C(\text{мкФ})$	100	120	140	140	120	100	7

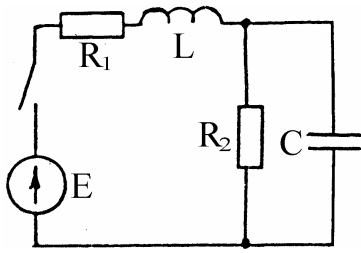


Рисунок 6.23

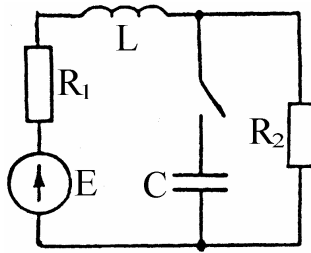


Рисунок 6.24

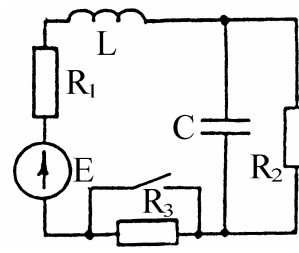


Рисунок 6.25

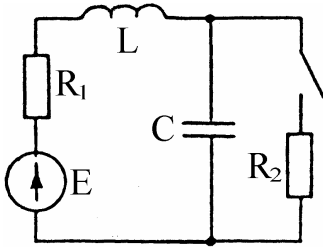


Рисунок 6.26

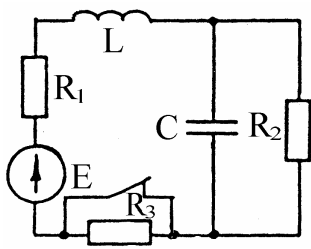


Рисунок 6.27

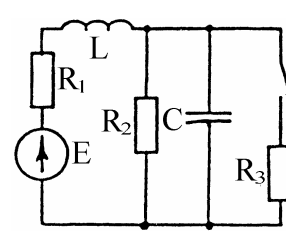


Рисунок 6.28

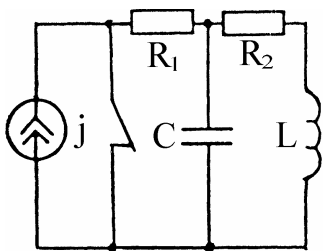


Рисунок 6.29

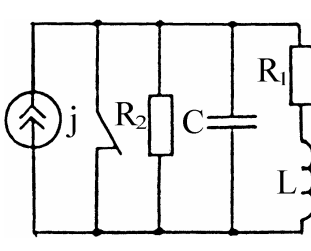


Рисунок 6.30

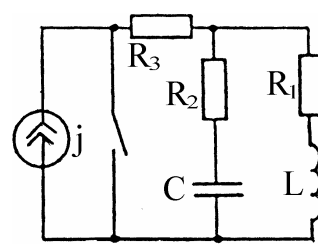


Рисунок 6.31

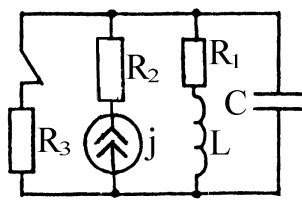


Рисунок 6.32

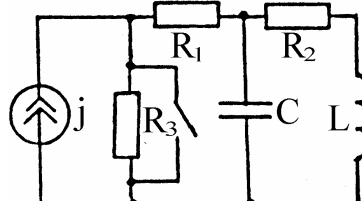


Рисунок 6.33

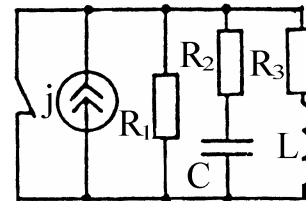


Рисунок 6.34

# 7

## ***ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ***

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок лінії з розподіленими параметрами***

***Контрольне завдання 7***

## 7. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 7.1 Робоча програма

1. Електричні кола із зосередженими й електричні кола з розподіленими параметрами. Критерії класифікації.
2. Однорідна лінія (ОЛ). Схема заміщення й диференціальні рівняння ОЛ.
3. Рішення диференціальних рівнянь ОЛ для сталого синусоїдального процесу. Параметри  $z_0$ ,  $y_0$ ,  $z_v$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .
4. Визначення комплексів напруги й струми в будь-якій крапці ОЛ через струми й напруги на початку лінії й наприкінці лінії.
5. Падаючі й відбиті хвилі в ОЛ. Фазова швидкість. Коефіцієнт відображення.
6. Погоджене навантаження. Формули для визначення напруги й струму. ККД. Вхідний опір.
7. Лінія без перекручувань.
8. Лінія без втрат. Визначення комплексів напруги й струми в будь-якій крапці лінії без втрат.
9. Процеси в лінії без втрат при холостому ході й при короткому замиканні, при реактивному навантаженні, при погодженої й при довільному навантаженні.
10. Перехідні процеси в ОЛ. Рішення диференціальних рівнянь ОЛ без втрат у загальному випадку. Падаючі й відбиті хвилі напруги й струму.
11. Електромагнітні процеси в лінії при русі прямокутної хвилі.
12. Схема заміщення ОЛ для дослідження перехідних процесів.
13. Підключення ОЛ у режимі холостого ходу до джерела постійної напруги.
14. Перехідний процес при підключенні джерела постійної напруги до двох послідовно з'єднаних ліній при наявності реактивного елемента в місці стику.
15. Характеристика процесів у лінії при грозових розрядах (блукаючі хвилі).

## 7.2 Загальні положення

Ціль вивчення даного розділу полягає в тому, щоб навчитися правильно вибирати підхід при аналізі й розрахунку електричних величин, що характеризують процеси в конкретних електричних пристроях, а саме: застосовувати для цього схему заміщення із зосередженими або з розподіленими параметрами. Є ряд пристроїв високої й понад високої частоти, у яких доводиться зважати на нерівномірний розподіл струму уздовж провідників. При частоті 50 Гц із таким явищем доводиться рахуватися в лініях електропередачі даної в сотні й тисячі кілометрів, а в лініях електрозв'язку, що працюють при підвищених частотах, при довжині ліній обчислювальний десятками й навіть одиницями кілометрів. Лінії, довжина яких порівнянна з довжиною електромагнітних хвиль, називають довгими лініями.

Процеси в довгих лініях описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, рішення й аналіз яких представляє математично складне завдання, чим у ланцюгах із зосередженими параметрами.

У межах загального курсу ТОЕ розглядається рішення цього завдання для ряду окремих випадків. Їхнє вивчення дає достатню уяву як про методику розрахунку електричних величин, що характеризують процеси в довгих лініях, так і про фізичну сутність цих процесів.

## 7.3 Основні співвідношення

**1. Первинні параметри однорідної лінії.** Первинними параметрами ОЛ на одиницю її довжини  $\epsilon$ :  $R_0$  – активний опір, Ом;  $L_0$  – індуктивність, Гн;  $C_0$  – ємність, Ф;  $G_0$  – провідність, См. Формули для розрахунку первинних параметрів довгих ліній (повітряних, кабельних, коаксіальних) приводяться в підручниках, довідниках.

**2. Вторинні параметри однорідної лінії.** Хвильовий опір ОЛ визначається

$$\underline{z}_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}} = \frac{U_{\text{пад}}}{I_{\text{пад}}}.$$

Коефіцієнт поширення характеризує загасання падаючої (відображеної) хвилі й зміну її фази на одиницю довжини лінії

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0} = \alpha + j\beta,$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт загасання;

$\beta$  – коефіцієнт фази.

Коефіцієнт поширення визначає:

– довжину хвилі –  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ ;

– фазову швидкість –  $V_\phi = \frac{\omega}{\beta}$ .

**3. Диференціальні рівняння ОЛ.** Для миттєвих значень диференціальні рівняння ОЛ мають вигляд:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

При періодичному синусоїдальному режимі диференціальні рівняння ОЛ записуються

$$-\frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{I} \underline{z}_0, \quad -\frac{\partial \underline{I}}{\partial x} = \underline{U} \underline{y}_0.$$

**4. Рішення диференціальних рівнянь ОЛ при синусоїдальному режимі**

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x},$$



$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_b} \left( -\underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x} \right),$$

де  $\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_b}{2} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_b}{2} e^{-\gamma l}$ ;  $\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_b}{2} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_b}{2} e^{\gamma l}$  – постійні інтегрування, обумовлені через  $\underline{U}_1, \underline{I}_1$  або  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ .

Формули для визначення комплексів напруги й струми в будь-якій крапці лінії через комплекси напруги й струму:

- на початку лінії

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{I}_1 \underline{Z}_b \operatorname{sh} \gamma x ;$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_b} \operatorname{sh} \gamma x ;$$

- наприкінці лінії

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \underline{I}_2 \underline{Z}_b \operatorname{sh} \gamma y ,$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_b} \operatorname{sh} \gamma y .$$

**5. Погоджене навантаження.** Навантаження лінії  $\underline{z}_2 = \underline{z}_b$  називається погодженою; при ній відображена хвиля відсутня, тому що  $\underline{A}_1 = 0$ . При погодженому навантаженні комплекси напруги й струми в будь-якій крапці лінії визначаються

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{\gamma y}, \quad \underline{I} = \underline{I}_2 e^{\gamma y},$$

а ККД лінії дорівнює

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}.$$

**6. Лінія без перекручувань** – така, у якій коефіцієнт загасання й фазова швидкість не залежать від частоти.

У лінії без перекручувань повинна виконуватися умова

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

При цьому

$$z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \alpha = \sqrt{G_0 R_0}, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad V_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

**7. Лінія без втрат.** У лінії без втрат  $R_0 = G_0 = 0$ . Рівняння ОЛ без втрат:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 z_B \sin \beta y,$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_2}{z_B} \sin \beta y.$$

При цьому

$$z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad V_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

У режимах холостого ходу й короткого замикання вхідний опір лінії без втрат

$$z_{xx} = \frac{z_B}{j \operatorname{tg} \beta y}, \quad z_{кз} = j z_B \operatorname{tg} \beta y.$$

Розподіл діючих значень напруги й струму уздовж лінії без втрат при її навантаженні на число активний опір  $R_n$  визначається рівняннями

$$U(y) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y},$$

$$I(y) = \frac{I_2}{m} \sqrt{m^2 \cos^2 \beta y + \sin^2 \beta y},$$

де  $m = \frac{Z_B}{R_H}$ .

#### 7.4 Типові приклади. Розрахунок лінії з розподіленими параметрами

**1.** Двопровідна повітряна лінія виконана з алюмінієвих проводів. Діаметр проводів  $d = 8$  мм; відстань між їхніми осями  $a = 0,8$  м; довжина лінії  $l = 120$  км, кут у трикутнику провідностей поперечних елементів схеми заміщення лінії  $\varphi_y = 86^\circ$ .

Обчислити первинні ( $R_0, L_0, C_0, G_0, z_0, y_0$ ) і вторинні ( $z_B, \gamma, \alpha, \beta$ ) параметри лінії, а також фазову швидкість  $V_\phi$ , довжину хвилі  $\lambda$  і вхідний опір  $z_{вх}$  при роботі лінії на частоті  $f = 1,6$  кГц. Параметри навантаження:  $R_2 = 600$  Ом;  $X_2 = 500$  Ом.

#### Рішення

Первинні параметри лінії

$$R_0 = \frac{2l_0}{\gamma \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4}{34 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 10^{-6}} = 1,17 \frac{\text{Ом}}{\text{км}},$$

$$L_0 = \frac{\mu_0 l_0}{\pi} \ln \frac{2a}{d} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}{\pi} \ln \frac{0,8}{0,004} = 2,119 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Гн}}{\text{км}},$$

$$C_0 = \frac{\pi \varepsilon_0 l_0}{\ln \frac{2a}{d}} = \frac{\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3}{\ln \frac{0,8}{0,004}} = 5,253 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{км}},$$

$$G_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot C_0 \cdot f}{\text{tg}(\varphi)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5,253 \cdot 10^{-9} \cdot 1,6 \cdot 10^3}{\text{tg}86^\circ} = 3,693 \cdot 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}},$$

$$\underline{z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 1,17 + j2\pi \cdot 1600 \cdot 2,119 \cdot 10^{-3} = 1,17 + j21,306 \left(\frac{\text{Ом}}{\text{км}}\right).$$

$$\begin{aligned} \underline{y}_0 &= G_0 + j\omega C_0 = 3,693 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 1600 \cdot 5,253 \cdot 10^{-9} = \\ &= 3,603 \cdot 10^{-6} + j52,81 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{См}}{\text{км}}\right). \end{aligned}$$

Вторинні опори. Хвильовий опір.

$$\underline{z}_B = \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{y}_0}} = 634,836 + j4,743 (\text{Ом}).$$

Коефіцієнти поширення, загасання й фази.

$$\gamma = \sqrt{\underline{z}_0 \underline{y}_0} = 2,094 \cdot 10^{-3} + j0,034,$$

$$\alpha = 2,094 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Нп}}{\text{км}}, \quad \beta = 0,034 \frac{\text{рад}}{\text{км}}.$$

Фазова швидкість і довжина хвилі

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = 2,997 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 187,304 \text{ км}.$$

Вхідний опір лінії

$$\underline{z}_{\text{ВХ}} = \underline{z}_B \frac{\underline{z}_2 \text{ch}\gamma l + \underline{z}_B \text{sh}\gamma l}{\underline{z}_B \text{ch}\gamma l + \underline{z}_2 \text{sh}\gamma l},$$

де  $\underline{z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 600 + j500$ ;

$$\begin{aligned} \text{sh}\gamma l &= \frac{1}{2}(e^{j1} - e^{-j1}) = \frac{1}{2}(e^{\alpha l} e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}) = \\ &= -0,161 - j0,798; \end{aligned}$$

$$\text{ch}\gamma l = \frac{1}{2}(e^{j1} + e^{-j1}) = -0,654 - j0,196.$$

Підставивши значення  $\text{sh}\gamma l$ ;  $\text{ch}\gamma l$ ;  $\underline{z}_2$  і  $\underline{z}_B$  у формулу  $\underline{z}_{\text{BX}}$  одержимо

$$\underline{z}_{\text{BX}} = 916,461 - j206,812.$$

2. Для однієї лінії й навантаження з попереднього завдання обчислити напругу й струм на початку лінії, якщо напруга наприкінці лінії  $U_2 = 390$  В.

### Рішення

Для визначення зазначених величин обчислимо падаючі й відбиті хвилі напруги й струму на початку лінії.

Струм наприкінці лінії

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{z}_2} = \frac{390}{600 + j500} = 0,384 - j0,32 \text{ (A)}.$$

Падаюча хвиля напруги на початку лінії

$$\dot{U}_{\text{п}} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{z}_B) e^{\gamma l} = -358,85 - j233,65 \text{ (В)}$$

Відображена хвиля напруги на початку лінії

$$\dot{U}_o = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{z}_B) e^{-\gamma l} = -96,227 + j6,014 \text{ (В)}$$

Напруга на початку лінії

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{\text{п}} + \dot{U}_o = -455,077 - j239,665 \text{ (В)}$$

Падаюча й відображені хвилі струму на початку лінії

$$\dot{I}_{\text{п}} = \frac{\dot{U}_{\text{п}}}{\underline{z}_B} = 0,568 - j0,364 \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_o = \frac{\dot{U}_o}{Z_B} = -0,152 + j8,341 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$$

Струм на початку лінії

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_n - \dot{I}_o = -0,416 - j0,355 \text{ (A)}$$

Для перевірки можна переконатися в тім, що струм знайдений за законом Ома

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{BX}} = \frac{-455,077 - j239,665}{916,461 - j206,812} = -0,416 - j0,355 \text{ (A)},$$

має таку ж величину.

**3.** Лінія в завданні 1 працює на погоджене навантаження. Визначити напруги й струм на початку лінії, обчислити неї ККД

### Рішення

Струм у лінії

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{\dot{U}_2}{Z_B} = 0,614 - j4,589 \cdot 10^{-3} \text{ (A)}$$

При погодженому навантаженні напруга й струм на початку лінії визначаються по формулах

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l} = 390 e^{0,25128} \cdot e^{j14,4^\circ} = 501 e^{j14,4} = 185,28 + j124,5 \text{ (В)},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\alpha l} e^{j\beta l} = 0,614 e^{-j0,43} \cdot e^{0,25128} \cdot e^{j14,4} = 0,789 e^{j13,97} = 0,765 + j0,19 \text{ (A)}$$

Коефіцієнт корисної дії лінії

$$\eta = e^{-2\alpha l} = e^{-0,352} = 0,605 \quad \text{або} \quad \eta = 60,5\%.$$

### 7.5 Контрольне завдання 7

Двопровідна лінія виконана з алюмінієвих проводів. Діаметр проводів –  $d$ ; відстань між проводами –  $a$ ; довжина лінії –  $l$ ; частота змінного синусоїдального струму –  $f$ ; діюче значення напруги наприкінці лінії –  $U_2$ ; активний і реактивний опір навантаження –  $R_H$  і  $X_H$ . Значення цих величин вибираються з табл. 7.1 у наступному порядку. Необхідно пронумерувати перші 8 букв свого прізвища. Якщо букв менше восьми, то використовувати відсутні з ім'я. По 1<sup>й</sup> букві з відповідного стовпчика вибирається значення  $d$ , по 2<sup>й</sup> – значення  $a$ , по 3<sup>й</sup> –  $l$  і т.д.

У якості 8<sup>й</sup> задається величини, що, у табл. 7.1 зазначені значення  $\varphi_B$  – це кут у трикутнику провідностей поперечних елементів схеми заміщення лінії,  $\varphi_Y$  використовується для обчислення параметра  $G_0$ .

Таблиця 7.1

	А, Б, В, Г, Д, Е, Є	Ж, З, И, І, Ї, Й	К, Л, М, Н, О, П	Р, С, Т, У, Ф, Х	Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ю, Я
$d$ , мм	6	7	8	9	10
$a$ , м	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$l$ , км	100	110	120	130	140
$f$ , кГц	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$U_2$ , В	360	370	380	390	400
$R_H$ , Ом	500	550	600	650	700
$X_H$ , Ом	500	– 500	550	– 550	600
$\varphi_B$ , °	84	85	86	87	88

Для заданої лінії необхідно:

1. Обчислити первинні параметри:  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $C_0$ ,  $G_0$ , а також повний опір  $z_0$  і повну провідність  $y_0$  на 1 кілометр.

2. Обчислити вторинні параметри: коефіцієнт поширення  $\gamma$  і його складові коефіцієнти загасання  $\alpha$  і фази  $\beta$ ; хвильовий опір  $z_w$ , а також фазову швидкість  $V_\phi$  і довжину хвилі  $\lambda$ .

3. Обчислити комплекси падаючих  $\dot{U}_{п_1}$ ,  $\dot{I}_{п_1}$  і відображених  $\dot{U}_{о_1}$ ,  $\dot{I}_{о_1}$  хвиль напруги й струму на початку лінії. Визначити по них напругу  $\dot{U}_1$  й струм  $\dot{I}_1$  на початку лінії.

4. Обчислити вхідний опір лінії  $\underline{z}_{вх}$  і перевірити відповідність знайдених значень  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$  і  $\underline{z}_{вх}$  за законом Ома.

5. Замінивши заданий опір навантаження погодженим, розрахувати й побудувати графіки залежностей модулів напруги й струми від відстані до кінця лінії. Обчислити ККД лінії при погодженому навантаженні.



# 8

## ***НЕЛІНІЙНІ ЛАНЦЮГИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ***

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок нелінійних ланцюгів постійного струму***

***Контрольне завдання 8***

## 8 НЕЛІНІЙНІ ЛАНЦЮГИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 8.1 Робоча програма

1. Загальна характеристика нелінійних ланцюгів (НЛ) і нелінійних елементів (НЕ). Вольт-амперні характеристики (ВАХ) деяких НЕ.
2. Графічний розрахунок при різних способах з'єднання НЕ (послідовне, паралельне, змішане).
3. Застосування методу двох вузлів для розрахунку НЛ.
4. Метод еквівалентного генератора для розрахунку НЛ.
5. Статичний і диференціальний опори НЕ.
6. Заміни НЕ активними лінійними двухполюсниками.
7. Загальна характеристика аналітичних методів розрахунку НЛ. Апроксимація ВАХ.

### 8.2 Загальні положення

Особливість НЛ полягає в тому, що закони Кірхгофа й Ома для них справедливі, але скористатися ними для визначення невідомих струмів і напруг не можна, тому що до закінчення розрахунку невідомими залишаються й опори НЕ. У зв'язку із цим рішення системи рівнянь для НЛ може бути виконано тільки графічно або іншими приблизними методами.

Інформація про НЕ, необхідна для розрахунку НЛ, задається у вигляді ВАХ, тобто залежностей струму від напруги, представлених у вигляді таблиць або графіків.

Апроксимація ВАХ - це її наближений аналітичний опис. Апроксимувати ВАХ - це значить підібрати математичну функцію й постійні коефіцієнти, що втримуються в ній, так, щоб графік функції був максимально наближений до ВАХ реального НЕ. Заміна ВАХ апроксимуючою функцією при вдалому її виборі дозволяє розрахувати НЛ шляхом рішення рівняння Кірхгофа алгебраїчними методами.

Варто мати на увазі, що розрахунок НЛ постійного струму виконують головним чином графічними методами.

### 8.3 Основні співвідношення

#### **1. Вольт-амперні характеристики НЕ** – залежності $I(U)$ і $U(I)$ .

По характері ВАХ щодо осей координат їх розділяють на симетричні й несиметричні. У симетричних ВАХ  $U = f(I)$  має місце властивість  $f(I) = -f(-I)$ , а в несиметричних ВАХ  $f(I) \neq -f(-I)$ .

**2. Статичні й диференціальні опори НЕ.** ВАХ НЕ нелінійні, отже, опори їх змінюються при переході від однієї крапки до іншої вольт-амперної характеристики. Розрізняють: статичні опори НЕ (опір у певній крапці ВАХ)

$$R_{\text{стА}} = \frac{U_A}{I_A},$$

диференціальні опори (характеризують швидкість зміни напруги на НЕ при зміні струму)

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I}.$$

**3. Послідовне з'єднання елементів.** Якщо задані ВАХ послідовно з'єднаних НЕ, то для визначення струму в ланцюзі  $I$  при відомій вхідній напрузі  $U$  не можна скористатися законом Ома, тому що значення опорів елементів залежать від їхнього струму, а він невідомий. Для рішення завдання заміняють послідовне з'єднання двох НЕ одним нелінійним опором (НО) з еквівалентної ВАХ, для одержання якої необхідно скласти  $U_1$  і  $U_2$  при однакових струмах  $I$  (задаємося рядом значень якого).

**4. Паралельне з'єднання НЕ.** Якщо задані ВАХ двох НЕ, з'єднаних паралельно, то при заміні їх одним еквівалентним НО результуючу ВАХ одержуємо складанням  $I_1$  і  $I_2$  при однакових напругах (задаємося рядом значень  $U$  і по ВАХ паралельно з'єднаних НЕ знаходимо відповідні цій напрузі струми  $I_1$  і  $I_2$ ).

**5. Послідовно-паралельне з'єднання НЕ.** При змішаному з'єднанні НЕ еквівалентна ВАХ усього з'єднання перебуває поетапним спрощенням ланцюга з використанням ознак паралельного й послідовного з'єднання.

**6. Метод еквівалентного генератора для розрахунку НЛ.** Застосовується, коли в НЛ один нелінійний елемент. По цьому між НЕ виділяють, а все інше заміняють активним лінійним двухполюсником, що, у свою чергу, заміняють еквівалентним генератором з параметрами:  $E_э = U_{xx}$  (напруга  $xx$  активного двухполюсника);  $R_в = R_{вх}$  (вхідний опір пасивного двухполюсника).

У результаті розрахунок НЛ зводиться до розрахунку ланцюга з послідовним з'єднанням лінійного й нелінійного опорів.

**7. Метод двох вузлів для розрахунку НЛ.** Застосовується, коли всі гілки ланцюга включені між двома вузлами. Суть цього методу полягає в тім, що нелінійне алгебраїчне рівняння, складене згідно першого закону Кірхгофа, вирішується графічно. Для цього розраховують і будують ВАХ для кожної гілки, тобто знаходять залежності функції, що представляють собою

$$I_k = f(U_{ab}),$$

де  $I_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – струм відповідної гілки;

$U_{ab}$  – напруга між вузлами НЛ.

Розрахунок зазначених залежностей виробляється на підставі рівнянь, складених по другому закону Кірхгофа для контурів, що включають  $U_{ab}$  і відповідні гілки ( $k = 1, 2, \dots, n$ )...

У результаті одержують нелінійне алгебраїчне рівняння (по першому закону Кірхгофа), у яке входять функції одного аргументу. Це рівняння вирішують графічно, будуючи допоміжну функцію, що представляє ліву частину рівняння по першому закону Кірхгофа. Там, де ця функція перетинає вісь  $U_{ab}$ , буде виконуватися перший закон Кірхгофа, тобто буде справжнє рішення.

#### 8.4 Типові приклади. Розрахунок нелінійних ланцюгів постійного струму

**1.** Два НЕ, ВАХ яких представлені кривими 1 і 2 на рис. 8.1 з'єднані послідовно й підключені до джерела з напругою  $U = 110$  В. Визначити струм і напругу кожного НЕ.

##### Рішення

При послідовному з'єднанні струм в обох НЕ той самий. Задаючись декількома значеннями струму, наприклад 1, 2, 4, 6, 8 і 9 А, визначаємо по ВАХ на рис. 8.1 напруги на  $1^{mv}$  і  $2^{mv}$  НЕ для всіх значень струму, складаємо відповідні відрізки по осі напруг і по отриманих крапках будуємо загальну ВАХ для послідовного з'єднання  $1^{to}$  й  $2^{to}$  НЕ. Із загальної ВАХ визначаємо струм при  $U = 110$  В. З ВАХ НЕ<sub>1</sub> і НЕ<sub>2</sub> для отриманого струму визначаємо  $U_1$  і  $U_2$ .

$$\text{Відповіді: } I = 8,3 \text{ А; } U_1 = 44 \text{ В; } U_2 = 66 \text{ В.}$$

**2.** Два НЕ, ВАХ яких задані кривими 3 і 4 на рис. 8.1, з'єднані паралельно й підключені до джерела з напругою  $U = 80$  В. Визначити струм кожного НЕ й загальний струм.

##### Рішення

У цьому випадку немає необхідності будувати загальну ВАХ. По заданій напрузі з ВАХ<sub>3</sub> визначаємо  $I_3 = 7,2$  А, з ВАХ<sub>4</sub> –  $I_4 = 3,85$  А, загальний струм  $I = I_3 + I_4 = 11,05$  А.

**3.** При якій напрузі загальний струм у попереднім завданні прийме значення  $I = 7,3$  А? Якими будуть струми  $I_3$  і  $I_4$ ?

##### Вказівка

У цьому випадку потрібно будувати сумарну ВАХ для паралельного з'єднання, складаючи ВАХ<sub>3</sub> і ВАХ<sub>4</sub> по осі струмів. Із загальної ВАХ визначається  $U$  при  $I = 7,3$  А. По знайденому  $U$  з ВАХ<sub>3</sub> і ВАХ<sub>4</sub> визначаємо  $I_3$  і  $I_4$ .

Відповіді:  $U = 50 \text{ В}$ ;  $I_3 = 6 \text{ А}$ ;  $I_4 = 1,3 \text{ А}$ .

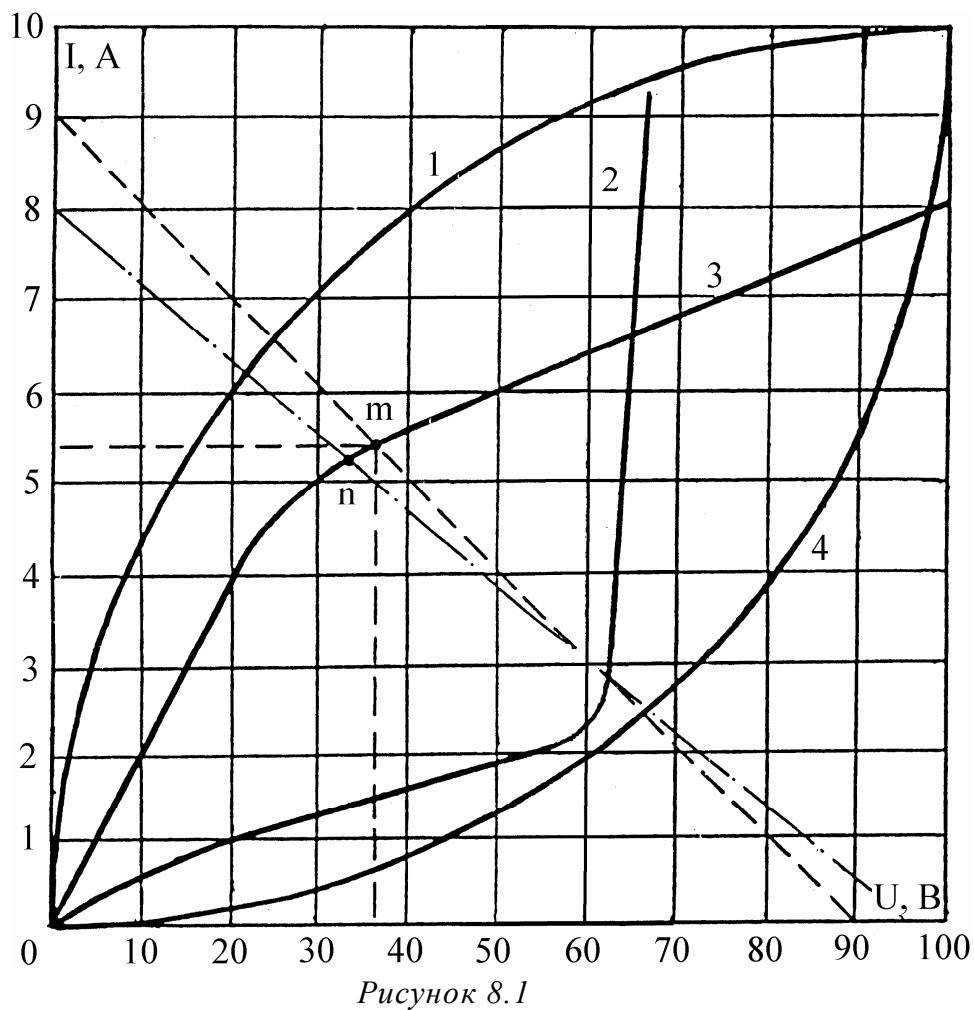


Рисунок 8.1

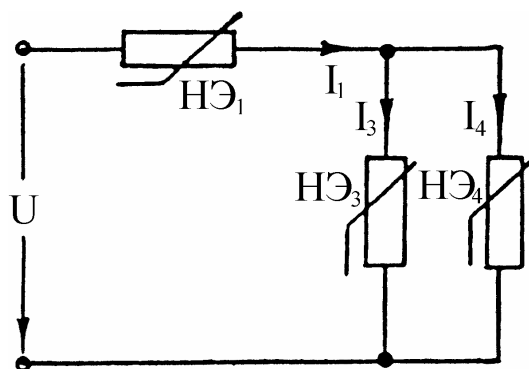


Рисунок 8.2

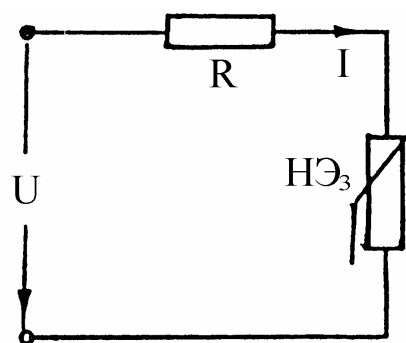


Рисунок 8.3

4. До входних затискачів ланцюга на рис. 8.2 прикладена напруга  $U = 100 \text{ В}$ . визначити напругу й струм кожного НЕ.

### Вказівка

Спочатку необхідно побудувати ВАХ розгалуженої ділянки шляхом додавання ВАХ<sub>3</sub> і ВАХ<sub>4</sub> по осі струмів. Це рівносильно заміні НЕ<sub>3</sub> на НЕ<sub>4</sub> одним еквівалентним НЕ. Еквівалентний НЕ з'єднаний послідовно з НЕ<sub>1</sub>. далі будується загальна ВАХ шляхом додавання по осі напруг ВАХ НЕ<sub>1</sub> і ВАХ еквівалентного НЕ.

По заданій напрузі  $U = 100$  В визначається струм  $I_1$  і напруга  $U_1$  НЕ<sub>1</sub>, а також напруга  $U_3 = U_4$  розгалужені ділянки. Далі за знайденим значенням  $U_3$  і  $U_4$  з ВАХ НЕ<sub>3</sub> і НЕ<sub>4</sub>. Визначається  $I_3$  і  $I_4$ .

$$\text{Відповіді: } I_1 = 8,1 \text{ А; } U_1 = 42 \text{ В;}$$

$$I_3 = 6,3 \text{ А; } I_4 = 1,8 \text{ А; } U_3 = U_4 = 58 \text{ В.}$$

**5.** До ланцюга з послідовного з'єднання лінійного опору  $R = 10$  Ом і НЕ<sub>3</sub> (рис. 8.3) прикладена напруга  $U = 90$  В. Визначити струм у ланцюзі, а також, напруги на лінійному й нелінійному опорах.

### Рішення

По другому закону Кірхгофа для ланцюга на рис. 8.3  $RI + U_3 = U$   
або

$$U - RI = U_3. \quad (8.1)$$

Ліва частина останнього вираження як функція струму  $I$ , є рівняння прямої. Для побудови прямої знайдемо дві крапки, що належать їй. Перша крапка –  $I = 0$ ;  $U - RI = U = U_{xx} = 90$  В. Друга крапка – таке значення  $I$ , при якому  $U - RI = 0$ . Це буде струм  $I_k$  при закороченому НЕ<sub>3</sub>.

$$I_k = \frac{U}{R} = \frac{90}{10} = 9 \text{ А.}$$

Рішення (8.1) є крапка перетинання прямої, проведеної через крапки  $U_{xx} = 90$  В та  $I_k = 9$  А з ВАХ НЕ<sub>3</sub>. Пряма проведена переривчастою лінією на рис. 8.1. Крапка  $m$  перетинання цієї лінії з ВАХ НЕ<sub>3</sub> дозволяє визначити:  $I = 5,4$  А;  $U_3 = 36$  В. Напруга на лінійному опорі

$U_R = RI = 10 \cdot 5,4 = 54$  В. Таке ж значення можна одержати, як  $U_R = U - U_3 = 90 - 36 = 54$  В.

**6.** Визначити струми в гілках ланцюга на рис. 8.4, де  $U = 288$  В;  $R = 9$  Ом; ВАХ НЕ<sub>3</sub> на рис. 8.1.

### Рішення

Для визначення струму в НЕ<sub>3</sub> застосуємо метод еквівалентного генератора. Відключаємо гілку із НЕ<sub>3</sub> і визначаємо напругу холостого ходу між крапками г і б.

$$U_{xx} - I_{25}2R + I_{14}R = 0,$$

$$U_{xx} = R(2I_{25} - I_{14}),$$

$$I_{25} = I_{14} = \frac{U}{3R},$$

$$U_{xx} = \frac{U}{3} = \frac{288}{3} = 96 \text{ В.}$$

Вхідний опір ланцюга щодо тих же крапок з урахуванням того, що крапка а й у закорочені джерелом напруги

$$R_{вх} = 2 \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12 \text{ Ом.}$$

Тепер весь ланцюг, крім НЕ<sub>3</sub>, може розглядатися як еквівалентний генератор, що живить НЕ<sub>3</sub>, а струм  $I_3$  визначається, як у ланцюзі на рис. 8.3 задача 5.

Для побудови прямої  $U_{xx} - R_{вх} I_3$  використовуємо крапки:

$$1) I_3 = 0, \quad U = U_{xx} = 96 \text{ В,}$$

$$2) U = 0, \quad I_3 = I_k = \frac{U_{xx}}{R_{вх}} = \frac{96}{12} = 8 \text{ А.}$$



Ця пряма проведена на рис. 8.1 штрихпунктирною лінією. Крива  $n$  дозволяє визначити:

$$I_3 = 5,25 \text{ А}, \quad U_3 = U_{26} = 33 \text{ В}.$$

Струми інших гілок визначаємо, як у лінійному ланцюзі, де струм і напруга 3<sup>ї</sup> гілки вже відомі. У зв'язку із симетрією очевидно:  $I_1 = I_5$  і  $I_2 = I_4$ .

По другому законі Кірхгофа для контуру б-в-а  $I_1R + U_3 + I_5R = U$  або  $I_12R = U - U_3$ , звідки

$$I_1 = I_5 = \frac{U - U_3}{2R} = \frac{288 - 33}{2 \cdot 9} = 14,17 \text{ А}.$$

Для контуру г-в-а  $I_22R - U_3 + I_42R = U$ , звідки

$$I_2 = I_4 = \frac{U + U_3}{4R} = \frac{288 + 33}{4 \cdot 9} = 8,92 \text{ А}.$$

Струм, споживаний від джерела

$$I = I_1 + I_2 = 14,17 + 8,92 = 23,09 \text{ А}.$$

**7.** У ланцюзі на рис. 8.5  $E_1 = 40 \text{ В}$ ;  $E_2 = 60 \text{ В}$ ;  $E_3 = 120 \text{ В}$ ; вольт-амперні характеристики – на рис. 8.1. Визначити струми в гілках.

### Рішення

Застосуємо метод двох вузлів. Для цього побудуємо залежності струмів  $I_1$ ,  $I_2$  і  $I_3$  від вузлової напруги  $U_0$ , використовуючи рівняння

$$U_0 = -E_1 + U_1, \quad (8.2)$$

$$U_0 = E_2 - U_2, \quad (8.3)$$

$$U_0 = E_3 - U_3. \quad (8.4)$$

У цих рівняннях  $U_1$ ,  $U_2$  і  $U_3$  – напруга на  $HE_1$ ,  $HE_2$  і  $HE_3$  відповідно.

Задаючись рядом значень  $I_1$  з ВАХ НЕ1 визначаємо  $U_1$  і обчислюємо  $U_0$  за допомогою рівняння (8.2). Результати зводимо в табл. 8.1.

За даними табл. 8.1 будуємо графіки  $I_1(U_0)$ ;  $I_2(U_0)$  і  $I_3(U_0)$  (рис. 8.6). Далі використовуємо рівняння першого закону Кірхгофа  $I_2 + I_3 = I_1$ , відповідно до якого складаємо залежності  $I_2(U_0)$  і  $I_3(U_0)$  шляхом підсумовування ординат цих кривих. Крапка А перетинання сумарної кривої  $I_1(U_0)$  визначає величину вузлової напруги  $U_0 = 27,5$  В, при якому задовольняється рівняння 1го закону Кірхгофа. По знайденому  $U_0$  визначаємо з відповідних графіків струми.

Таблиця 8.1

$I_1$	$U_1$	$U_0$	$I_2$	$U_2$	$U_0$	$I_3$	$U_3$	$U_0$
0	0	-40	0	0	60	0	0	120
3	5	-35	1	22	38	2	11	109
5	13	-27	1,5	40	20	4	22	98
8	40	0	2	56	4	5	29	91
9	57	17	3	63	-3	6	51	69
9,5	68	28	5	64	-4	7	75	48
10	100	60	8	66	-6	8	99	21

$$I_1 = 9,1 \text{ A}, \quad I_2 = 1,4 \text{ A}, \quad I_3 = 7,7 \text{ A}.$$

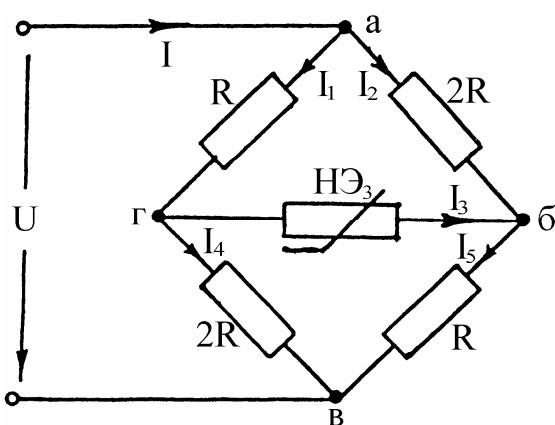


Рисунок 8.4

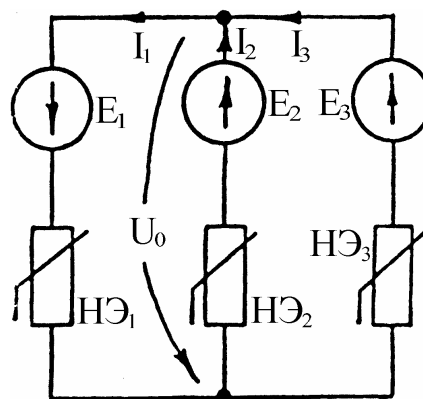


Рисунок 8.5

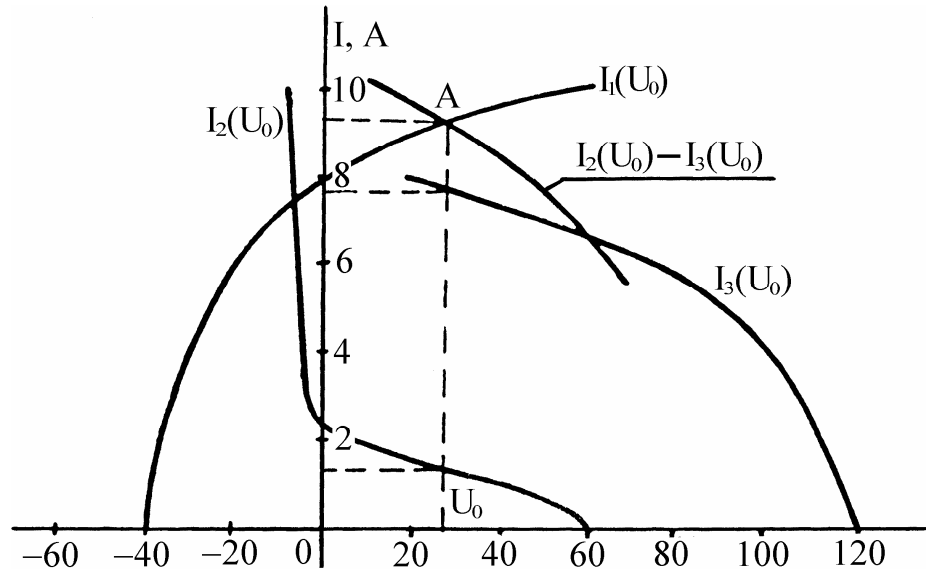


Рисунок 8.6

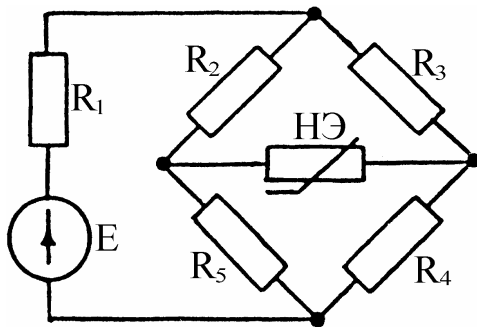


Рисунок 8.7

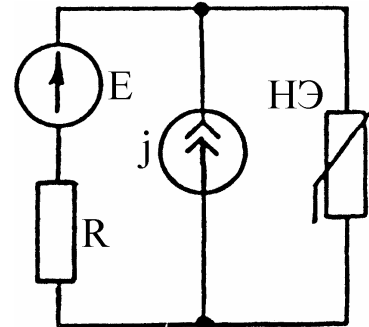


Рисунок 8.8

### 8.5 Контрольне завдання 8

1. Вольт-амперна характеристика HE в ланцюзі на рис. 8.7 задани вираженням  $I = aU^n$ . Коефіцієнти  $a$ ,  $n$ ,  $E$  і  $R$  і опору лінійних резисторів для різних варіантів взяти з табл. 8.2.

Визначити напругу й струм HE.

2. У ланцюзі на рис. 8.8 задані  $E$ ,  $j$ ,  $R$  і номер HE, ВАХ яких наведені на рис. 8.1 (див. табл. 8.3).

Визначити струми в гілках.

Таблица 8.2

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ бу- кви
E(B)	600	570	540	510	480	450	1
R <sub>1</sub> (Ом)	21	19,5	18	16,5	15	13,5	2
R <sub>2</sub> (Ом)	14	13	12	11	10	9	3
R <sub>3</sub> (Ом)	28	26	24	22	20	18	4
R <sub>4</sub> (Ом)	14	13	12	11	10	9	5
a(См)	1	0,464	10-2	10-4	1	0.464	6
n	1	1/2	2/3	3/2	5/2	1/2	7

Таблица 8.3

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ бу- кви
E(B)	45	50	55	60	65	70	1
I (A)	5	5	5	4	4	4	2
R(Ом)	10	10	11	11	12	12	3
№ ВАХ	1	2	3	4	3	2	4

# 9

## ***МАГНІТНІ ЛАНЦЮГИ З ПОСТІЙНИМИ В ЧАСІ МАГНІТНИМИ ПОТОКАМИ***

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок магнітних ланцюгів  
постійного струму***

***Контрольне завдання 9***

## **9. Магнітні ланцюги з постійними в часі магнітними потоками**

### **9.1 Робоча програма**

1. Основні величини й співвідношення, які характеризують магнітне поле.
2. Діамагнітні, парамагнітні й феромагнітні матеріали.
3. Основні характеристики феромагнітних матеріалів. Магнітом`які й магнітотверді матеріали.
4. Закон постійного струму.
5. Магнітні ланцюги. Визначення. Приклади.
6. Закони Кірхгофа й Ома для магнітних ланцюгів.
7. Розрахунок нерозгалужених магнітних ланцюгів. Пряме й зворотне завдання.
8. Розрахунок розгалужених магнітних ланцюгів.

### **9.2 Загальні положення**

При розрахунку магнітних ланцюгів (МЛ) використовують наступні величини, що характеризують магнітне поле: магнітна індукція  $B$ , напруженість магнітного поля  $H$ , магнітний потік  $\Phi$ , а також величини, що характеризують самі ланцюги: магніторушійна сила (МРС) аналог ЕРС в електричному колі, магнітна напруга  $U_m$ , магнітний опір  $R_m$  або провідність  $g_m$ .

Перш ніж освоювати методику розрахунку МЛ, необхідно вивчити властивості феромагнітних матеріалів і усвідомити, що магнітні ланцюги є нелінійними й у методиці їхнього розрахунку багато загального з розрахунком нелінійних ланцюгів постійного струму. Визначення магнітних потоків виконується графічними методами або ж методом послідовних наближень. При графічному розрахунку будують вебер-амперні характеристики, тобто залежності  $\Phi(U_m)$ .

### 9.3 Основні співвідношення

**1. Основними векторними величинами**, що характеризують магнітне поле, є: магнітна індукція  $\vec{B}$  – це векторна величина, обумовлена по силовому впливі магнітного поля на струм; намагніченість  $\vec{j}$  – магнітний момент одиниці об'єму речовини; напруженість магнітного поля  $\vec{H}$ .

Три величини –  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{H}$  – зв'язані наступною залежністю

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{j}) = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu_a\vec{H} = \mu_a\vec{H},$$

де  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  – постійна, що характеризує магнітні властивості

вакууму;

$\mu_a$  – абсолютна магнітна проникність.

**2. Магнітний потік**  $\Phi$  через деяку поверхню  $S$  – це потік вектора магнітної індукції через цю поверхню:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s}.$$

**3. Магніторухійна сила**  $F$ , що виражається через електричний струм  $I$  у проводах, обмотках і т.д., який створює магнітне поле:

$$F = IW,$$

де  $W$  – число витків котушки.

Позитивний напрямок МРС збігається з рухом вістря правого гвинта, якщо його обертати по напрямку струму в обмотці.

**4. Закон повного струму.** Кількісний зв'язок між лінійним інтегралом від вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  уздовж будь-якого довільного контуру й алгебраїчною сумою струмів  $\sum I$ , охопленим цих контуром, визначається законом повного струму

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

**5. Падіння магнітної напруги.** Падінням магнітної напруги між крапками а й у магнітному ланцюзі називають лінійний інтеграл від напруженості магнітного поля між цими крапками:

$$U_{\text{МаВ}} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}.$$

При постійній  $\vec{H}$  на ділянці й, якщо  $\vec{H}$  й  $d\vec{l}$  збігаються по напрямку, то

$$U_{\text{МаВ}} = H \cdot l_{\text{ав}}.$$

**6. Одиниці магнітних величин у системі СИ:** магнітний потік – вебер (1 Вб = 1 В·с); магнітна індукція – тесла (1 Тл = 1  $\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$ ); намагніченість і напруженість магнітного поля – амперів на метр (1  $\frac{\text{А}}{\text{м}}$ ), магнітна напруга – амперів (1 А).

**7. Вебер-Амперні характеристики.** Під вебер-амперною характеристикою (ВбАХ) розуміють залежність потоку  $\Phi$  по якій-небудь ділянці магнітного ланцюга від падіння магнітної напруги на цій ділянці:

$$\Phi = f(U_M).$$

ВбАХ не задається, вона розраховується.



**8 Закони Кірхгофа для магнітних ланцюгів.** Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума магнітних потоків у будь-якому вузлі магнітного ланцюга дорівнює нулю:

$$\sum_1^n \Phi_k = 0.$$

Другий закон Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь магнітної напруги уздовж будь-якого замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі МРС уздовж того ж контуру:

$$\sum_1^n U_{M_k} = \sum_1^n (IW)_k.$$

Другий закон Кірхгофа для магнітних ланцюгів є інша форма запису закону повного струму. Визначення знака при складанні алгебраїчних сум аналогічно в електричних колах.

**9. Метод послідовних наближень.** Суть цього методу розрахунку магнітних ланцюгів полягає в ітераційному методі рішення нелінійних алгебраїчних рівнянь, складених згідно законів Кірхгофа для магнітного ланцюга, що розраховується. При цьому задаються рядом значень магнітним потоком (магнітною індукцією) у якій-небудь гілці магнітного ланцюга визначають інші величини за умови, щоб рівняння згідно законів Кірхгофа виконувалися.

**10. Метод двох вузлів для розрахунку магнітних ланцюгів.** Суть цього методу полягає в тім, нелінійне алгебраїчне рівняння, складене згідно першого закону Кірхгофа, вирішується графічно. Для чого розраховують і будують Вбах для кожної гілки, тобто знаходять залежності

$$\Phi_k = f(U_{M_{ав}}),$$

де  $\Phi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) – магнітний потік відповідної гілки;

$U_{\text{Мав}}$  – магнітна напруга між вузлами МЛ.

Розрахунок зазначених залежностей здійснюється на підставі рівнянь, складених по другому закону Кірхгофа для контурів, що включають  $U_{\text{Мав}}$  і відповідають гілці ( $k = 1, \dots, n$ ).

У результаті одержують нелінійне алгебраїчне рівняння (по першому закону Кірхгофа), у яке входять функції одного аргументу ( $U_{\text{Мав}}$ ). Це рівняння вирішують графічно, будуючи допоміжну функцію, що представляє першу частину рівняння по першому закону Кірхгофа. Там, де ця функція перетинає вісь  $U_{\text{Мав}}$ , буде виконуватися перший закон Кірхгофа, тобто буде справжнє рішення.

**11. Закон Ома для магнітного ланцюга.** Закон Ома для магнітного ланцюга використовують для розрахунку магнітного ланцюга (або його ділянки), якщо вона не насичена, тобто при  $\mu_a = \text{Const}$

$$U_M = \Phi \frac{l}{\mu_a s} = \Phi R_M,$$

де  $R_M$  – магнітний опір ділянки довжиною  $l$  і перетином  $s$ .

#### ***9.4 Типові приклади. Розрахунок магнітних ланцюгів постійного струму***

**1.** Визначити магніторушійну силу  $F = IW$ , необхідну для створення в повітряному зазорі магнітного ланцюга на рис. 9.2 магнітного поля з індукцією  $B_0 = 0,8$  Тл. Довжини й перетини ділянок:  $l_1 = 480$  мм;  $l_2 = 110$  мм;  $\delta = 0,5$  мм;  $S_1 = 25$  см<sup>2</sup>;  $S_2 = S_0 = 30$  см<sup>2</sup>. крива намагнічування матеріалу, з якого виготовлений сердечник, наведена на рис. 9.1. У скільки разів потрібно збільшити  $F$  для збільшення  $B_0$  в 1,5 рази?

## Рішення

По 2<sup>м</sup> закону Кірхгофа для заданого магнітного ланцюга

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \delta = IW. \quad (9.1)$$

Магнітний потік у зазорі й у двох інших ділянках (потік розсіювання не враховуємо)

$$\Phi = B_0 \cdot S_0 = 0,8 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Магнітна індукція в 1<sup>й</sup> і 2<sup>й</sup> ділянках

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 0,96 \text{ Тл}, \quad B_2 = B_0 = 0,8 \text{ Тл.}$$

Напряга магнітного поля в 1<sup>й</sup> і 2<sup>й</sup> ділянках із кривої намагнічування

$$H_1 = 188 \frac{\text{А}}{\text{м}}, \quad H_2 = 135 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Напруженість у повітряному зазорі

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{0,8}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 636620 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Підставляємо знайдені значення  $H$  і задані значення  $l$  в (9.1) і обчислюємо МРС. обмотки

$$IW = 188 \cdot 0,48 + 135 \cdot 0,11 + 636620 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 423,4 \text{ А.}$$

Для

$$B_0 = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2 \text{ Тл}, \quad \Phi = 1,2 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вб,}$$

$$B_1 = \frac{3,6 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1,44 \text{ Тл}, \quad B_2 = B_0 = 1,2 \text{ Тл},$$

$$H_1 = 1400 \frac{\text{А}}{\text{м}}, \quad H_2 = 470 \frac{\text{А}}{\text{м}}, \quad H_0 = \frac{1,2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 954930 \frac{\text{А}}{\text{м}},$$

$$IW = 1400 \cdot 0,48 + 470 \cdot 0,11 + 954930 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 1201 \text{ А}.$$

Вивід: для збільшення індукції в 1,5 рази МРС. необхідно збільшити в  $\frac{1201}{423,4} = 2,84$  рази.

**2.** Для магнітного ланцюга на рис. 9.3 задані:  $l_1 = l_3 = 100 \text{ мм}$ ;  $l_2 = l_4 = 200 \text{ мм}$ ;  $S_1 = S_3 = 25 \text{ см}^2$ ;  $S_2 = S_4 = 20 \text{ см}^2$ ;  $F_1 = I_1 W_1 = 600 \text{ А}$ ;  $F_2 = I_2 W_2 = 500 \text{ А}$ ;  $F_3 = I_3 W_3 = 700 \text{ А}$ .

Крива намагнічування на рис. 9.1.

Визначити магнітний потік і індукцію у всіх ділянках.

### Рішення

Визначаємо й указуємо на схемі напрямки МРС.  $F_1, F_2, F_3$ . Становимо рівняння по 2<sup>му</sup> закону Кірхгофа

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = F,$$

$$\text{де } F = I_1 W_1 - I_2 W_2 + I_3 W_3 = 800 \text{ А}.$$

Дана задача є зворотною. Для її рішення варто задаватися рядом значень потоку або магнітної індукції, визначати із кривої намагнічування  $H_1, H_2, H_3, H_4$  і обчислювати  $F$ . За результатами обчислень потрібно побудувати графік залежності  $\Phi(F)$ , тобто вебер-амперну характеристику, а потім із цієї характеристики для  $F = 800$  визначити  $\Phi$ .

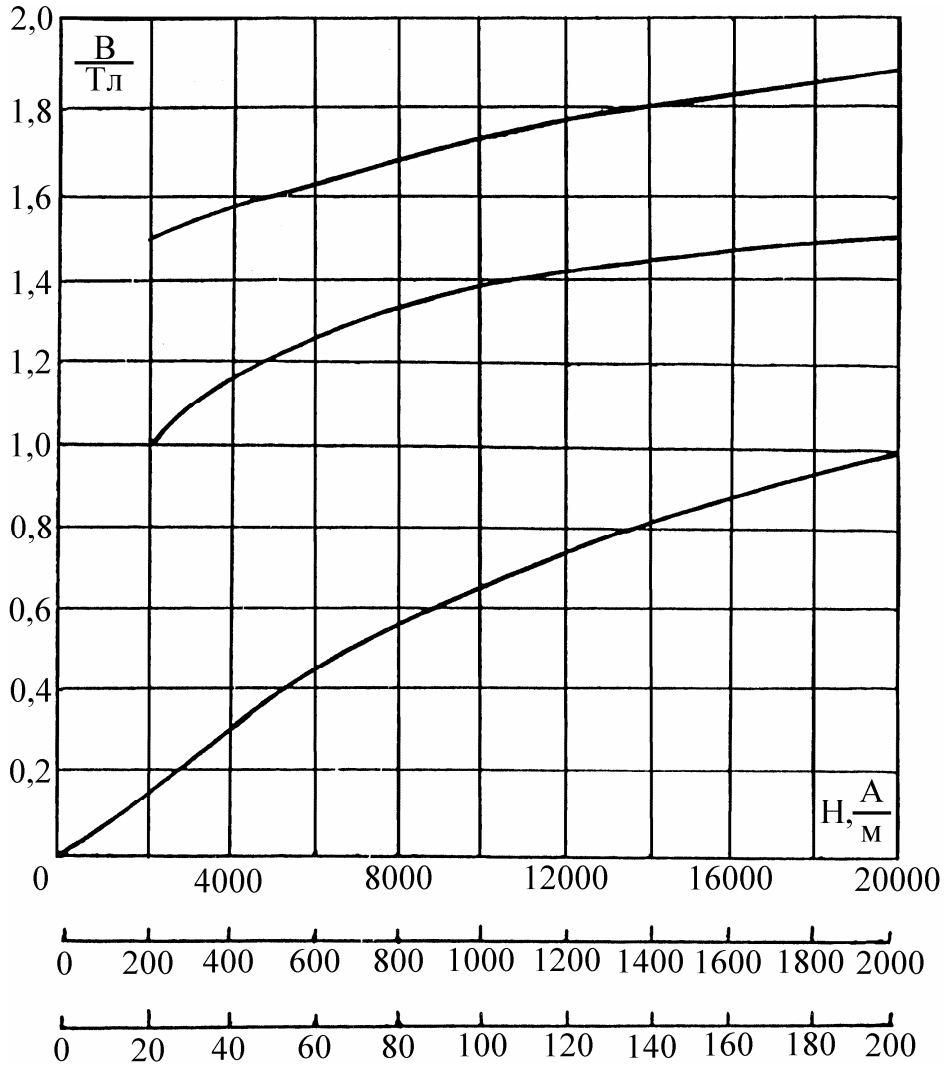


Рисунок 9.1

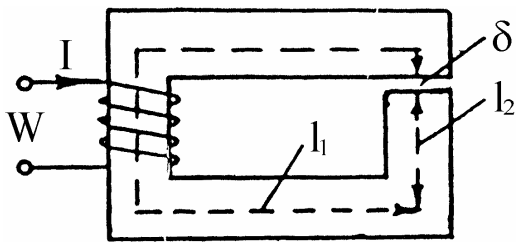


Рисунок 9.2

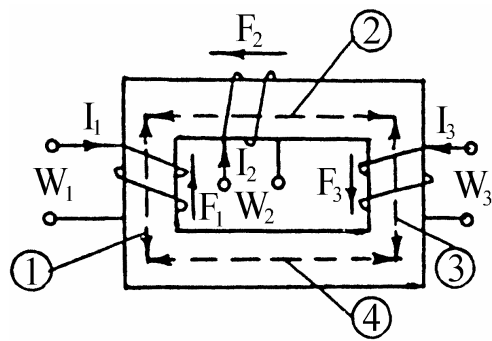


Рисунок 9.3

Значення, що задаються,  $\Phi$  та відповідні їм значення  $B$ ,  $H$  і  $F$  зведені в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

$\Phi$ , Вб $\times 10^{-3}$	0	0,8	1,6	2,0	2,4	2,8	3,0
$B_1 = B_3$ , Тл	0	0,32	0,64	0,8	0,96	1,12	1,2
$B_2 = B_4$ , Тл	0	0,4	0,8	1,0	1,2	1,4	1,5
$H_1 = H_3$ , $\frac{A}{m}$	0	44	95	135	190	350	480
$H_2 = H_4$ , $\frac{A}{m}$	0	53	135	200	480	1070	2000
$F$ , А	0	30	73	107	190	498	896

Графіки  $\Phi(F)$ , побудовані за даними табл. 9.1 зображені на рис. 9.4. Із цього графіка для  $F = I_1 W_1 - I_2 W_2 + I_3 W_3 = 800$  А визначаємо магнітний потік  $\Phi \approx 2,95 \cdot 10^{-3}$  Вб, який має одну величину у всіх ділянках магнітного ланцюга. Магнітна індукція однакова в ділянках з однаковим перетином.

$$B_1 = B_3 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{2,95 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1,18 \text{ Тл},$$

$$B_2 = B_4 = \frac{\Phi}{S_4} = \frac{2,95 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1,475 \text{ Тл}.$$

**3.** Магнітопровід на рис. 9.5 має розміри:  $l_1 = l_3 = 0,4$  м;  $l_2 = 0,2$  м;  $S_1 = S_3 = 15 \text{ см}^2$ ;  $S_2 = 20 \text{ см}^2$ . Число витків  $W_1 = W_2 = W_3 = 200$ ; струми  $I_1 = 2$  А;  $I_2 = 0$ ;  $I_3 = 3$  А. Крива намагнічування на рис. 9.1.

Визначити магнітні потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

## Рішення

Застосовуємо метод двох вузлів. Розмічаємо магнітні потоки, тобто вказуємо на схемі їхній напрямок і позначення. Приймаємо напрямок вузлової напруги  $U_{\text{маб}}$  від вузла «а» до вузла «б» (на рис. 9.5 не показано). Рівняння за законами Кіргофа.

$$\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2, \quad (9.2)$$

$$H_1 l_1 + U_{\text{маб}} = I_1 W_1 = 400, \quad (9.3)$$

$$H_2 l_2 - U_{\text{маб}} = 0, \quad (9.4)$$

$$H_3 l_3 + U_{\text{маб}} = I_3 W_3 = 600. \quad (9.5)$$

Виразимо  $U_{\text{маб}}$  із цих рівнянь

$$U_{\text{маб}} = 400 - H_1 l_1, \quad (9.6)$$

$$U_{\text{маб}} = H_2 l_2, \quad (9.7)$$

$$U_{\text{маб}} = 600 - H_3 l_3. \quad (9.8)$$

Останні три рівняння дозволяють побудувати залежності  $\Phi_1(U_{\text{маб}})$ ,  $\Phi_2(U_{\text{маб}})$ ,  $\Phi_3(U_{\text{маб}})$ .

Задамося рядом значень потоків  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  і знайдемо індукцію у всіх ділянках:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}, \quad B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3},$$

а потім по кривій намагнічування визначимо напруженості магнітного поля. Після цього обчислюємо за допомогою рівнянь 5, 6 і 7 магнітні напруги. Результати обчислень представлені в табл. 9.2.

За даними таблиці будуємо графіки залежності  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  і  $\Phi_3$  від  $U_{\text{маб}}$  (рис. 9.6). Значення потоків повинні задовільняти рівнянню (9.2), тому будуємо допоміжну криву  $[\Phi_1 + \Phi_3](U_{\text{маб}})$  шляхом підсумовування ор-

динат кривих  $\Phi_1(U_{\text{маб}})$  і  $\Phi_3(U_{\text{маб}})$  при тих самих значеннях  $U_{\text{маб}}$ . Абсциса крапки перетинання сумарної кривої із кривою  $\Phi_2(U_{\text{маб}})$  (крапки п на рис. 9.6) визначає дійсне значення магнітної напруги

$$U_{\text{маб}} \cong 340 \text{ А.}$$

Таблиця 9.2

$\Phi_1 = \Phi_3 \text{ Вб} \cdot 10^{-3}$	$B_1 = B_3 \text{ Тл}$	$H_1 = H_3 \text{ А / м}$	$I_1 W_1 - H_1 l_1$	$I_3 W_3 - H_3 l_3$	$\Phi_2 \text{ Вб} \cdot 10^{-3}$	$B_2 \text{ Тл}$	$H_2 \text{ А / м}$	$H_2 l_2 \text{ А}$
0	0	0	400	600	0	0	0	0
0,6	0,4	53	379	579	0,8	0,6	53	10,6
1,2	0,8	135	344	544	1,6	1,2	135	27
1,5	1,0	200	320	520	2	1,5	200	40
1,65	1,1	320	272	472	2,2	1,65	320	64
1,8	1,2	475	210	410	2,4	1,8	475	95
1,95	1,3	700	120	320	2,6	1,95	700	140
2,1	1,4	1060	- 24	176	2,8	2,1	1060	212
2,25	1,5	2000	- 400	- 200	3	2,25	2000	400

Ордината кривих  $\Phi_1(U_{\text{маб}})$ ,  $\Phi_2(U_{\text{маб}})$  і  $\Phi_3(U_{\text{маб}})$  при  $U_{\text{маб}} = 340 \text{ А}$  визначає потоки

$$\Phi_1 \cong 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}, \quad \Phi_2 \cong 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}, \quad \Phi_3 \cong 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Знайдені значення задовільняють рівнянню (9.2).



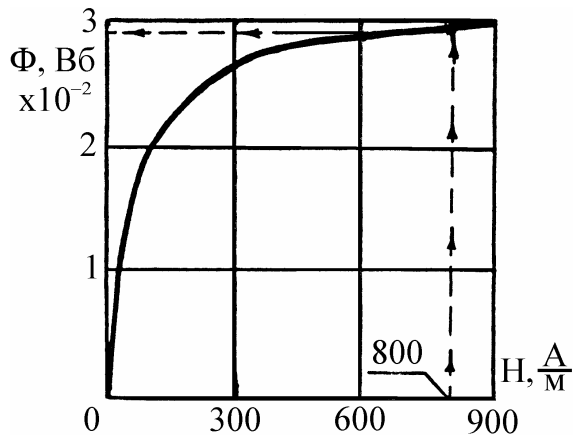


Рисунок 9.4

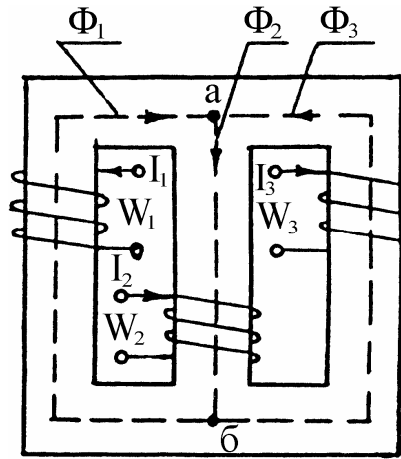


Рисунок 9.5

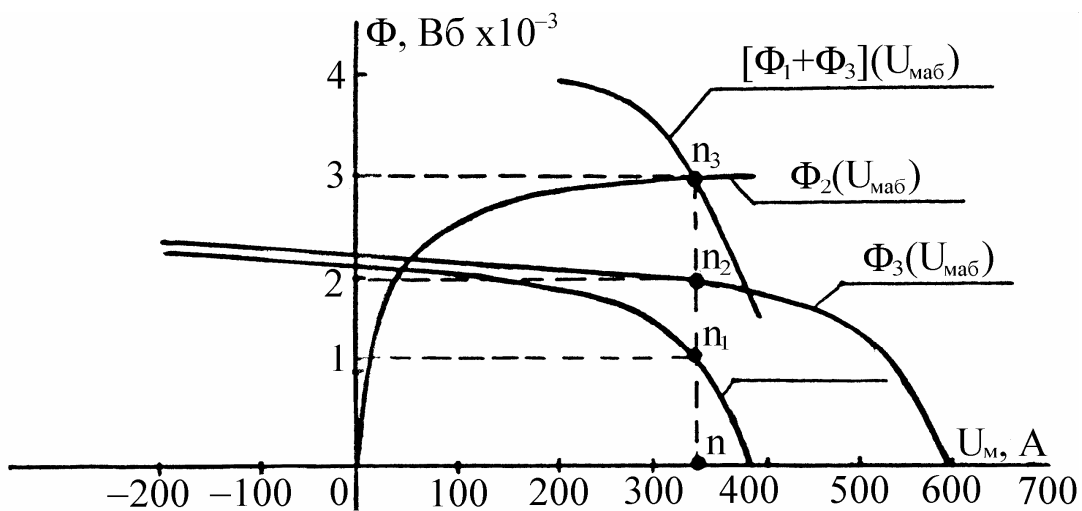


Рисунок 9.6

### 9.5 Контрольне завдання 9

1. Визначити магнітний потік і індукцію в ділянках магнітного ланцюга на рис. 9.3. Числа витків  $W_1 = W_2 = W_3 = 100$ . Крива намагнічування на рис. 9.1. Інші дані наведені в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ь, Ю, Я	№ букви
$I_1$ (А)	6	-5	8	6	-6	-8	1
$I_2$ (А)	-5	-6	-8	6	5	4	2
$I_3$ (А)	4	6	8	3	4	5	3
$l_1 = l_3$ (мм)	100	110	120	130	140	150	4
$l_2 = l_4$ (мм)	160	170	180	190	200	210	5
$S_1 = S_3$ (см <sup>2</sup> )	12	13	14	15	16	17	6
$S_2 = S_4$ (см <sup>2</sup> )	15	16	17	18	19	20	7
$l_{20}$ (мм)	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	8

Примітка.  $l_{20}$  – повітряний зазор у другій ділянці магнітного ланцюга.

**2.** Визначити магнітні потоки в ділянках магнітного ланцюга на рис. 9.5. Число витків  $W_1 = W_2 = W_3 = 120$ . Довжини ділянок  $l_1, l_2, l_3$ , зазор  $l_{20}$  у другій ділянці, площі перетину  $S_1, S_2, S_3$  і струми в обмотках  $I_1, I_2, I_3$  взяти з табл. 9.3. Крива намагнічування на рис. 9.1.

***НЕЛІНІЙНІ ЛАНЦЮГИ ЗМІННОГО СТРУМУ***

***Робоча програма***

***Загальні положення***

***Основні співвідношення***

***Типові приклади. Розрахунок нелінійних електричних кіл змінного струму***

***Контрольне завдання 10***

## 10. НЕЛІНІЙНІ ЛАНЦЮГИ ЗМІННОГО СТРУМУ

### 10.1 Робоча програма

1. Основні поняття й визначення. Нелінійні елементи і їхні характеристики при змінних струмах і напругах.
2. Загальна характеристика нелінійних резисторів, нелінійних індуктивностей, нелінійних ємнісних елементів.
3. Типи вольтамперних характеристик нелінійних елементів: ВАХ за миттєвим значенням, ВАХ по перших гармоніках, ВАХ для діючих значень.
4. Загальна характеристика методів аналізу й розрахунку нелінійних електричних кіл змінного струму: графічний метод розрахунку при використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень; аналітичний метод розрахунку по ВАХ для миттєвих значень при їхній кусочно-лінійній апроксимації; аналітичний (графічний) метод розрахунку по перших гармоніках струмів і напруг; метод розрахунку при використанні ВАХ для діючих значень.
5. Розрахунок ланцюгів, що містять індуктивні котушки, сердечники яких мають майже прямокутну криву намагнічування.
6. Розрахунок ланцюгів, що містять нелінійні конденсатори із прямокутною кулон-вольтною характеристикою.
7. Розрахунок ланцюгів, що містять вентильні елементи.
8. Послідовний ферорезонансний ланцюг. Ферорезонанс напруг. Паралельний ферорезонансний ланцюг. Ферорезонанс струмів.
9. Застосування символічного методу для розрахунку нелінійних ланцюгів.
10. Котушка зі сталевим сердечником. Схема заміщення, векторна діаграма. Визначення струму втрат, що намагнічує струм.
11. Трансформатор зі сталевим сердечником. Основні співвідношення, векторна діаграма.

## **10.2 Загальні положення**

Нелінійні ланцюги змінного струму - це електричні кола, для аналізу й розрахунку яких потрібні інші методи в порівнянні з методами аналізу й розрахунку лінійних електричних кіл. Вивчення й засвоєння методів аналізу й розрахунку нелінійних електричних кіл змінного струму має велике значення для становлення бакалавра-електрика, тому що в більшості випадків реальні електротехнічні пристрої й установки характеризуються нелінійностями і їхня схема заміщення містить нелінійні елементи. При вивченні нелінійних ланцюгів змінного струму варто пам'ятати, що опір і провідність нелінійного резистора, індуктивність нелінійної індуктивної котушки, ємність нелінійного конденсатора є нелінійними функціями миттєвого значення струму (напруги) на цих елементах, тобто являють собою змінні величини, а тому для розрахунку малоприматні.

Аналіз і розрахунок нелінійних електричних кіл змінного струму здійснюється по їхніх схемах заміщення, до складу яких входять: джерело ЕРС, джерело струму (синусоїдального струму), нелінійний активний опір, нелінійна індуктивність, нелінійна ємність. Нелінійні елементи схеми заміщення нелінійних електричних кіл характеризуються нелінійними ВАХ. При аналізі й розрахунку електричних кіл з нелінійними елементами залежно від розглянутого питання використовують різні типи характеристик того самого нелінійного елемента:

- а) характеристики для миттєвих значень;
- б) ВАХ по перших гармоніках струму й напруг;
- в) ВАХ для діючих значень.

Варто мати на увазі, що наявність нелінійних елементів в електричних колах із джерелами живлення синусоїдального струму (напруги) спричиняється несинусоїдальні струми (напруги) в елементах електричного кола. Це й спричиняється наявність ВАХ по перших гармоніках струму й напруги, ВАХ за діючим значенням, які використовуються для аналізу нелінійних електричних кіл змінного струму при еквівалентній заміні несинусоїдальних струмів (напруг) синусоїдальними.

Крім того, варто знати, що характеристиками за миттєвим значенням  $\epsilon$ : для нелінійного активного опору - ВАХ; для нелінійної індуктивності - вебер-амперні характеристики (ВбАх); для нелінійної ємності - кулон-вольтна характеристики (КВХ).

У процесі вивчення методів аналізу й розрахунку нелінійних ланцюгів змінного струму необхідно чітко представляти, що для таких ланцюгів застосовні закони Кірхгофа, однак їхнє використання утруднене внаслідок нелінійності ВАХ елементів ланцюга, хоча відомі методи аналізу й розрахунку нелінійних ланцюгів базуються на законах Кірхгофа. Всі методи аналізу нелінійних ланцюгів можна підрозділяти на дві більші групи: аналітичну й графічну. Крім того, використовуваний тип ВАХ нелінійних елементів визначає й метод розрахунку нелінійних ланцюгів змінного струму. Найбільше широко поширені наступні методи аналізу й розрахунку нелінійних ланцюгів змінного струму:

- 1) графічний, при використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень;
- 2) аналітичний, при використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень при їхній кусочно-лінійній апроксимації;
- 3) аналітичний або графічний, при використанні ВАХ по перших гармоніках;
- 4) аналітичний або графічний, при використанні ВАХ по діючим.

При вивченні зазначених методів варто звернути увагу на те, що графічний метод розрахунку при використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень застосуємо до ланцюгів, у яких відомий закон зміни в часі якою-небудь однієї що визначає роботу нелінійного елемента величини (струму, напруги, заряду); що аналітичний метод розрахунку при використанні характеристик нелінійних елементів для миттєвих значень полягає в заміні нелінійних диференціальних рівнянь лінійними, шляхом апроксимації характеристик за миттєвим значенням лінійними відрізками. Кожному нелінійному рівнянню буде відповідати стільки лінійних рівнянь, скільки відрізків прямих замінюють характеристику нелінійного елемента. Надалі розрахунок зводиться до рішення лінійних диференціальних рівнянь і стикуванню рішень на

одній лінійній ділянці з рішенням на іншій лінійній ділянці; що графічний (аналітичний) метод розрахунку по першим гармоніками струмів і напруг полягає в заміні несинусоїдальних струмів і напруг на нелінійному елементі їхніми першими гармоніками зневажають. Надалі при розрахунку використовують або векторні діаграми, або символічний метод для кожної крапки ВАХ по перших гармоніках нелінійного елемента, у результаті чого будують ВАХ всього ланцюга; що аналіз нелінійних ланцюгів змінного струму шляхом використання ВАХ для діючих значень полягає в заміні несинусоїдально, змінюючих струмів, і напруг еквівалентними (еквівалентність у змісті діючого значення) їм синусоїдальними величинами.

При цьому подальший розрахунок здійснюється або з використанням векторних діаграм, або символічним методом (аналогічно ланцюгам синусоїдального струму) для кожної крапки ВАХ нелінійного елемента для діючих значень.

Слід зазначити, що розрахунок нелінійних ланцюгів змінного струму зазначеними методами необхідно здійснювати в порядку, наведеному в п. 6.4 (типові приклади).

При розгляді ферорезонансних ланцюгів варто звернути увагу на побудову результуючих ВАХ по відомим ВАХ елементів електричного кола, а також уміти пояснити фізичні процеси що відбуваються у ферорезонансних ланцюгах (зокрема тригерний ефект).

Вивчення питання про котушку зі сталевим сердечником, як одним з основних елементів нелінійних ланцюгів, варто починати з фізичних процесів, що відбуваються при підключенні її до джерела синусоїдальної напруги, які дозволяють побудувати схему заміщення котушки зі сталевим сердечником, використовувану при аналізі електричних кіл з котушкою.

### ***10.3 Основні співвідношення***

**1. Співвідношення між ЕРС. і магнітним потоком котушки з феромагнітним сердечником.** Амплітуда магнітного потоку визначається:

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega_m} = \frac{U\sqrt{2}}{\omega W},$$

і по фазі відстає від напруги на  $\frac{\pi}{2}$ . Діюче значення ЕРС визначається

$$E = 4,44\omega f B_m S.$$

## **2. Рівняння, що характеризують трансформатор з феромагнітним сердечником:**

а) для миттєвих значень:

$$i_0 W_1 = i_1 W_1 - i_2 W_2,$$

$$u_1 = i_1 R_1 + L_{s_1} \frac{di_1}{dt} + W_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

$$u_2 = W_2 \frac{d\Phi}{dt} - i_2 R_2 - L_{s_2} \frac{di_2}{dt}.$$

б) у комплексній формі:

$$\underline{I}_0 W_1 = \underline{I}_1 W_1 - \underline{I}_2 W_2,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 (R_1 + j\omega L_{s_1}) + j\omega W_1 \Phi,$$

$$\underline{U}_2 = j\omega W_2 \Phi - \underline{I}_2 (R_2 + j\omega L_{s_2}).$$

У наведених вираженнях  $R_1, R_2$  – активні опори обмоток трансформатора;  $W_1, W_2$  – число витків відповідних обмоток;  $L_{s_1}, L_{s_2}$  – індуктивності розсіювання обмоток;  $\Phi$  – магнітний потік у сердечнику.

**3. Однополуперіодні випрямлячі.** Постійна складова випрямленої напруги

$$U_0 = \frac{U_m}{\pi} = 0,45U.$$



Діюча напруга на опорі навантаження

$$U_H = \frac{U}{\sqrt{2}}.$$

При резисторному навантаженні струм ланцюга має ту ж форму, що й напруга  $U_H(t)$

$$i(t) = \frac{u_H(t)}{R_H}, \quad I_0 = \frac{I_m}{\pi} = 0,45I, \quad I_H = \frac{U_H}{R_H}.$$

Тут  $U_m$ ,  $U$  і  $I_m$ ,  $I$  – амплітудні й діючі значення напруги й струму синусоїдального джерела струму.

Коефіцієнт випрямлення по потужності

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{U_H I_H} 100\% = 40,6\%.$$

**4. Двухполуперіодні випрямлячі.** Середнє значення випрямленої напруги

$$U_0 = \frac{2U_m}{\pi} = 0,9U.$$

Діюча напруга на навантаженні

$$U_H = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U.$$

Коефіцієнт випрямлення по потужності при активному опорі навантаження

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{U_H I_H} 100\% = 81,2\%.$$

### **5. Трифазні випрямлячі:**

а) трифазна схема із середньою крапкою.

Середнє значення трифазної випрямленої напруги

$$U_0 = \frac{3\sqrt{3}U_m}{2\pi} = 1,17U.$$

Діюча напруга на навантаженні

$$U_H = 0,955U_m = 1,35U.$$

Коефіцієнт випрямлення по потужності

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{U_H I_H} 100\% = 74,5\%.$$

б) трифазна мостова схема.

Середнє значення трифазної випрямленої напруги

$$U_0 = \frac{3\sqrt{3}U_m}{\pi} = 2,34U.$$

Діюче значення напруги на навантаженні

$$U_H = 1,91U_m = 2,70U.$$

Коефіцієнт випрямлення по потужності

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{U_H I_H} 100\% = 75\%.$$

### ***10.4 Типові приклади. Розрахунок нелінійних електричних кіл змінного струму***

**1.** На рис. 10.1 зображена електричне коло, що складається з резистора опором  $R = 20$  Ом, конденсатора з ємнісним опором  $x = 10$  Ом і котушки для якої на рис. 10.1.б дана залежність потокоцеплення  $\psi$  від струму  $i$ .  $i_1 = 0,5$  А; ( $\psi_m = 10^{-2}$  Вб). Ланцюг завантажується від джерела

струму синусоїдальної форми  $j(t) = 1 \cdot \sin 500t$ . Побудувати залежності  $U_{L_H}(\omega t)$ ,  $U_{ab}(\omega t)$ ,  $\psi(\omega t)$ .

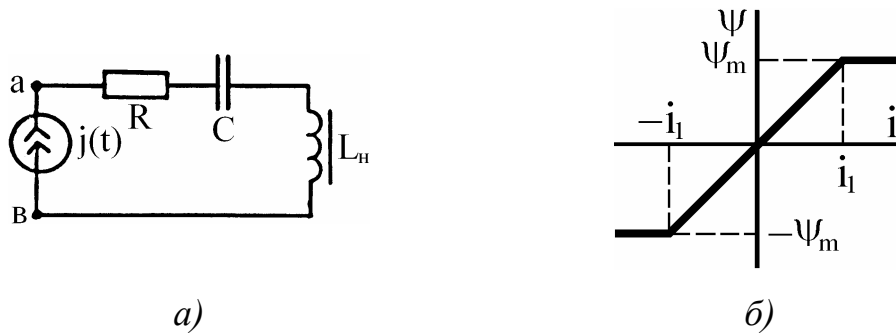


Рисунок 10.1

### Рішення

1. Відповідно до Вбх нелінійної індуктивності роботу ланцюга будуть розглядати по лінійних ділянках характеристики (рис. 10.1.б). У пліні періоду синусоїдального струму джерела робота нелінійного ланцюга розглядається на наступних ділянках:

1<sup>а</sup> ділянка  $0 \leq i \leq i_1$ , (оа – ВбАХ)

$$0 \leq \omega t \leq \omega t_1,$$

$$0 \leq \psi \leq \psi_m.$$

2<sup>а</sup> ділянка  $i \geq i_1$ , (аб – ВбАХ)

$$\omega t_1 \leq \omega t \leq \pi - \omega t_1,$$

$$\psi = \psi_m.$$

3<sup>а</sup> ділянка  $i_1 \geq i \geq -i_1$ , (ав – ВбАХ)

$$\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi + \omega t_1,$$

$$\psi_m \geq \psi \geq -\psi_m.$$

$$4^{\text{а}} \text{ ділянка} \quad i \leq -i_1, \quad (\text{вс} - \text{вбАХ})$$

$$\pi + \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi - \omega t_1,$$

$$\psi = -\psi_m.$$

$$5^{\text{а}} \text{ ділянка} \quad 0 \geq i \geq -i_1, \quad (\text{вс} - \text{вбАХ})$$

$$2\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq 0,$$

$$-\psi_m \leq \psi \leq 0.$$

2. Визначаємо тимчасові границі роботи на кожній ділянці ВБАХ нелінійної індуктивності, для чого необхідно визначити значення  $\omega t$ , що визначаємо з рівності

$$j(t) = 1 \cdot \sin \omega t_1 = i_1,$$

тобто

$$\omega t_1 = \arcsin \frac{i_1}{1} = \arcsin \frac{0,5}{1} = \frac{\pi}{6}.$$

3. З огляду на те, що струм у ланцюзі змінюється за синусоїдальним законом, визначаємо напругу на лінійних елементах ланцюга, які будуть характеризуватися одними (відповідними) законами зміни протягом всіх розглянутих ділянок (протягом періоду).

$$U_R = j(t) \cdot R = 1 \cdot R \cdot \sin 500t = 20 \cdot \sin 500t \text{ В},$$

$$U_C = 1 \cdot x_C \cdot \sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right) = 10 \cdot \sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ В}.$$

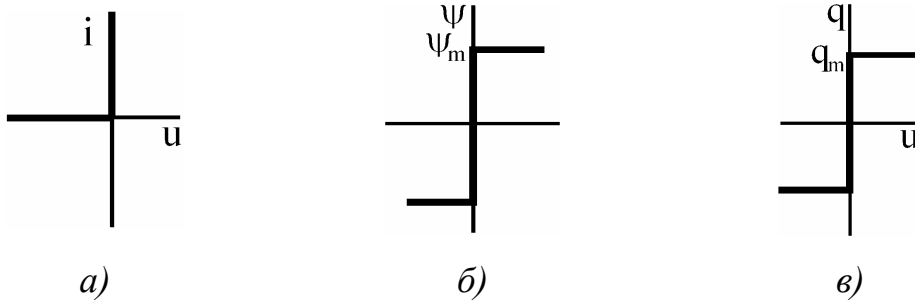


Рисунок 10.2

4. Відповідно до п. 1 запишемо закон зміни  $\psi(\omega t)$ :

$$0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{6}, \quad \psi = \frac{\Psi_m}{i_1} \cdot 1 \cdot \sin \omega t = 0,02 \cdot \sin 500t \text{ Вб},$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \frac{5}{6} \pi, \quad \psi = \psi_m = 10^{-2} \text{ Вб},$$

$$\frac{5}{6} \pi \leq \omega t \leq \frac{7}{6} \pi, \quad \psi = 0,02 \cdot \sin 500t \text{ Вб},$$

$$\frac{7}{6} \pi \leq \omega t \leq \frac{11}{6} \pi, \quad \psi = 10^{-2} \text{ Вб},$$

$$\frac{11}{6} \pi \leq \omega t \leq 2\pi, \quad \psi = 0,02 \cdot \sin 500t \text{ Вб}.$$

5. З урахуванням  $U_{L_H} = \frac{d\psi}{dt}$ , одержимо:

$$U_{L_H} = 10 \cdot \sin\left(500t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{при } 0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{6},$$

$$U_{L_H} = 0, \quad \text{при } \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \frac{5}{6} \pi,$$

$$U_{L_H} = 10 \cdot \sin\left(500t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{при } \frac{5}{6} \pi \leq \omega t \leq \frac{7}{6} \pi,$$

$$U_{L_H} = 0, \quad \text{при } \frac{5}{6}\pi \leq \omega t \leq \frac{7}{6}\pi,$$

$$U_{L_H} = 10 \cdot \sin\left(500t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{при } \frac{11}{6}\pi \leq \omega t \leq 2\pi.$$

6. Згідно другого закону Киірхгофа знайдемо

$$U_{ab} = U_R + U_C + U_{L_H}$$

або по ділянках

$$0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{6},$$

$$U_{ab} = 20\sin 500t + 10\sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right) + 10\sin\left(500t + \frac{\pi}{2}\right) = 20\sin 500t,$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \pi - \frac{\pi}{6},$$

$$U_{ab} = 20\sin 500t + 10\sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \pi + \frac{\pi}{6},$$

$$U_{ab} = 20\sin 500t,$$

$$\pi + \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq 2\pi - \frac{\pi}{6},$$

$$U_{ab} = 20\sin 500t + 10\sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$2\pi - \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq 2\pi,$$

$$U_{ab} = 20\sin 500t.$$

7. Залежність  $U_{ab}(\omega t)$ ,  $U_{LH}(\omega t)$ ,  $\psi(\omega t)$  відповідно до приведенного вище розрахунку приведені на мал. 10.3.

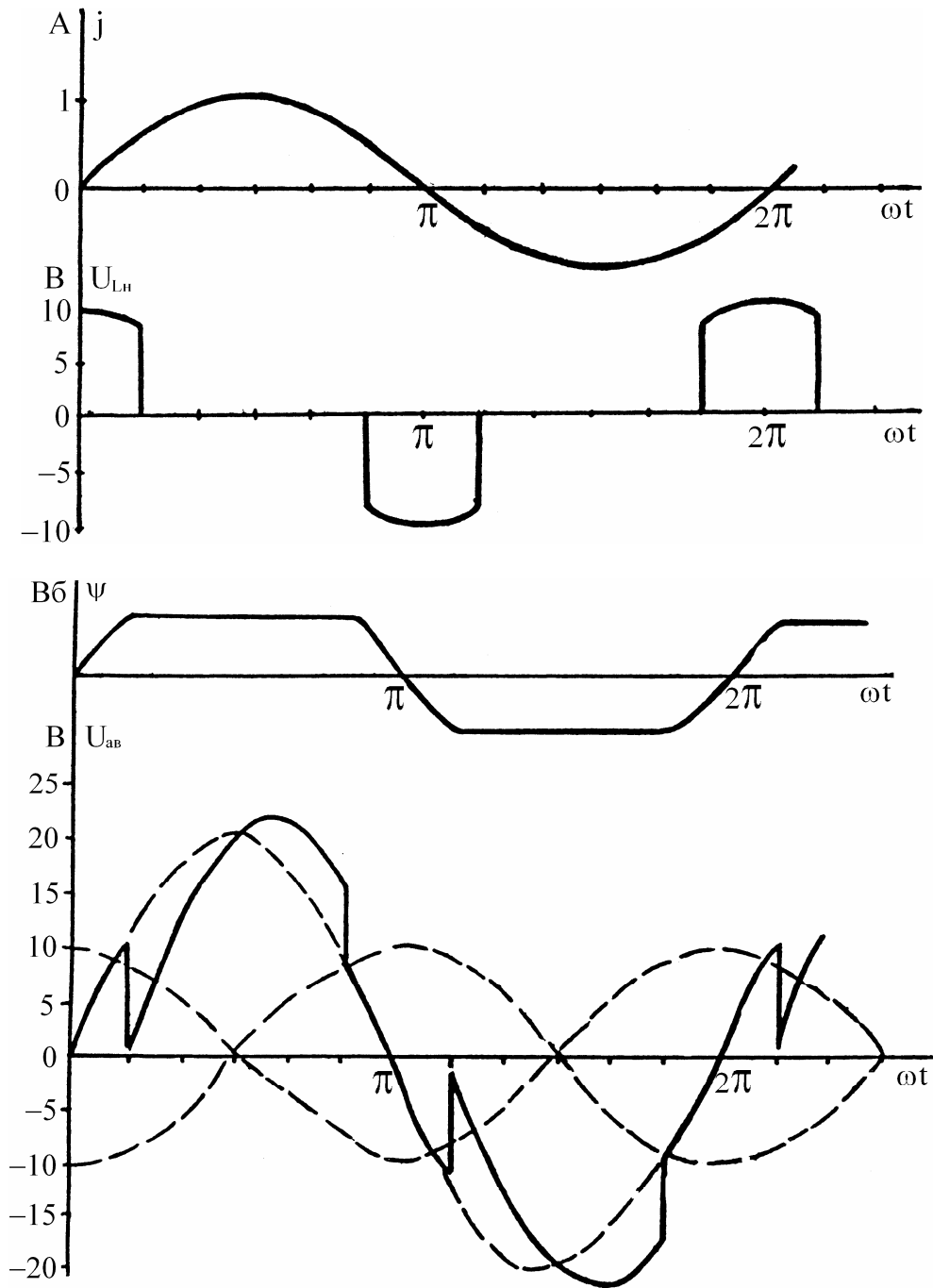


Рисунок 10.3

2. Схема мал. 6.4 має резистори опору  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ , два ідеальних діоди, вольтамперні характеристики яких зображені на рис. 10.2. а, два джерела синусоїдальної ЕРС:  $e_1(t) = 10\sin\omega t$  і  $e_2(t) = 14\sin\omega t$ , і джерела постійної ЕРС.  $E_0 = 5 \text{ В}$ . Побудувати графіки  $U_{д1}$  й  $i_3$  у функції  $\omega t$ .

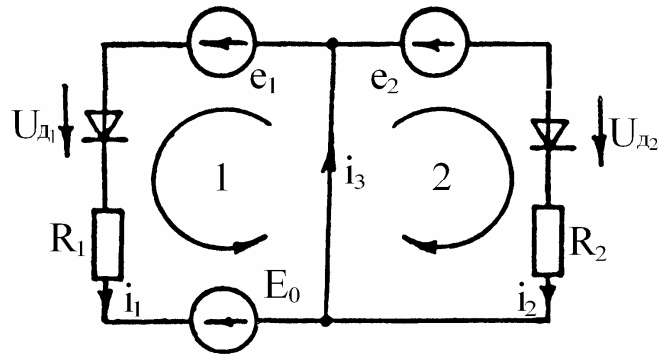


Рисунок 10.4

### Рішення

1 Для вихідного електричного кола запишемо рівняння згідно законів Кірхгофа:

$$i_3 = i_1 + i_2,$$

$$U_{д1} + i_1 R_1 = e_1 - E_0,$$

$$U_{д2} + i_2 R_2 = -e_2.$$

2 Наявність нелінійних елементів, включених за зазначеною схемою забезпечує автономність роботи 1 і 2 контурів. Перший контур буде характеризуватися наступним:

якщо  $e_1 - E_0 \geq 0$ , то діод цього контуру буде відкритим  $U_{д1} = 0$ , а

$$i_1 = \frac{e_1 - E_0}{R_1};$$

якщо  $e_1 - E_0 \leq 0$ , то діод закритий і  $i_1 = 0$ ,  $U_{д1} = e_1 - E_0$ .



Другий контур характеризується наступним:

якщо  $-e_1 \geq 0$ , то діод другого контуру відкритий й  $U_{д_2} = 0$ , а  $i_2 = \frac{-e_2}{R_2}$ ;

якщо  $-e_2 \leq 0$ , то діод закритий і  $i_2 = 0$ ,  $U_{д_2} = -e_1$ .

3. Визначаємо згідно п. 2 тимчасові інтервали закритого (відкритого) стану діодів відповідних контурів.

Ураховуючи, що  $10\text{Sin}\omega t - 5 \geq 0$  забезпечує відкриває відкритий стан діода першого контуру, те вирішуючи рівняння

$$10\text{Sin}\omega t_1 - 5 = 0,$$

одержимо

$$\omega t_1 = \arcsin \frac{5}{10} = \frac{\pi}{6}.$$

У результаті чого можна відзначити, що при  $0 \leq \omega t \leq \omega t_1$  – діод першого контуру закритий, тому що на цьому інтервалі  $e_1 - E_0 \leq 0$ ; при  $\omega t_1 \leq \omega t \leq \pi - \omega t_1$  – діод першого контуру відкритий, тому що на цьому інтервалі  $e_1 - E_0 \geq 0$ ; при  $\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi$  – діод першого контуру буде закритий, тому що на цьому інтервалі  $e_1 - E_0 \leq 0$ .

Згідно нерівностей  $-15\text{Sin}\omega t \geq 0$  і  $-15\text{Sin}\omega t \leq 0$  можна відзначити, що: при  $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$  – діод другого контуру буде закритий, тому що на цьому інтервалі  $-e_1 \geq 0$ ; при  $0 \leq \omega t \leq \pi$  – діод другого контуру буде закритий, тому що на цьому інтервалі  $-e_1 \leq 0$ .

4. З огляду на результати п. 2 і п. 3 можна записати:

на інтервалі  $0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{6}$

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0,$$

$$U_{д_1} = 10\text{Sin}\omega t - 5,$$

на інтервалі  $\frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \frac{5\pi}{6}$

$$i_1 = \frac{10\sin\omega t - 5}{100} = 0,1\sin\omega t - 0,05, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0,1\sin\omega t - 0,05,$$

$$U_{д1} = 0,$$

на інтервалі  $\frac{5\pi}{6} \leq \omega t \leq \pi$

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0,$$

$$U_{д1} = 10\sin\omega t - 5,$$

на інтервалі  $\pi + \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = 0,$$

$$U_{ав} = 20\sin 500t + 10\sin\left(500t - \frac{\pi}{2}\right),$$

на інтервалі  $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$

$$i_1 = 0, \quad i_2 = \frac{-15\sin\omega t}{50} = -0,3\sin\omega t, \quad i_3 = -0,3\sin\omega t,$$

$$U_{д1} = 10\sin\omega t - 5.$$

5. На підставі п. 4 будуюмо графіки  $U_{д1} = f(\omega t)$  й  $i_3 = f(\omega t)$ .

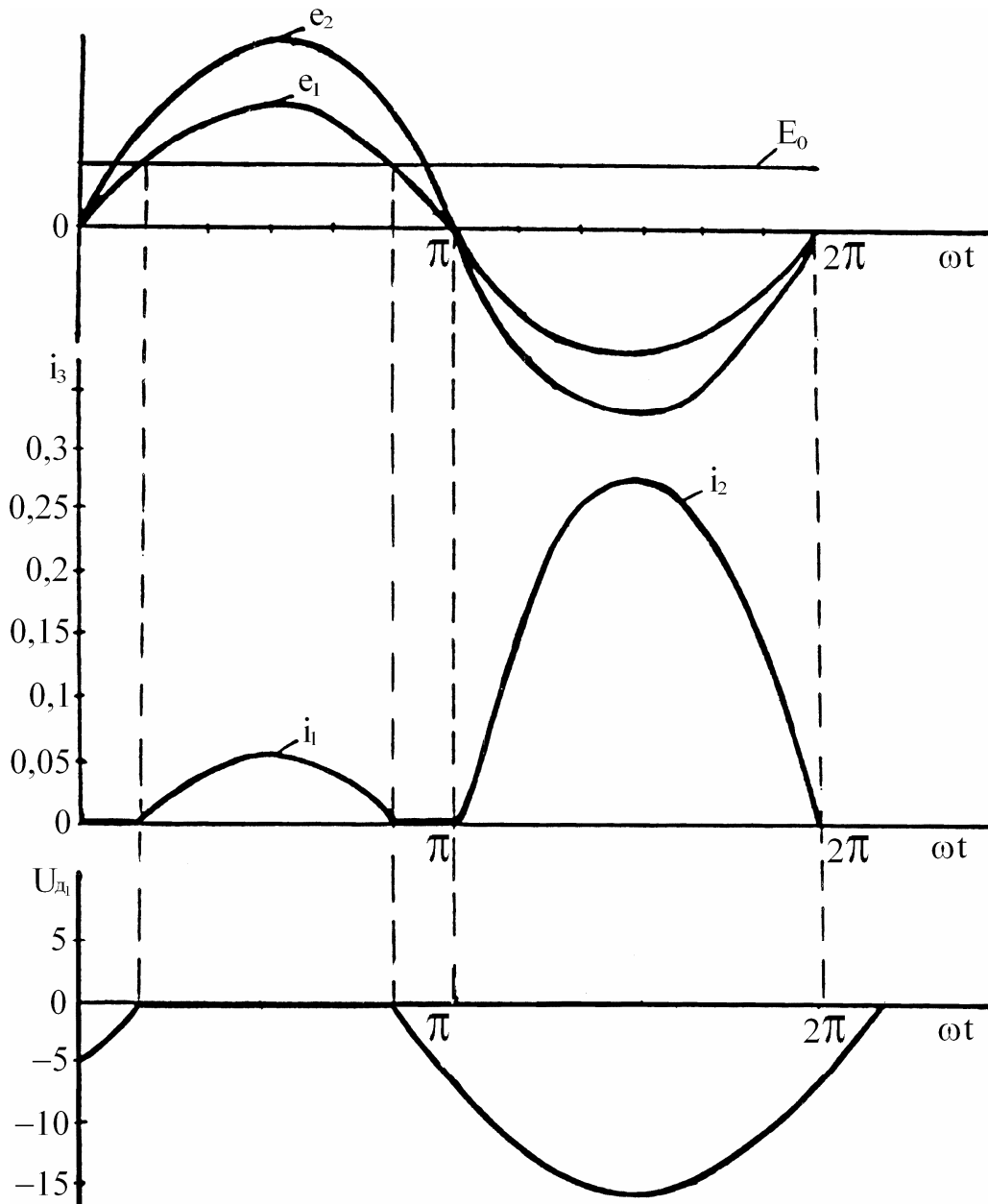


Рисунок 10.5

**3.** Схема рис. 10.6 складається з індуктивної котушки з нелінійною вольтамперною характеристикою, лінійного конденсатора, що має ємнісний опір по першій гармоніці  $x = 100$  Ом, і резистора  $R_2 = 100$  Ом. ВАХ індуктивної котушки по першій гармоніці для діючих значень зображена на рис. 10.7.a (крива a). Задаючись різними значеннями струму  $I_1$ , побудувати кілька векторних діаграм для першої гармоніки й знайти залежність  $U_{ав} = f(I_1)$ .

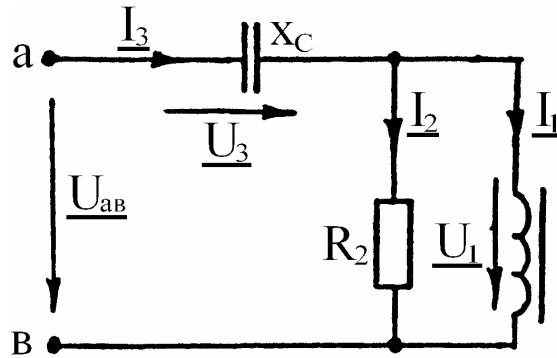


Рисунок 10.6

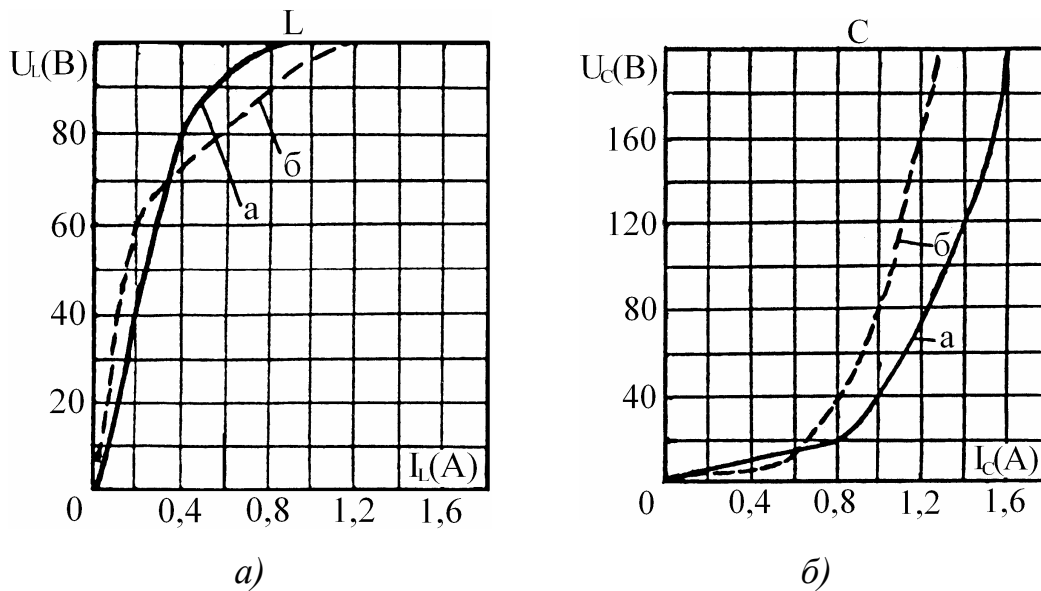
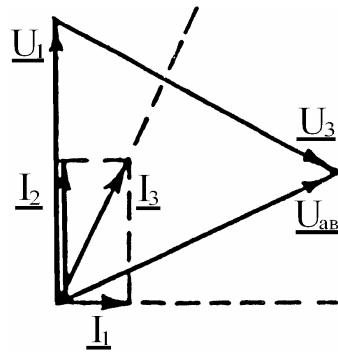


Рисунок 10.7

### Рішення

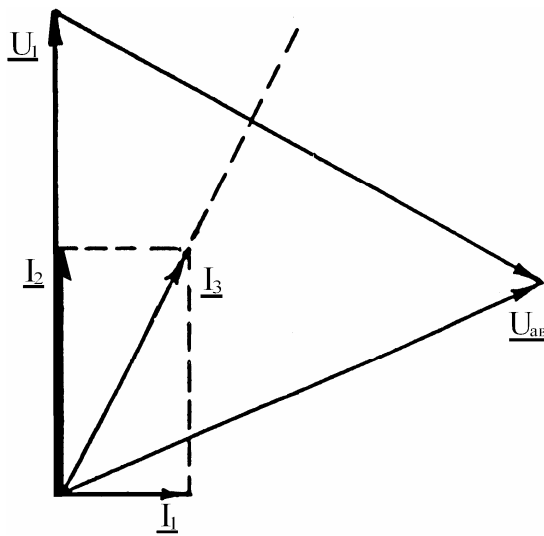
1. Задаючись значенням  $I_1 = 0,2 \text{ A}$  по ВАХ знаходимо  $U_1 = 40 \text{ B}$ .
2. Тобто нелінійна індуктивність і лінійний опір  $R_2$  включені паралельно, визначаємо значення  $I_2 = \frac{U_1}{R_2} = \frac{40}{100} = 0,4 \text{ A}$ .

3. Визначаємо значення  $I_3$  по векторній діаграмі (рис. 10.8.а), складаючи вектори струмів  $I_1$  і  $I_2$ , (з огляду на, що вектор  $U_1$  випереджає вектор  $I_1$  на  $\frac{\pi}{2}$ , а вектор  $I_2$  збігається по фазі з вектором  $U_1$ )  $I_3 \approx 0,44$  А.



$$\begin{aligned} & \underline{0,2A} \\ & \underline{10B} \\ I_1 &= 0,2 \text{ A} \\ U_1 &= 40 \text{ B} \\ I_2 &= 0,4 \text{ A} \\ I_3 &= 0,44 \text{ A} \\ U_3 &= 44 \text{ B} \\ U_{ab} &= 45 \text{ B} \end{aligned}$$

а)



$$\begin{aligned} I_1 &= 0,4 \text{ A} \\ U_1 &= 80 \text{ B} \\ I_2 &= 0,8 \text{ A} \\ I_3 &= 0,9 \text{ A} \\ U_3 &= 90 \text{ B} \\ U_{ab} &= 90 \text{ B} \end{aligned}$$

б)

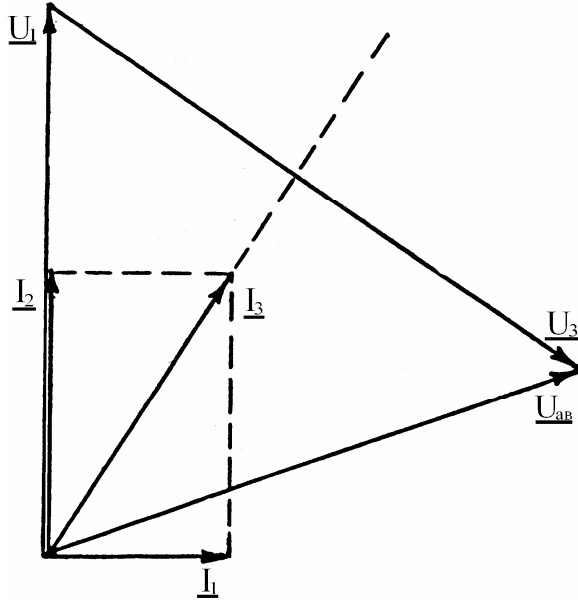
Рисунок 10.8

4. Знайдемо  $U_3 = I_3 \cdot x_C = 0,44 \cdot 100 = 44$  В.

5. Складаючи вектори  $U_1$  і  $U_3$ , визначимо  $U_{ab}$  (рис. 10.8.а) (з огляду на те, що вектор  $U_3$  відстає від вектора  $I_3$  на  $\frac{\pi}{2}$ ).

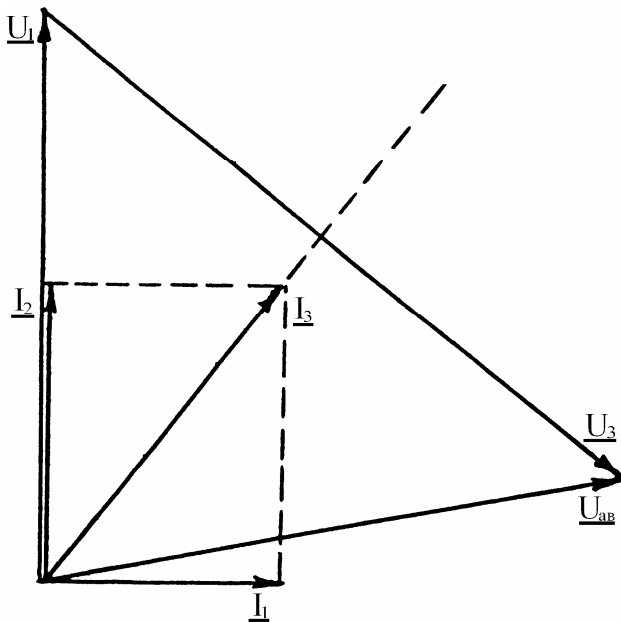
$$U_{ав} = 45 \text{ В.}$$

6. Надходячи аналогічно п. 1 – п. 5, будемо сімейство векторних діаграм (10.8.б, 10.8.в, 10.8.г, 10.8.д, 6.8.ж), по яких визначаємо величини  $I_0$ ни, необхідні для побудови залежності  $U_{ав}(I_1)$ .



$$\begin{aligned} I_1 &= 0,6 \text{ А} \\ U_1 &= 95 \text{ В} \\ I_2 &= 0,95 \text{ А} \\ I_3 &= 1,1 \text{ А} \\ U_3 &= 110 \text{ В} \\ U_{ав} &= 95 \text{ В} \end{aligned}$$

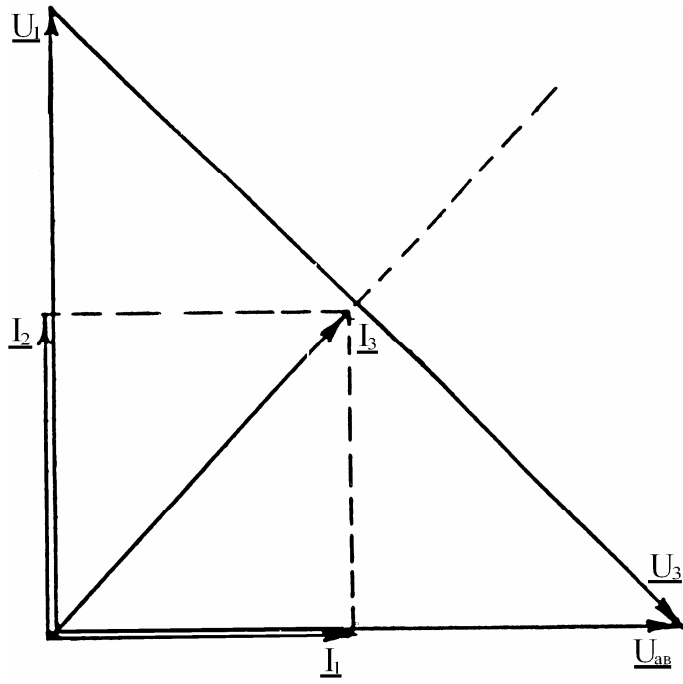
б)



$$\begin{aligned} I_1 &= 0,8 \text{ А} \\ U_1 &= 100 \text{ В} \\ I_2 &= 1,0 \text{ А} \\ I_3 &= 1,3 \text{ А} \\ U_3 &= 130 \text{ В} \\ U_{ав} &= 100 \text{ В} \end{aligned}$$

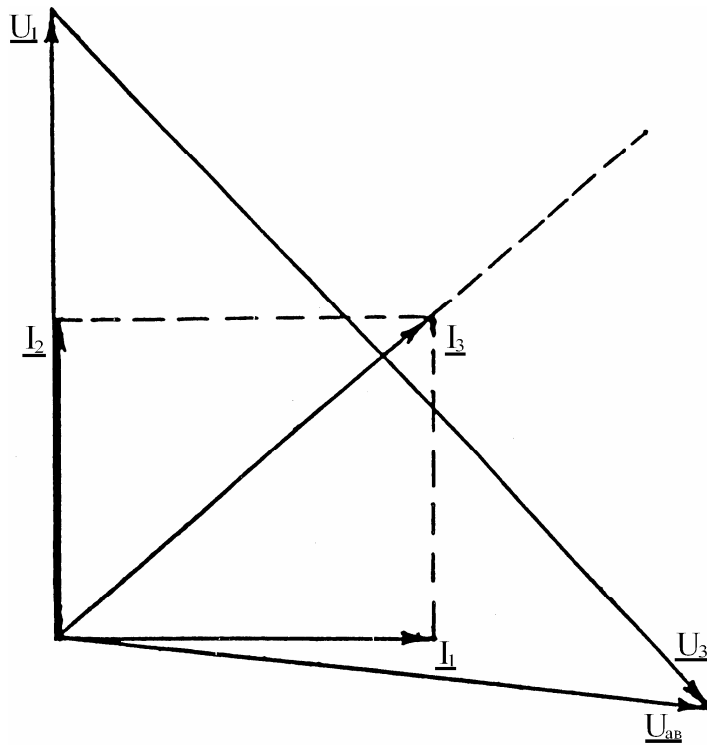
в)

Рисунок 10.8



$I_1 = 1,0 \text{ A}$   
 $U_1 = 103 \text{ B}$   
 $I_2 = 1,03 \text{ A}$   
 $I_3 = 1,5 \text{ A}$   
 $U_3 = 150 \text{ B}$   
 $U_{ab} = 105 \text{ B}$

д)



$I_1 = 1,2 \text{ A}$   
 $U_1 = 105 \text{ B}$   
 $I_2 = 1,05 \text{ A}$   
 $I_3 = 1,6 \text{ A}$   
 $U_3 = 160 \text{ B}$   
 $U_{ab} = 110 \text{ B}$

ж)

Рисунок 10.8

7. За результатами розрахунку будемо залежність  $U_{ав}(I_1)$  (рис. 10.9).

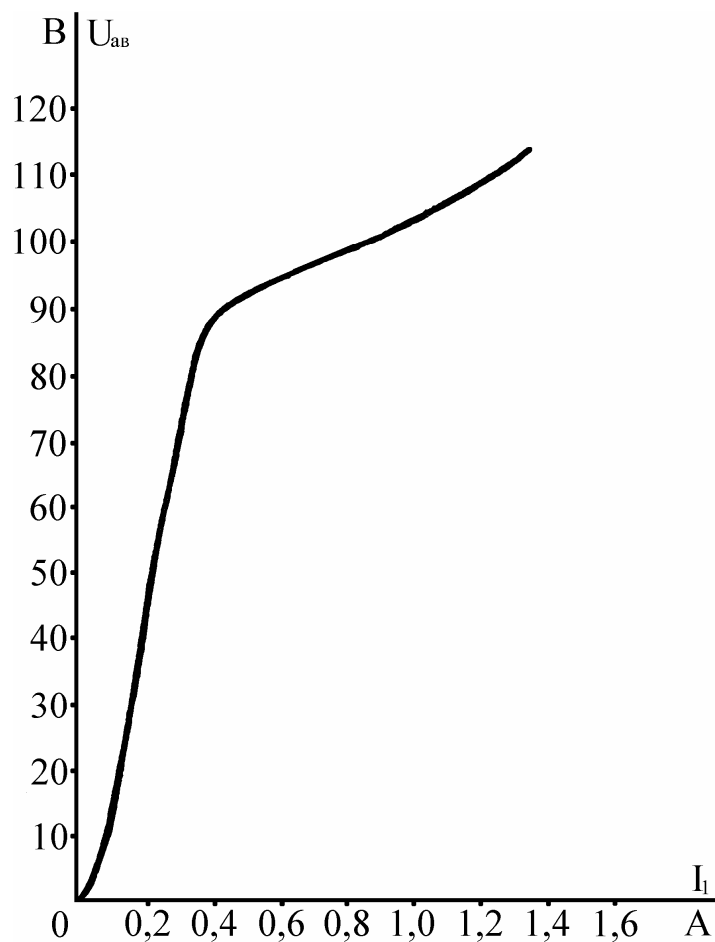


Рисунок 10.9

### 10.5 Контрольне завдання 10

1 Схема зображена на рис. 10.10, має активні опори  $R$ ,  $R_1$  і  $R_2$ , два ідеальних діоди, вольтамперні характеристики яких зображені на рис. 10.2.а, два джерела синусоїдальної ЕРС.:  $e_1 = E_m \sin \omega t$  і  $e_2 = n \cdot E_m \sin \omega t$  ( $n$  – чисельний коефіцієнт), джерело постійної ЕРС.  $E_0$ . Значення  $E_m$ ,  $E_0$ ,  $n$ ,  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  для відповідних варіантів наведені в табл. 10.1. Потрібно побудувати графіки, визначити середнє значення величин, зазначених у таблиці.



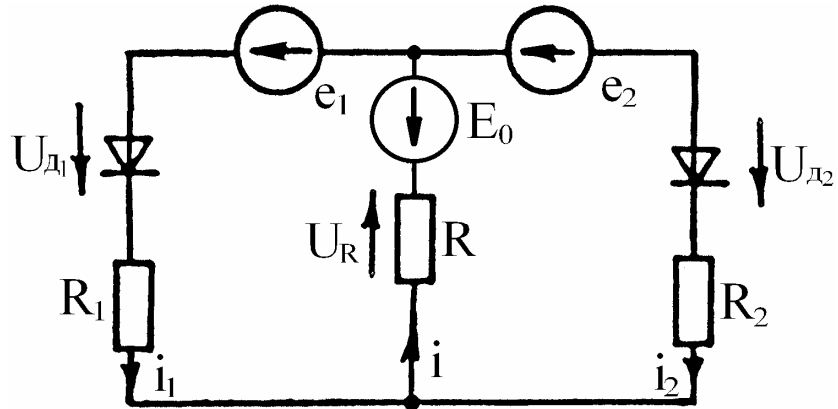


Рисунок 10.10

Таблиця 10.1

	А, Б, В, Д, Е	Є, Ж, З, И, І	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ь, Ю, Я	№ бу-кви
$E_m(\text{В})$	20	30	40	50	40	30	1
$N$	1,0	1,5	1,5	1,0	1,2	1,2	2
$E_0(\text{В})$	10	15	10	15	10	15	3
$R(\text{Ом})$	50	75	50	75	50	75	4
$R_1(\text{Ом})$	50	30	40	50	30	40	5
$R_2(\text{Ом})$	100	80	50	50	80	100	6
Графіки величин $U_{д1}, i / U_{д2}, i$	+/-	-/+	+/-	-/+	+/-	-/+	7
$I_{\text{ср}} / U_{д1}$ порівн	-/+	+/-	-/+	+/-	-/+	+/-	8

2 Схема, зображена на рис. 10.11 (10.12) складається із джерела синусоїдального струму  $i = I_m \sin \omega t$ , лінійного активного опору, лінійної ємності (індуктивності) і нелінійної індуктивності (ємності), вебер-амперна (кулон-вольтна) характеристика якої наведена на рис. 10.2.б (рис. 10.2.в) ( $\psi_m = 10^{-2}$  Вб;  $q_m = 10^{-5}$  Кл). Потрібно розрахувати й побудувати залежності:  $U_{\text{св}}, \psi(q), U_{\text{ас}}, U_{\text{ав}}, i_2, i_3$  у функції  $\omega t$ . Значення вихідних величин для відповідних варіантів наведені в табл. 10.2.

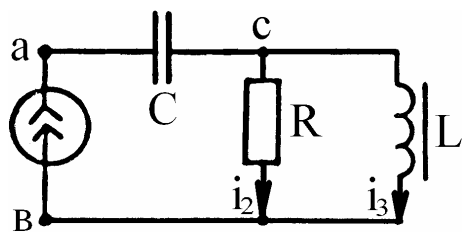


Рисунок 10.11

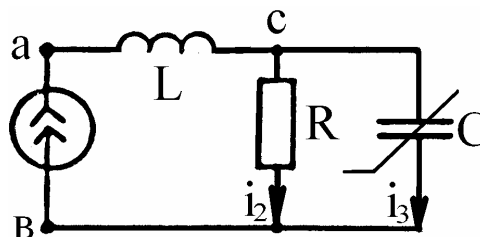


Рисунок 10.12

Таблиця 10.2

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
Схема мал.	6,11/6,12	6,11/6,12	6,11/6,12	6,11/6,12	6,11/6,12	6,11/6,12	1
Im(A)	0,4/0,01	0,6/0,02	0,8/0,03	1,0/0,04	1,2/0,05	0,4/0,01	2
XL= XC = R (Ом)	200/1000	150/500	100/750	200/1000	150/750	100/500	3
$\omega$ (с-1)	250/750	250/1000	250/1250	250/500	250/750	250/1000	4

3 Схема зображена на рис.10.11 (10.12) складається з лінійного активного опору, нелінійної індуктивності (ємності), вольтамперна характеристика якої по першій гармоніці зображена на рис. 10.7.а (10.7.б) (криві а або б), лінійної ємності (індуктивності), з відповідними опорами по першій гармоніці. Задаючись різними значеннями струму  $I_3$ , побудувати кілька векторних діаграм для всієї схеми по перших гармоніках струмів і напруг і знайти залежність, зазначену в табл. 10.3, де також наведені значення опорів і вольтамперні характеристики нелінійних елементів для відповідних варіантів.

Таблиця 10.3

	А, Б, В, Г, Д, Е	Є, Ж, З, И, І, Ї	Й, К, Л, М, Н	О, П, Р, С, Т	У, Ф, Х, Ц, Ч	Ш, Щ, Ъ, Ю, Я	№ букви
Схема мал.	<u>6.11</u> 6.12	<u>6.11</u> 6.12	<u>6.11</u> 6.12	<u>6.11</u> 6.12	<u>6.11</u> 6.12	<u>6.11</u> 6.12	1
ВАХ, мал.	<u>6.7a(a)</u> 6.7б(a)	<u>6.7a(б)</u> 6.7б(б)	<u>6.7a(a)</u> 6.7б(a)	<u>6.7б(б)</u> 6.7б(б)	<u>6.7a(a)</u> 6.7б(a)	<u>6.7a(б)</u> 6.7б(б)	2
R	50	75	50	75	50	75	3
X <sub>L</sub> /X <sub>C</sub>	40/40	60/60	80/80	100/100	120/120	100/100	4
Побудувати залежності	U <sub>ав</sub> (I <sub>1</sub> )	U <sub>ав</sub> (I <sub>2</sub> )	U <sub>ав</sub> (U <sub>ас</sub> )	U <sub>ав</sub> (I <sub>1</sub> )	U <sub>ав</sub> (I <sub>3</sub> )	U <sub>ав</sub> (I <sub>3</sub> )	5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. –М.: Гардерика, 2001.–639с.
2. Зевеке Г.В. и др. Основы теории цепей. –М.: Энергоатомиздат, 1989. –527с.
3. Татур Т.А. Основы теории цепей. –М.: Высш. шк.,1980. –327с.
4. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. –М.: Высш. шк., 1982. –482с.
5. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники/ Под ред. П.А. Ионкина. –М.: Высш. шк., 1982. – 426с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

*В.Г. Дрючин*

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.  
ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА**

Навчальний посібник

В авторській редакції

Дизайн обкладинки

????????????????????

---

Підп. до друку ?????????????? Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офс.  
Друк RISO. Ум.друк.арк. 13,25 Зам. № ?????? . Наклад ???? пр.  
Видавництво не несе відповідальність за зміст матеріалу, наданого автором до друку.

Видавець та виготівник:  
Донбаський державний технічний університет  
пр. Леніна, 16, м. Алчевськ, Луганська обл., 94204.  
Web-site: <http://www.dmmi.edu.ua> E-mail: [info@dmmi.edu.ua](mailto:info@dmmi.edu.ua)  
(Творче виробниче об'єднання «ЛАДО», каб. 113-а, II корпус, т./факс (06442)2-02-59  
Свідоцтво Держкомтелерадіо серія ДК, №2010 від 12.11.2004