

# 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ

## Основные теоретические сведения

Существование явлений электромагнитной и магнитоэлектрической индукции создает возможность распространения переменного электромагнитного поля в виде бегущих волн. Наибольший интерес при изучении их свойств имеют *бегущие плоские гармонические волны*, так как любую другую волну вдали от источников можно представить через суперпозицию определенного набора таких волн. Векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции в бегущей плоской гармонической волне взаимно *ортогональны* и изменяются *синфазно* в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Кроме того, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  ортогональны и к направлению распространения волны, которое задается *волновым вектором*  $\vec{k}$ . Модуль волнового вектора называется *волновым числом*  $k$  и определяется по формуле

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.\quad (1.2)$$

Напомним, что  $\omega$  — угловая или циклическая частота,  $\nu$  — частота,  $\lambda$  — длина волны,  $T$  — период,  $c$  — скорость света,  $\varphi = (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$  — фаза волны в точке, описываемой радиус-вектором  $\vec{r}$ , в момент времени  $t$ ,  $\varphi_0$  — начальная фаза. В вакууме между ними справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi\nu, & \omega &= 2\pi/T, \\ \lambda\nu &= c, & \lambda &= 2\pi c/\omega.\end{aligned}$$

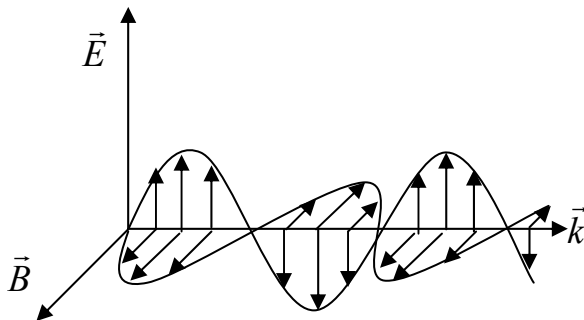


Рис. 1.1. Правовинтовая тройка векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{k}$ .

В каждой точке волны векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{k}$  составляют *правовинтовую тройку* (рис. 1.1) и связаны соотношением

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B}.\quad (1.3)$$

Взяв от обеих частей этого равенства модули величин, можно получить формулу

$$E = c \cdot B.\quad (1.4)$$

Электромагнитные волны переносят энергию, плотность которой равна сумме плотностей энергии электрического  $w_E$  и магнитного  $w_B$  полей и в вакууме определяется по формуле

$$w = w_E + w_B = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.\quad (1.5)$$

Произведение плотности энергии на скорость распространения волны дает модуль вектора плотности потока энергии

$$S = w \cdot c = \frac{1}{\mu_0} \cdot E \cdot B. \quad (1.6)$$

Сам же вектор плотности потока энергии, называемый **вектором Пойнтинга**, в вакууме определяется по формуле

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B}. \quad (1.7)$$

На практике в типичных случаях векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{S}$  быстро осциллируют и измерить можно только модуль среднего по времени значения плотности потока энергии электромагнитной волны. Эта величина называется **интенсивностью** волны

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = c \cdot \langle w \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{E_0^2}{2}. \quad (1.8)$$

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М.: Наука, 1989. Гл. 11, п.п. 80, 81.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1990. Гл. 20, п.п. 161-163.

## 2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

### Основные теоретические сведения

Из теории электромагнитных волн следует, что вектор напряженности электрического поля плоской волны  $\vec{E}$  всегда расположен в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения. Существует круг физических явлений, который непосредственно связан с ориентацией вектора  $\vec{E}$  в такой фиксированной в пространстве плоскости. Если его направление в каждый момент времени непредсказуемо (хаотично), то излучение называется *естественным или неполяризованным*. Если же поведение вектора  $\vec{E}$  полностью предсказуемо, т.е. зависимость  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  может быть задана детерминированной (не случайной) функцией, то говорят, что волна *поляризована*. Например, монохроматическая волна всегда поляризована и в любой точке поперечной распространению волны неподвижной плоскости конец вектора  $\vec{E}$  описывает эллипс. Такая электромагнитная волна называется *эллиптически поляризованной*. Наибольший практический интерес представляют частные случаи эллиптической поляризации: *линейная (или плоская)*, когда эллипс вырождается в отрезок прямой линии (рис. 2.1), и *циркулярная (или круговая)*, когда эллипс становится окружностью (рис. 2.2). В первом случае плоскость в которой колеблется вектор называется *плоскостью колебаний*.

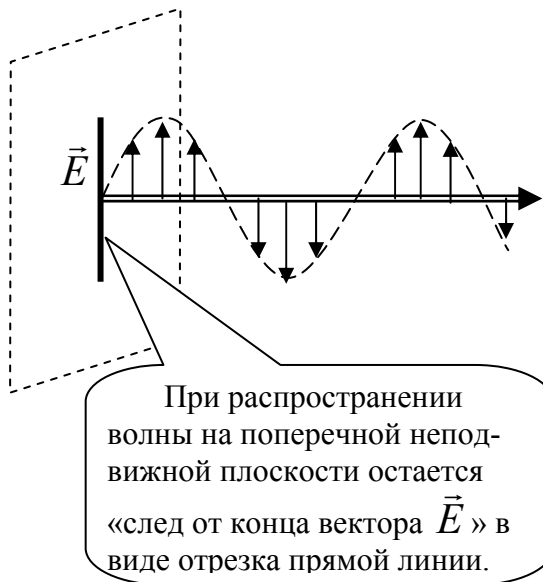


Рис. 2.1. Линейно поляризованная волна.



Рис. 2.2. Циркулярно поляризованная волна.

При циркулярной поляризации в зависимости от направления вращения вектора  $\vec{E}$  различают волны, поляризованные по *правому и левому кругу*. В первом случае вектор  $\vec{E}$  совершает вращение по часовой стрелке, а во втором против при наблюдении вдоль направления распространения волны (в отличие

от терминологии, принятой в оптике, где отсчет направления вращения ведется при наблюдении навстречу световому лучу).

Можно показать, что любое состояние поляризации представляется как суперпозиция двух базисных состояний. Например, линейно поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух базисных (независимых) линейно поляризованных или двух базисных волн поляризованных по левому и правому кругу. Выбор базисных состояний произволен и определяется из соображений удобства. Например, он может быть обусловлен поляризационными характеристиками устройств, с помощью которых поляризованная волна создается или регистрируется. Такие устройства называются **поляризаторами или анализаторами**, и они пропускают через себя только проекцию состояния поляризации волны на соответствующее базисное состояние. Например, поляризатор, называемый **призмой Николя** (или просто **николь**), пропускает волну, плоскость поляризации которой параллельна некоторой плоскости призмы, называемой **плоскостью поляризатора**. При прохождении через такое устройство волны с другой плоскостью поляризации пропускается только проекция ее вектора  $\vec{E}$  на плоскость поляризатора (рис. 2.3):

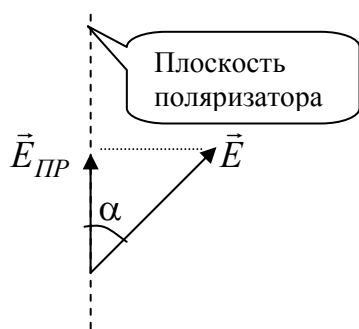


Рис. 2.3. Поляризатор пропускает проекцию вектора  $\vec{E}$  на плоскость поляризатора.

$$E_{IP} = E \cdot \cos \alpha, \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  — угол между плоскостью поляризации падающей волны и плоскостью поляризатора. Тогда, с учетом формулы (1.8), для интенсивности прошедшей поляризатор волны  $I_{IP}$  можно записать **закон Малюса**

$$I_{IP} = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (2.2)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающей линейно поляризованной волны.

Другие явления, связанные с явлением поляризации, описаны в рекомендуемой литературе (двойное лучепреломление, вращение плоскости поляризации, поляризация при отражении и преломлении).

## Литература

1. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. — М.: Наука, 1989. Гл. 14, п.п. 98-101.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1990. Гл. 25, п.п. 190-196.

### 3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

#### Основные теоретические сведения

Наложение согласованных волновых процессов при определенных условиях приводит к возникновению **явления интерференции** — устойчивого во времени пространственного распределения амплитуд колебаний суммарного поля. Основным условием наблюдения интерференции волн является их **когерентность** — постоянство во времени разности фаз складываемых волн в области регистрации. Заметим, что эта разность может меняться (и меняется) при переходе от одной точки пространства к другой. В идеализированном случае условие когерентности выполняется при одинаковых частотах складываемых гармонических волн. Причем наибольший контраст интерференционной картины наблюдается при сложении волн одинаковой линейной поляризации.

При решении задач на интерференцию электромагнитных волн необходимо помнить, что принцип суперпозиции справедлив лишь для ненаблюдаемого в большинстве случаев вектора напряженности (нерегистрируемого с помощью приборов вследствие высокой частоты колебаний)

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (3.1)$$

Реально же наблюдается интенсивность результирующей волны, которая определяется посредством усреднения квадрата результирующего вектора напряженности по формуле (1.8) или

$$I \sim \langle E^2 \rangle, \quad (3.2)$$

и для нее при интерференции принцип суперпозиции нарушается. Поэтому при решении задачи на интерференцию электромагнитных волн необходимо сначала по формуле (3.1) найти выражение для результирующего вектора напряженности, а затем определить пространственное распределение интенсивности излучения. Как было отмечено ранее, наибольший интерес представляют бегущие плоские гармонические волны.

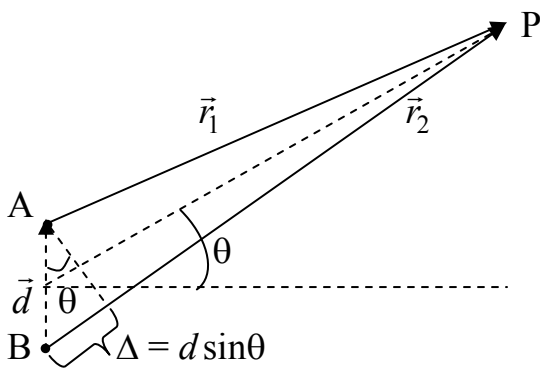


Рис. 3.1. Излучение двух источников.

При сложении их векторов напряженности можно использовать как тригонометрическую (см. (1.1)) так и экспоненциальную формы записи. Первая чаще используется при расчете интерференционной картины от двух источников. Например, если два источника А и В (рис. 3.1), находящиеся на расстоянии  $d$  друг от друга, излучают когерентные одинаково поляризованные волны, уравнения которых в окрестностях некоторой точки регистрации Р имеют вид

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_{01}) \text{ и } E_2 = E_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_{02}),$$

то уравнение результирующей волны определяется как сумма

$$E = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \varphi_{01}) + E_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_{02}).$$

После возведения этого соотношения в квадрат и усреднения, с учетом пропорциональности (3.2), можно получить формулу для расчета интенсивности результирующей волны в точке Р

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) + (\varphi_{01} - \varphi_{02})], \quad (3.3)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — интенсивности излучения в точке наблюдения при работе источников по отдельности. Учитывая, что векторы  $\vec{k}_i$  и  $\vec{r}_i$  сонаправлены и волновые числа когерентных волн одинаковы, разность  $\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \vec{r}_1$  можно преобразовать к виду  $k_2 r_2 - k_1 r_1 = k(r_2 - r_1) = k\Delta$ . Величина  $\Delta$  является разностью путей волн. Часто ее называют оптической разностью хода лучей и, в общем случае, она зависит от свойств среды, в которой распространяется волна. Ниже мы рассмотрим распространение волн в вакууме или в воздухе, что позволяет не учитывать этой зависимости. Из свойств косинуса вытекает, что  $I$  в (3.3) принимает максимальное значение, когда косинус равен +1. Для этого должно выполняться условие

$$k\Delta + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = 2n\pi, \quad \text{где } n = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.4)$$

которое называется **условием максимумов**. Соответственно **условием минимумов** является соотношение

$$k\Delta + (\varphi_{01} - \varphi_{02}) = (2n + 1)\pi, \quad \text{где } n = (0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.5)$$

Напомним, что величина  $\Delta$  зависит от точки наблюдения. Поэтому в пространстве наблюдается чередование максимумов и минимумов, называемое интерференционной картиной. Часто при удаленной точке Р наблюдения интерференции ( $r_i \gg d$ ) можно считать, что  $\vec{r}_1 \uparrow \vec{r}_2$  и  $\Delta = d \cdot \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол направления на точку наблюдения (рис. 3.1). Тогда в случае равенства начальных фаз **условие максимумов** при интерференции от двух источников запишется в виде

$$d \cdot \sin \theta = n\lambda \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

При рассмотрении интерференционной картины от многих источников удобно складывать уравнения бегущих волн в экспоненциальной форме. Если точка регистрации Р существенно удалена от области расположения когерентных источников ( $r_i \gg d$ ), то волны можно считать плоскими, все  $\vec{r}_i$  параллельными, а волновые векторы складываемых волн одинаковыми ( $\vec{k}_i \equiv \vec{k}$ ). Кроме того, при суммировании удобно представить вектор расстояния через сумму  $\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{\Delta}_i$ , где  $\vec{r}$  — вектор расстояния от одного из излучателей до точки наблюдения (или от некоторой средней точки между излучателями),  $\vec{\Delta}_i$  — вектор разности между  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}$ . Например, при расположении излучателей в цепочку на одинаковых расстояниях  $d$  друг от друга (рис. 3.2)  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\Delta}_2$ ,  $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + 2\vec{\Delta}_2$ ,  $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 + 3\vec{\Delta}_2$  и т.д. Тогда сумму волн в точке Р можно представить в виде

$$\hat{E} = \sum_i \vec{E}_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_i + \varphi_i)} = \left[ \sum_i \vec{E}_{0i} e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{\Delta}_i + \varphi_i)} \right] \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (3.7)$$

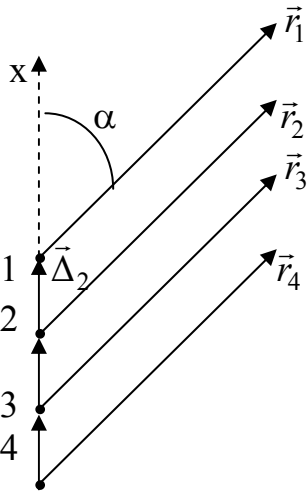


Рис. 3.2. Источники волн расположены в цепочку.

где  $\hat{E}$  — комплексная форма записи вектора напряженности результирующего поля ( $\vec{E} = \text{Re} \hat{E}$ ). Выражение, стоящее в квадратных скобках является его комплексной амплитудой. Для определения интенсивности результирующей волны необходимо эту амплитуду умножить на комплексно сопряженное значение и использовать пропорциональность (3.2). Во многих конкретных случаях (и во всех предложенных ниже задачах) выражение, стоящее в квадратных скобках можно существенно упростить, если использовать формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi .$$

Тогда 
$$e^0 = 1, \quad e^{\pm i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i. \quad (3.8)$$

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. — М.: Наука, 1989. Гл. 12, п.п. 84-89.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1990. Гл. 22, п.п. 170-175.

## 4. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

### Основные теоретические сведения

В этой теме **дифракция** рассматривается в узком смысле как огибание волнами препятствий при условии, что длина волны  $\lambda$  сопоставима с характерным размером препятствия ( $\lambda \sim d$ ). Для объяснения ее закономерностей используется **принцип Гюйгенса-Френеля**, согласно которому каждый элемент волновой поверхности служит источником вторичных когерентных волн, а результирующее колебание в некоторой точке Р является суперпозицией колебаний, дошедших до этой точки от вторичных источников.

Волновые поверхности

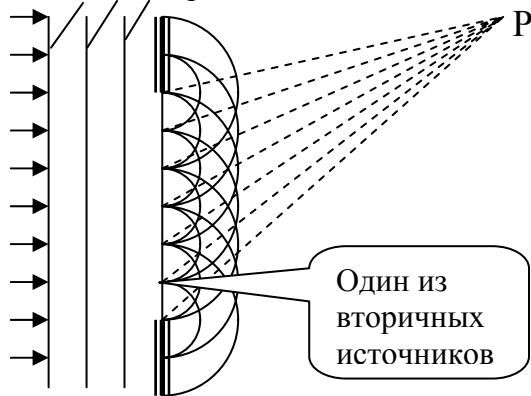


Рис. 4.1. К принципу Гюйгенса-Френеля в приближении Кирхгофа.

Характер дифракционной картины за препятствием анализируется в **приближении Кирхгофа** — за экраном с отверстием или со щелью поле равно нулю всюду на неосвещенной поверхности экрана за исключением отверстия или щели. Внутри отверстия или щели оно такое же, как если бы экран отсутствовал (рис. 4.1). В зависимости от расстояний от источника волн  $S$  до преграды  $a$ , от преграды — до точки наблюдения  $b$  и от длины волны  $\lambda$  различают два характерных случая дифракции волн: в параллельных лучах (**дифракцию Фраунгофера**) и в непараллельных лучах (**дифракцию Френеля**).

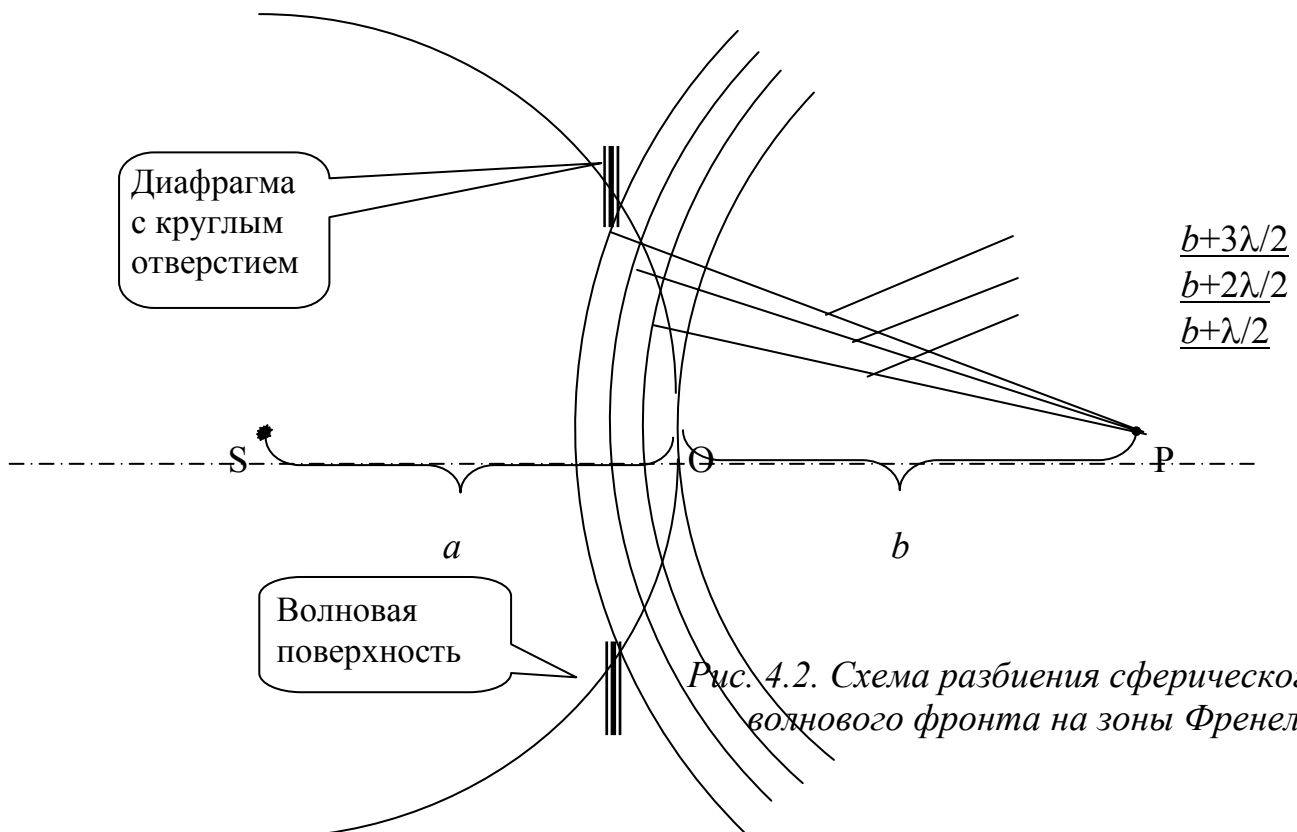
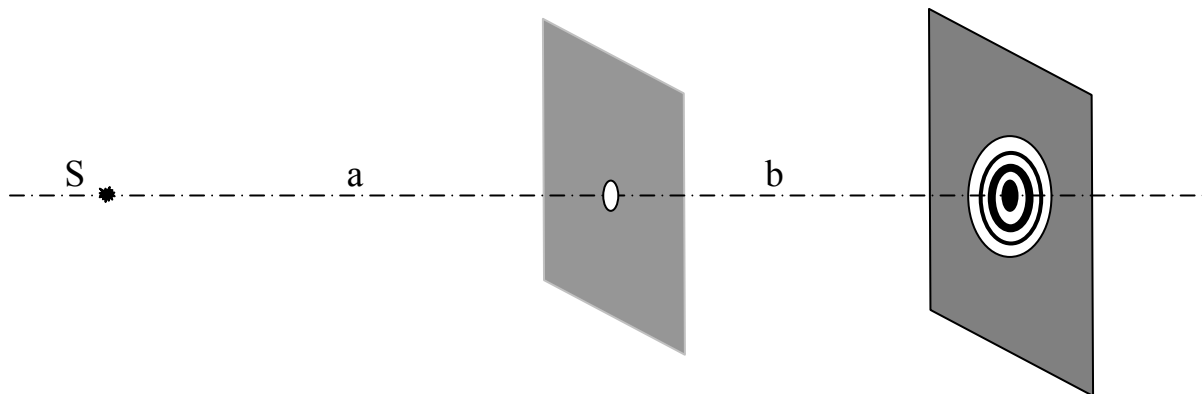


Рис. 4.2. Схема разбиения сферического волнового фронта на зоны Френеля.



Доступное для анализа выражение для амплитуды результирующей волны в большинстве случаев получить трудно. Френелю удалось разработать нестрогие, но простые и наглядные методы расчета дифракционной картины. Для этого он разбил волновую поверхность в области препятствия на полуволновые зоны — **зоны Френеля**. Например, при дифракции Френеля на круглом отверстии необходимо провести сферическую волновую поверхность, касающуюся краев отверстия (*рис. 4.2*). Затем строятся концентрические сферы с центром в точке наблюдения Р, находящейся на оси симметрии. Линии пересечения этих сфер с выбранной волновой поверхностью создают на ней систему кольцевых зон. Радиусы сфер равны  $b$ ,  $b + \frac{\lambda}{2}$ ,  $b + 2\frac{\lambda}{2}$ , ... . Соответственно расстояние от внутреннего края любой кольцевой зоны до точки Р меньше расстояния от внешнего края до этой же точки на половину длины волны. Поэтому излучения, приходящие в точку Р от двух аналогичных точек соседних зон (отстоящих на одинаковые расстояния от внутреннего края своей зоны) находятся в противофазе. Площади соседних зон приблизительно одинаковы. Тогда излучения каждой пары соседних зон будут гасить друг друга и при четном количестве открытых зон Френеля в точке Р будет минимум интенсивности или темное пятно. Соответственно при нечетном числе открытых отверстий зон излучение от одной из зон останется не скомпенсированным и в точке Р будет максимум интенсивности или светлое пятно. Если в точке Р поместить экран, то на нем будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся концентрических темных и светлых колец (*рис. 4.3*).



*Рис. 4.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии.*

Радиусы внешних границ зон Френеля с номером  $m$  определяются по формулам:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{a \cdot b}{a + b}} m \lambda \quad \text{— при сферическом фронте,} \quad (4.1)$$

$$\rho_m = \sqrt{b m \lambda} \quad \text{— при плоском фронте падающей на отверстие волны.} \quad (4.2)$$

Аналогичное разбиение волнового фронта на полуволновые зоны можно произвести и при дифракции Фраунгофера на длинной узкой щели (*рис. 4.4*). Но в этом случае несложно и точно просуммировать поле всех вторичных ис-

точников и получить аналитическое решение, позволяющее рассчитывать интенсивность поля в любой точке дифракционной картины

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k \cdot b \cdot \sin \varphi\right)}{\left(\frac{1}{2}k \cdot b \cdot \sin \varphi\right)^2}, \quad (4.3)$$

где  $I_0$  — интенсивность в центре дифракционной картины (при  $\varphi = 0$ ),  $b$  — ширина щели. Анализ этой формулы позволяет определить условие минимумов

$$b \cdot \sin \varphi = n\lambda \quad (\text{при } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (4.4)$$

Это выражение согласуется с выводами зонного метода (рис. 4.4б). Оно соответствует четному количеству зон Френеля на ширине щели (четное  $m$  на рис. 4.4б).

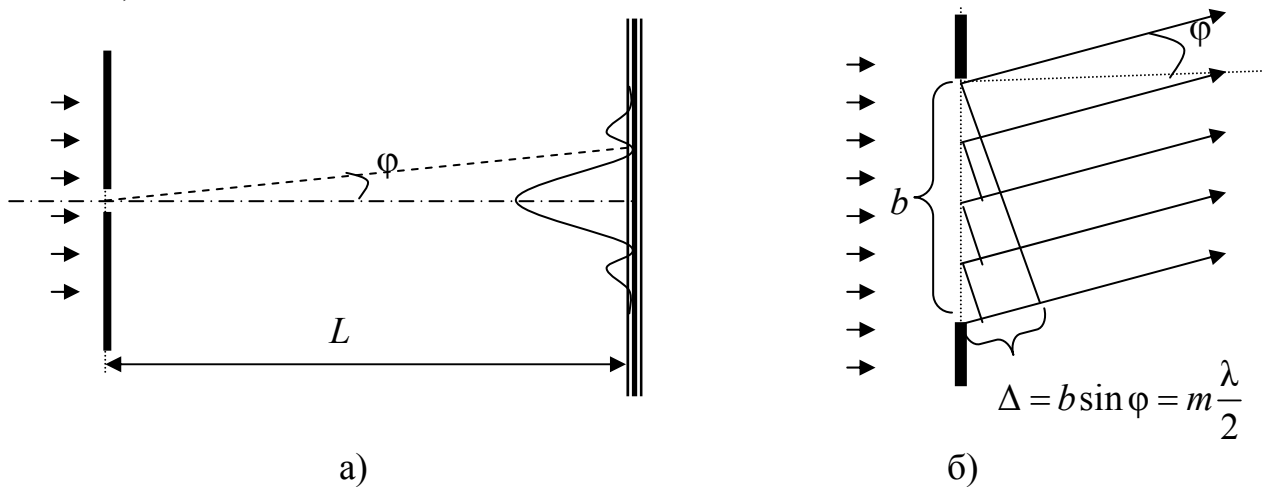


Рис. 4.4. Дифракция Фраунгофера ( $L\lambda \gg b^2$ ) на узкой щели шириной  $b$ :  
 а) общая схема опыта,  
 б) схема разбиения ширины щели на зоны Френеля.

Большой интерес для практической деятельности представляет дифракция Фраунгофера на системе узких параллельных щелей, находящихся в одной плоскости на одинаковых расстояниях друг от друга (**дифракционная решетка**). Характер дифракционной картины на удаленном от решетки экране показан на [рис. 4.5](#) и определяется формулой

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}k \cdot b \cdot \sin \varphi\right)}{\left(\frac{1}{2}k \cdot b \cdot \sin \varphi\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}k \cdot d \cdot \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}k \cdot d \cdot \sin \varphi\right)}, \quad (4.5)$$

где  $N$  — число щелей,  $d$  — период решетки (расстояние между соседними щелями),  $I_0$  — интенсивность в центре дифракционной картины за одной щелью. Излучения от соседних щелей когерентны, так как порождены одной волной. В некоторых направлениях, для которых соблюдается условие

$$d \cdot \sin \varphi = m\lambda \quad (\text{при } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \quad (4.6)$$

они усиливают друг друга, создавая **максимумы** интенсивности на экране, называемые **главными**. Число  $m$  называется **порядком** максимума.

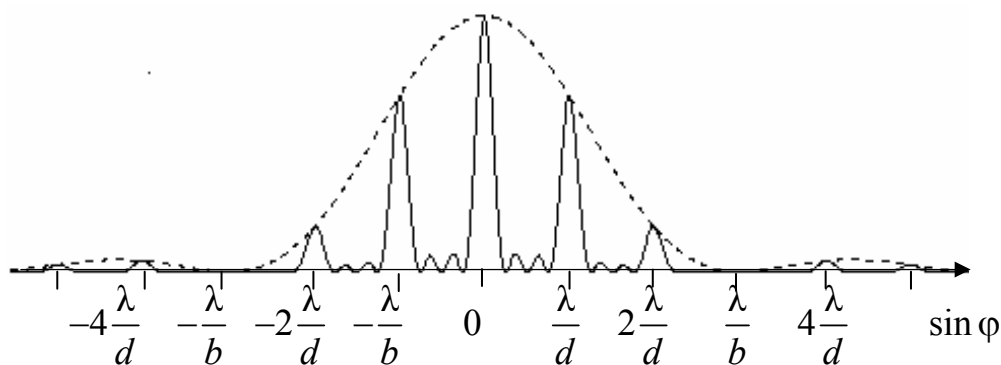


Рис. 4.5. Распределение интенсивности на экране при дифракции Фраунгофера на решетке с  $N = 4$  щелями при  $d : b = 3 : 1$ . Пунктирная линия отражает характер дифракционной картины от одной щели (но ее амплитуда должна быть в  $N^2$  раз меньше, чем амплитуда центрального максимума).

Зависимость условия максимумов от длины волны позволяет использовать дифракционную решетку во многих практических приложениях (спектральный анализ и т.п.). Дополнительная информация по особенностям дифракционной картины приведена в рекомендуемой литературе.

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М.: Наука, 1989. Гл. 13, п.п. 90-97.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1990. Гл. 23, п.п. 176-184.

## 5. ГРУППЫ ВОЛН. ДИСПЕРСИЯ

### Основные теоретические сведения

Как уже отмечалось, любую «разумную» волну можно представить как суперпозицию определенного набора гармонических волн. И наоборот, складывая необходимое число монохроматических волн с различными частотами, можно получить волну любой формы. Математическим обоснованием такой возможности является Фурье-анализ. В частности периодическая функция  $F(t)$  с периодом  $T$ , которой может являться сигнал излучателя волн, представляется в виде **ряда Фурье**

$$F(t) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(m\omega_1 \cdot t) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \cos(m\omega_1 \cdot t), \quad (5.1)$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt$ ,

$$B_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \cos(m\omega_1 t) dt, \quad A_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \sin(m\omega_1 t) dt.$$

На рис. 5.1 показана пилообразная функция, образованная с помощью суммы девяти синусоидальных функций  $F(t) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^9 \frac{1}{m \cdot \pi} \cdot \sin(m\omega_1 \cdot t)$  и являющаяся частичной суммой ряда Фурье для функции  $f(t) = t/T$  при  $t \in [0, T]$ .



Рис. 5.1. Представление пилообразной функции в виде суммы девяти синусоидальных.

Если же излучаемый сигнал  $\psi(t)$  имеет форму отдельного импульса ограниченной длительности, то его можно представить через **интеграл Фурье**

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad (5.2)$$

где коэффициенты  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  равны

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin(\omega t) dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos(\omega t) dt.$$

На рис. 5.2 показан сигнал (волновой пакет), полученный суммированием бесконечно большого числа монохроматических волн, частоты которых лежат в узком интервале  $\Delta\omega$ .

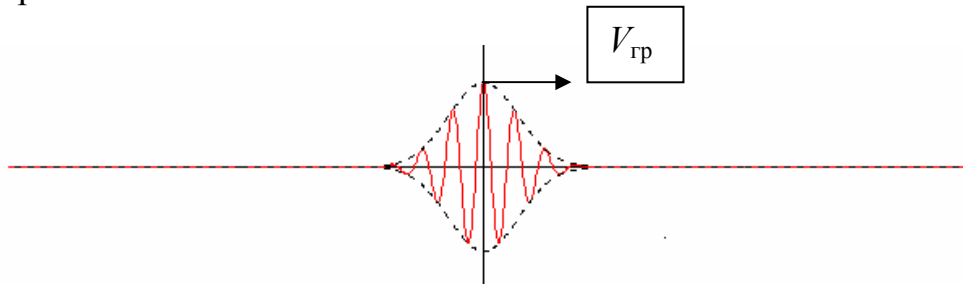


Рис. 5.2. Типичный волновой пакет, полученный суммированием бесконечно большого числа монохроматических волн, частоты которых лежат в узком интервале  $\Delta\omega$ .

Каждая гармоническая составляющая суперпозиций (5.1) и (5.2) определяет свою собственную гармоническую бегущую волну с волновым числом  $k_m = k_m(\omega_m)$ . Результирующая волна  $F(t,x)$  или  $\psi(t,x)$  является суперпозицией этих гармонических волн

$$F(t,x) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \sin(m\omega_1 \cdot t - k_m x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \cos(m\omega_1 \cdot t - k_m x), \quad (5.3)$$

$$\psi(t,x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t - k(\omega)x) d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x) d\omega. \quad (5.4)$$

В результате взаимодействия электромагнитной волны с зарядами вещества соотношение между волновым числом и циклической частотой  $k = k(\omega)$  принимает вид, отличный от того, который был в вакууме.

$$\text{В вакууме } k = \frac{\omega}{c}, \text{ в веществе без поглощения } k = \frac{\omega}{c} n(\omega), \quad (5.5)$$

где  $n(\omega)$  — показатель преломления вещества, зависящий от частоты. В результате каждая гармоническая составляющая бегущей волны в веществе распространяется со своей собственной **фазовой скоростью**, зависящей от частоты волны

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{n(\omega)}. \quad (5.6)$$

Это явление и называется **дисперсией**, а уравнение (5.5) **дисперсионным соотношением** или **законом дисперсии**. Вследствие дисперсии форма сигнала  $F(t,x)$  или  $\psi(t,x)$  не остается постоянной по мере прохождения слоя вещества. Скорость распространения волнового пакета (скорость передачи энергии, информации) называется **групповой скоростью** и определяется уравнением

$$V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5.7)$$

При слабой дисперсии (когда форма сигнала меняется незначительно) ее можно сопоставить со скоростью перемещения максимума огибающей сигнал

пунктирной линии на [рис. 5.2](#). Необходимо отметить особо, что при наличии дисперсии групповая скорость становится отличной от фазовой скорости, оставаясь меньше скорости света.

Наряду с изменением формы волновых пакетов при распространении волн в веществе наблюдается их поглощение, преломление и отражение на границах сред, рассеяние и т.п. Подробнее о дисперсии и этих явлениях написано в рекомендуемой литературе.

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М.: Наука, 1989. Гл. 11, п. 79, гл. 15, п.п. 102-103.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1990. Гл. 24, п.п. 185-187.

### Пример 1

Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме в соответствии с уравнениями (1.1), где  $\vec{E}_0 = \{30; 30; 0\}$  мВ/м, вектор  $\vec{B}_0$  сонаправлен с некоторым вектором  $\vec{a} = \{-1; 1; 0\}$ ,  $\omega = 3 \cdot 10^7$  рад/с. Найти:

- направление распространения волны,
- волновое число,
- максимальное значение плотности энергии волны в произвольной точке.

### Решение

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{k}$  составляют правовинтовую тройку (рис. 1.1). Это значит, что вектор  $\vec{k}$  сонаправлен с векторным произведением  $\vec{E} \times \vec{B}$ . Воспользовавшись этим свойством, определим направление вектора  $\vec{k}$ , которое совпадает с направлением распространения электромагнитной волны

$$[\vec{E} \times \vec{B}] \uparrow \uparrow [\vec{E}_0 \times \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_{x0} & E_{y0} & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_z (E_{x0} \cdot a_y - E_{y0} \cdot a_x) = \vec{e}_z (30 + 30) \text{ мВ/м} = 60 \cdot \vec{e}_z \text{ мВ/м}.$$

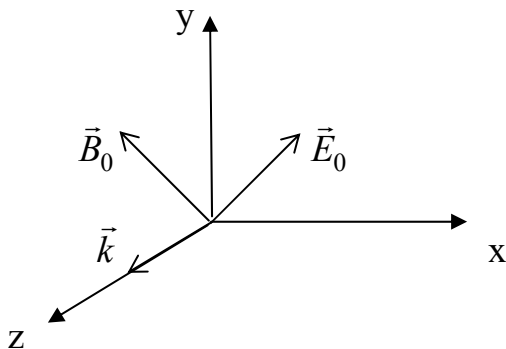


Рис. 1.2. К примеру 1.

Полученный результат свидетельствует о том, что волна распространяется в направлении Oz (рис. 1.2). Численное значение волнового числа определим по формуле (1.2)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \text{ м}^{-1} = 0,1 \text{ м}^{-1}.$$

Максимальное значение плотности энергии электромагнитного поля в любой точке пространства определяется по формуле (1.5) при условии  $E^2 = E_0^2$  и  $B^2 = B_0^2$ . Тогда

$$w_{\max} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \epsilon_0 E_0^2 = \epsilon_0 (E_{0x}^2 + E_{0y}^2).$$

Произведем вычисления:

$$w_{\max} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (30^2 + 30^2) \cdot 10^{-6} \text{ Дж/м}^3 = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/м}^3.$$

Ответ: а) волна распространяется в направлении оси Oz,

б)  $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ ,

в)  $w_{\max} = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/м}^3$ .

## Пример 2

Космическая станция зарегистрировала электромагнитное излучение удаленного объекта, которое в принятой на этой станции системе отсчета можно описать в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - kx),$$

где  $\nu = 15$  кГц,  $\vec{E}_0 = \{0; 1; 0\}$  мВ/м.

1. Записать закон изменения вектора  $\vec{E}$  в точке А, имеющей координаты  $(10^5; 10; 10^2)$  м, где расположена другая станция, неподвижная относительно первой.

2. Найти величину вектора  $\vec{E}$  в точке А в момент времени  $t = 1$  мс.

### Решение

Уравнение  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - kx)$  описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ох. Ее волновое число можно рассчитать по формуле (1.2)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \text{ м}^{-1} = \pi \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Тогда величина произведения  $k \cdot x_A$  в точке расположения станции А равна  $\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 = 10\pi$ . Таким образом разность фаз электромагнитной волны для этих станций равна  $10\pi$ , а закон изменения вектора  $\vec{E}$  в точке расположения второй станции имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu \cdot t - 10\pi) = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu \cdot t).$$

Подставив в него заданное значение времени, найдем величину вектора напряженности

$$E = E_0 \cos(2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}) = E_0 \cos(30\pi) = E_0 = 1 \text{ мВ/м}.$$

## Пример 3

Определить состояние поляризации радиоволны, являющейся наложением двух плоских линейно поляризованных электромагнитных волн вида

$$\vec{E}_1 = E_{10} \cdot \vec{e}_y \cos(2\pi\nu t - k \cdot x),$$

$$\vec{E}_2 = E_{20} \cdot \vec{e}_z \cos(2\pi\nu t - k \cdot x + \varphi),$$

где амплитуды связаны соотношением  $E_{10} = 2E_{20}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\nu = 1$  МГц.



## Решение

Поляризация плоской волны в вакууме не зависит от выбора системы координат. Поэтому, для простоты рассмотрим поведение вектора  $\vec{E}$  результирующей волны в плоскости  $Oyz$  при  $x = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} E_{1y} = E_{10} \cdot \cos(2\pi vt), \\ E_{2z} = E_{20} \cdot \cos\left(2\pi vt + \frac{\pi}{2}\right) = -E_{20} \cdot \sin(2\pi vt). \end{cases}$$

Эти формулы задают в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется конец вектора  $\vec{E} = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2z}$  в плоскости  $Oyz$ . Для получения уравнения траектории в неявном виде сделаем преобразования:

$$\begin{cases} \left(\frac{E_{1y}}{E_{10}}\right)^2 = \cos^2(2\pi vt), \\ \left(\frac{E_{2z}}{E_{20}}\right)^2 = \sin^2(2\pi vt). \end{cases}$$

Сумма правых частей этих уравнений равна 1. Поэтому, сложив уравнения, получим каноническое уравнение эллипса с полуосями  $E_{10}$  и  $E_{20}$

$$\left(\frac{E_{1y}}{E_{10}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2z}}{E_{20}}\right)^2 = 1.$$

Полученный результат свидетельствует об эллиптической поляризации результирующей волны, но не отвечает на вопрос о направлении вращения вектора  $\vec{E}$ . Для его определения воспользуемся методом геометрического сложения векторов для нескольких последовательных значений времени  $t_n$ . Для удобства выберем  $t_n = n \frac{T}{12}$ , где  $T = \frac{1}{\nu}$  — период волны,  $n = 1, 2, 3, \dots, 8$ , и составим таблицу данных с учетом  $E_{10} = 2E_{20}$  ([таблица 2.1.](#)).

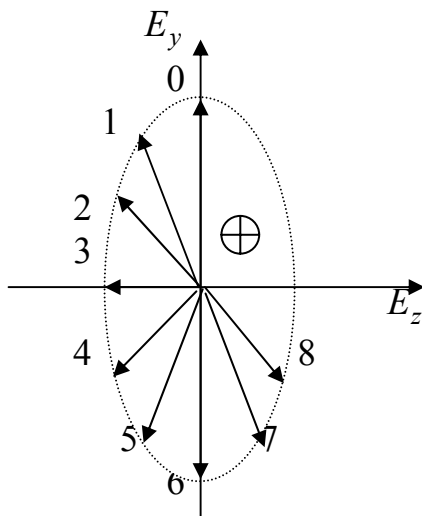


Рис. 2.4. Векторы  $\vec{E}_n$  результирующей волны в точке  $x = 0$ .

Откладывая на соответствующих осях приведенные в таблице значения  $E_{1y}$  и  $E_{2z}$ , построим векторы  $\vec{E}_n$  результирующей волны в точке  $x = 0$  (рис. 2.4). Из последовательности их расположения следует, что волна является левовинтовой эллиптически поляризованной.

Таблица 2.1. Данные к примеру 3.

$n$	$2\pi\nu t_n$	$E_{1y} = 2E_{20} \cos(2\pi\nu t_n)$	$E_{2z} = -E_{20} \sin(2\pi\nu t_n)$
0	0	2	0
1	$\frac{1}{6}\pi$	$\sqrt{3} \approx 1,73$	-0,5
2	$\frac{2}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$
3	$\frac{3}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi$	0	-1
4	$\frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$
5	$\frac{5}{6}\pi$	$-\sqrt{3} \approx -1,73$	-0,5
6	$\frac{6}{6}\pi = \pi$	-2	0
7	$\frac{7}{6}\pi$	$-\sqrt{3} \approx -1,73$	0,5
8	$\frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$

#### Пример 4

При прохождении естественного света через систему из двух поляризаторов его интенсивность уменьшилась в два раза. Когда между поляризаторами на пути луча поместили кварцевую пластинку, интенсивность уменьшилась еще в два раза. На какой угол повернулась плоскость поляризации луча в кварцевой пластине? Поглощением пренебречь.

Решение

Несмотря на хаотичность ориентации вектора  $\vec{E}$  в естественном свете, в каждое мгновение он может быть представлен через сумму двух векторов, один из которых лежит в плоскости первого поляризатора, а другой перпендикулярен ей. Соответственно первая проекция пройдет через этот поляризатор, а вторая нет. Из равновероятности различных направлений вектора  $\vec{E}$  в естественном свете следует, что интенсивность прошедшего первый поляризатор света равна интенсивности задержанной части. Следовательно, уже после первого поляризатора интенсивность уменьшилась в два раза  $I_1 = \frac{I_0}{2}$ . Тогда в начальном расположении второй поляризатор не изменил интенсивность света, что указывает на параллельность плоскостей поляризаторов (рис. 2.5).

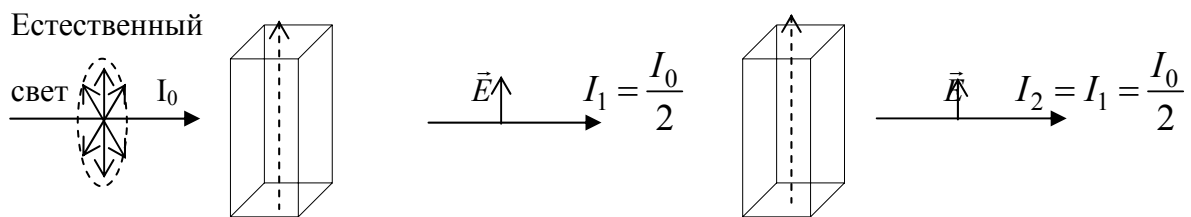


Рис. 2.5. Прохождение естественного света через систему из двух поляризаторов с параллельными плоскостями.

Во второй ситуации (рис. 2.6.) после поворота плоскости поляризации света кварцевой пластиной на угол  $\alpha$  второй поляризатор пропустит только проекцию повернутого вектора  $\vec{E}$  на свою плоскость (см. формулу (2.1)). Закон Малюса (2.2) в этом случае можно записать в виде

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha.$$

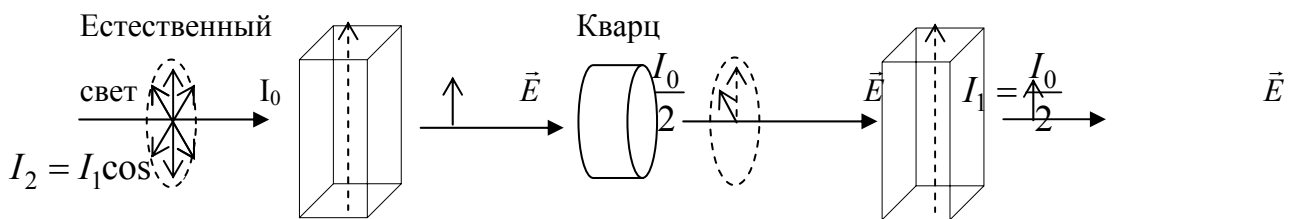


Рис. 2.6. Прохождение естественного света через систему из двух поляризаторов с параллельными плоскостями и кварцевой пластинки между ними.

По условию  $I_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{I_0}{4}$ . Тогда  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$  или  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Этому результату удовлетворяют значения

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} \pm n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

### Пример 5

Плоская монохроматическая световая волна (длина волны  $\lambda = 0,5$  мкм) падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстояние  $d = 2,5$  мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии  $L = 1$  м, образуется система интерференционных полос. Определить ширину интерференционных полос.

### Решение

В данной задаче узкие щели можно рассматривать как два вторичных линейных источника когерентных волн, интерферирующих на экране. Ширина интерференционной полосы  $\Delta x$  равна расстоянию между двумя последовательными минимумами на экране (или двумя последовательными максимумами)  $\Delta x = x_{n+1} - x_n$  (рис. 3.3). С учетом свойств прямоугольных треугольников можно записать

$$x_{n+1} = L \cdot \operatorname{tg}\theta_{n+1} \quad \text{и} \quad x_n = L \cdot \operatorname{tg}\theta_n.$$

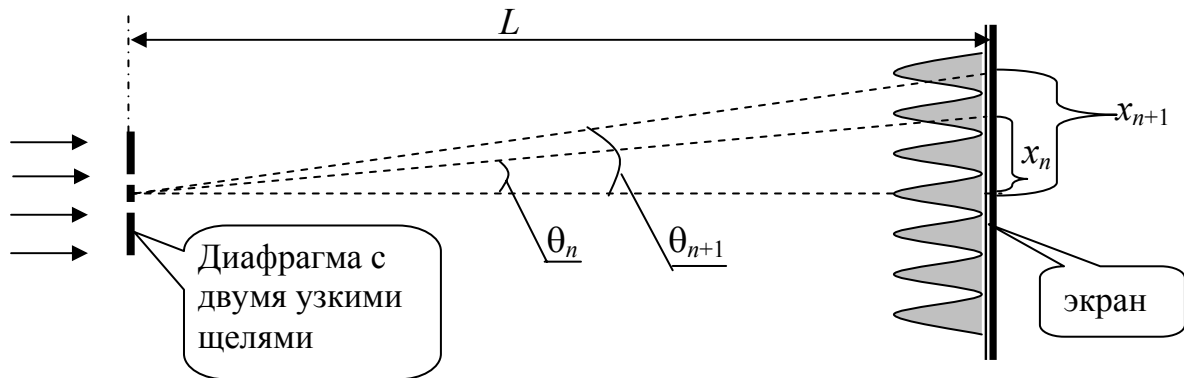


Рис. 3.3. Интерференция света после прохождения двух узких щелей.

Значения соответствующих углов входят в формулы для условий минимумов

$$d \cdot \sin\theta_{n+1} = [2(n+1) + 1] \frac{\lambda}{2} \quad \text{и} \quad d \cdot \sin\theta_n = (2n+1) \frac{\lambda}{2}.$$

По условию эксперимента  $L \gg d$  и тогда выполняется приближенное равенство для малых углов  $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta$ . С учетом этого

$$\begin{aligned} \Delta x &= L(\operatorname{tg}\theta_{n+1} - \operatorname{tg}\theta_n) \approx L(\sin\theta_{n+1} - \sin\theta_n) = \\ &= L[2(n+1) + 1 - (2n+1)] \frac{\lambda}{2d} = \frac{L\lambda}{d}. \end{aligned}$$

Отметим, что ширина не зависит от номера максимума. Выполним вычисления

$$\Delta x = \frac{1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 0,2 \text{ мм}.$$

### Пример 6

Четыре антенны расположены в линию и находятся на одинаковых расстояниях  $d = 5$  м друг от друга (рис. 3.2.). Антенны излучают радиоволны с одинаковой линейной поляризацией на частоте  $\nu = 3 \cdot 10^7$  Гц и сфазированы так, что  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ ,  $\varphi_3 = 2\pi$ ,  $\varphi_4 = 3\pi$ . Определить интенсивность излучения, принимаемого в удаленных точках в направлениях  $a$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) и  $b$  ( $\alpha = 60^\circ$ ), если известно, что при работе каждой из антенн в отдельности интенсивность излучения в точках регистрации равна соответственно  $I_1 = I_3 = I_0$ ,  $I_2 = I_4 = 4I_0$ , где  $I_0$  — некоторая единица интенсивности.

### Решение

Выберем систему координат с началом в точке расположения 1<sup>й</sup> антенны. Ось ОХ направим вдоль направления  $a$ . В удаленных точках наблюдения излучаемые волны можно считать плоскими. Запишем выражение (3.7) для комплексной результирующей амплитуды волны в направлении  $a$ . Учитывая одинаковую поляризацию волн знак вектора можно опустить

$$\hat{E}_a = E_{01}e^{i0} + E_{02}e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{\Delta} + \pi)} + E_{03}e^{i(-\vec{k} \cdot 2\vec{\Delta} + 2\pi)} + E_{04}e^{i(-\vec{k} \cdot 3\vec{\Delta} + 3\pi)},$$

где  $\vec{\Delta}$  — вектор расстояния между соседними антеннами (рис. 3.2.). Учитывая заданное соотношение между интенсивностями излучения отдельных антенн  $I_2 = I_4 = 4I_1 = 4I_3 = 4I_0$  и формулу (3.2) можно записать соотношение для амплитуд волн  $E_{02} = E_{04} = 2E_{01} = 2E_{03}$ . Кроме того, для рассматриваемого направления  $a$   $\vec{k} \cdot \vec{\Delta} = k \cdot d \cdot \cos 0$ , где  $d = 5$  м — расстояние между соседними антеннами,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$ . Тогда  $\vec{k} \cdot \vec{\Delta} = \frac{2\pi\nu}{c}d = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}5 = \pi$  и выражение для комплексной результирующей амплитуды волны в направлении  $a$  примет вид

$$\hat{E}_a = E_{01}[1 + 2e^{i(-\pi + \pi)} + e^{i(-2\pi + 2\pi)} + 2e^{i(-3\pi + 3\pi)}] = 6E_{01}.$$

Вновь учитывая соотношение (3.2), получим  $I_a = 36I_1 = 36I_0$ . Заметим, что простая арифметическая сумма интенсивностей волн равна 10.

При анализе результата сложения волн в направлении  $b$  необходимо учесть, что  $\vec{k} \cdot \vec{\Delta} = k \cdot d \cos \alpha = \frac{\pi}{2}$ . Тогда выражение для комплексной результирующей амплитуды волны в направлении  $b$  примет вид

$$\hat{E}_b = E_{01} \left[ 1 + 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)} + e^{i(-\pi + 2\pi)} + 2e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi + 3\pi\right)} \right] = E_{01}[1 + 2i - 1 - 2i] = 0.$$

Соответственно и интенсивность излучения в этом направлении равна нулю.

### Пример 7

Диафрагма с круглым отверстием расположена посередине между точечным источником монохроматического света ( $\lambda = 500$  нм) и экраном (рис. 4.3). Расстояние между источником и экраном  $L = 4$  м. При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец на экране будет наиболее темным?

### Решение

При дифракции Френеля на круглом отверстии в центре дифракционной картины на экране темное пятно наблюдается при четном числе открытых зон Френеля. Увеличение радиуса отверстия ведет к ослабеванию эффекта и в пределе дифракционная картина пропадает. Следовательно, наиболее темное пятно будет в том случае, если число открытых зон равно двум и радиус отверстия  $r$  совпадает с радиусом второй зоны Френеля. Используя формулу (4.1), при  $k = 2$ ,  $a + b = L$ ,  $a = b = L/2$  получим

$$r = \rho_2 = \sqrt{\frac{L^2/4}{L} k\lambda} = \sqrt{\frac{L\lambda}{2}}.$$

Выполним расчет  $r = \sqrt{\frac{4 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2}} \text{ м} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм}.$

### Пример 8

На дифракционную решетку, имеющую  $n = 500$  щелей на одном миллиметре ширины, нормально падает свет от разрядной трубки, наполненной гелием. Найти:

1. Наибольший порядок дифракционного максимума, который дает эта решетка для фиолетового участка спектра с длиной волны  $\lambda = 410$  нм.
2. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается синяя линия  $\lambda_c = 447$  нм спектра третьего порядка?

### Решение

1. Из формулы (4.6) следует, что наибольший порядок дифракционного максимума получается при максимальном значении синуса. Так как синус не может быть больше единицы, то должно выполняться неравенство

$$d \geq m\lambda \quad \text{или} \quad m \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Период решетки, как расстояние между соседними щелями, найдем из формулы  $d = \frac{1}{n}$ . Тогда  $m \leq \frac{1}{n \cdot \lambda}$ .

Подставив заданные значения, получим  $m \leq 4,88$ . Если учесть, что порядок максимума является целым числом, то  $m_{\max} = 4$ .

2. При наложении спектральных линий условие максимума выполняется для каждой из них

$$d \cdot \sin \varphi = 3\lambda_c \quad \text{и} \quad d \cdot \sin \varphi = 2\lambda_x.$$

Тогда  $3\lambda_c = 2\lambda_x$  и после расчета получаем  $\lambda_x = 670 \text{ нм}$ .

### Пример 9

Уравнение плоской электромагнитной волны в вакууме вблизи источника (при  $x = 0$ ) имеет вид  $E(t, x) = E_0 \sin(\omega_1 t) + 0,5 E_0 \sin(2\omega_1 t)$ , где  $\omega_1 = 3\pi \cdot 10^7 \text{ рад/с}$ . Методом графического сложения определить форму излучаемого сигнала  $E(t, 0)$  и пространственную форму волны в вакууме  $E(t_0, x)$  на отрезке от  $x_1 = 0$  до  $x_2 = 2\lambda$  в момент времени  $t_0$ , где  $\lambda$  — длина волны в вакууме гармонической компоненты с частотой  $\omega_1$ ,  $t_0 = 100T = 200\pi/\omega_1$ .

### Решение

Для удобства построения сделаем преобразование  $\omega_1 t = 2\pi \frac{t}{T}$ , где  $T$  — период первой компоненты. На [рисунке 5.3](#) пунктирными линиями построены графики каждой гармонической компоненты волны

$$\xi(t) = E_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad \text{и} \quad \psi(t) = 0,5 E_0 \sin\left(4\pi \frac{t}{T}\right).$$

Сплошной линией обозначен результат их сложения  $E(t)$  при  $x = 0$ .

При построении пространственной формы бегущей волны в момент времени  $t_0$  учтем, что  $\omega t_0 = \omega_1 100T = 200\pi$ . Тогда с учетом периодичности синуса уравнение волны примет вид

$$E(t_0, x) = E_0 \sin(200\pi - k_1 x) + 0,5 E_0 \sin(400\pi - k_2 x) = -E_0 \sin(k_1 x) - 0,5 E_0 \sin(k_2 x).$$

В вакууме волновые числа можно записать в виде

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c} = \frac{2\omega_1}{c} = \frac{4\pi}{\lambda},$$

где  $\lambda$  — длина волны первой компоненты. Соответственно перепишем и уравнение волны

$$E(t_0, x) = -E_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) - 0,5 E_0 \sin\left(4\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

Это уравнение аналогично уравнению для  $E(t)$ , но с противоположным знаком. Поэтому и пространственная форма волны ([рис. 5.4](#)) соответствует графику  $E(t)$  на [рис. 5.3](#). При этом необходимо принять во внимание, что правая часть пространственной формы соответствует более раннему сигналу (левой части графика  $E(t)$ ).

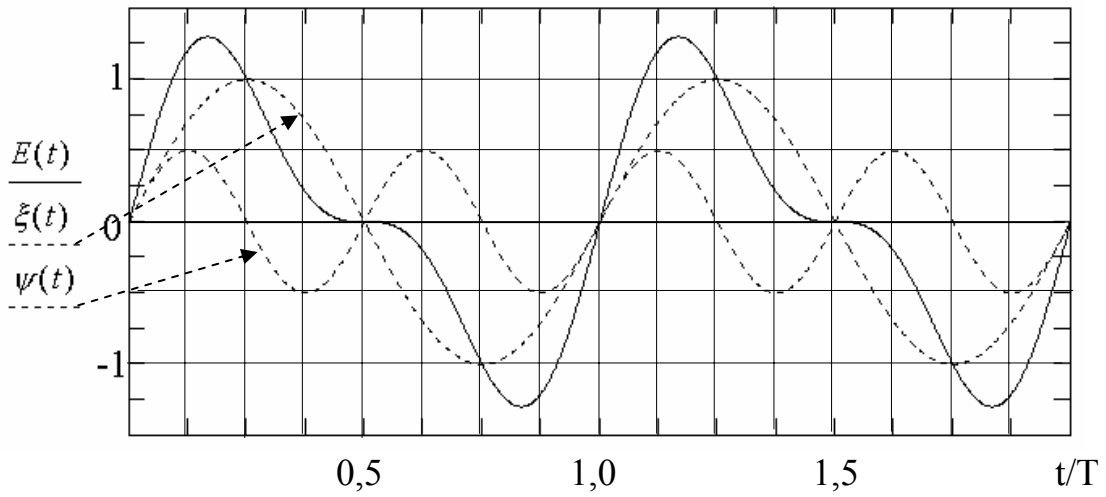


Рис. 5.3. Форма излучаемого сигнала  $E(t) = \xi(t) + \psi(t)$  при  $x = 0$ .

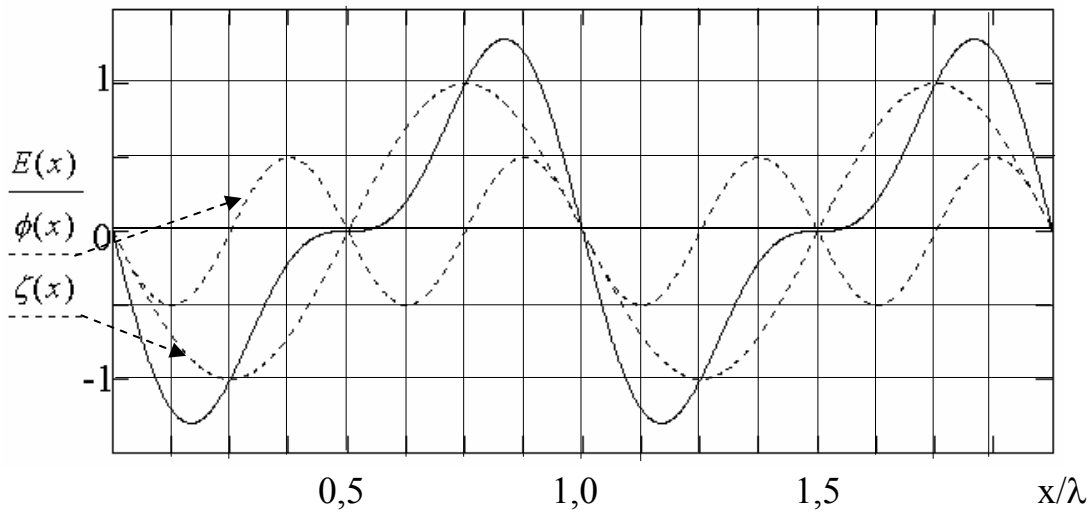


Рис. 5.4. Пространственная форма волны в вакууме  $E(x, t_0) = \zeta(x) + \phi(x)$ .

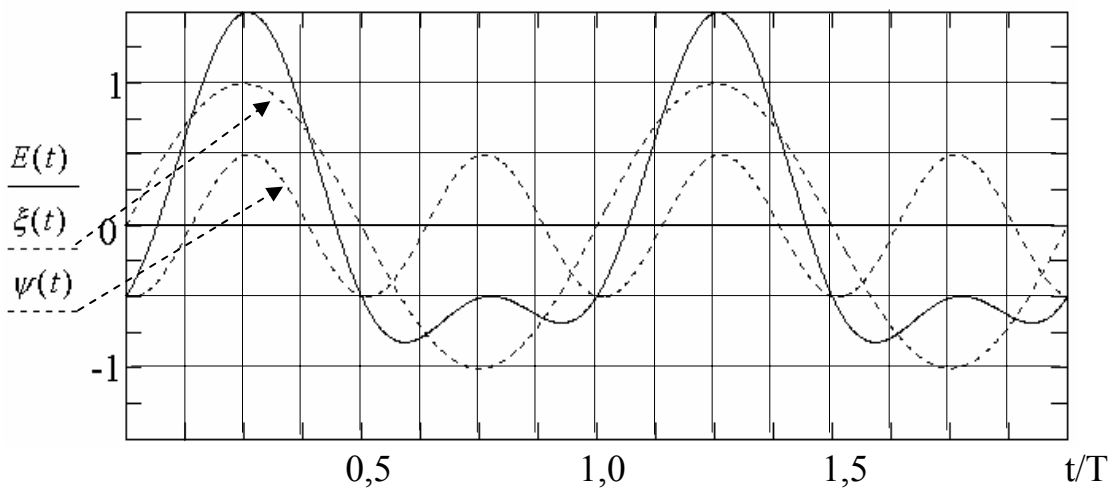


Рис. 5.5. Форма регистрируемого сигнала  $E(t) = \xi(t) + \psi(t)$  после прохождения слоя вещества толщиной  $L = 3\lambda_{CP}$ , ( $x = L$ ).



### Пример 10

Уравнение плоской электромагнитной волны в среде вблизи источника (при  $x = 0$ ) имеет вид  $E(t,x) = E_0 \sin(\omega_1 t) + 0,5E_0 \sin(2\omega_1 t)$ , где  $\omega_1 = 3\pi \cdot 10^7$  рад/с. Методом графического сложения определить форму сигнала  $E(t,L)$ , регистрируемого приемником, расположенным на расстоянии  $L = 3\lambda_{CP}$  в направлении распространения волны. Для удобства выполнить построение для отрезка времени от 0 до  $2T$ .  $T$  и  $\lambda_{CP}$  — период и длина волны в данной среде гармонической компоненты с частотой  $\omega_1$ . Принять, что показатель преломления среды зависит от частоты по формуле  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ , где  $\omega_0 = \pi \cdot 10^7$  рад/с — так называемая плазменная частота этой среды. Поглощением излучения пренебречь.

### Решение

Уравнение заданной бегущей волны можно записать в виде

$$E(t,x) = E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + 0,5E_0 \sin(2\omega_1 t - k_2 x).$$

С учетом формулы (5.5) волновое число второй компоненты можно представить в виде  $k_2 = \frac{\omega_2}{c} n_2 = \frac{2\omega_1}{c} n_2 = 2k_1 \frac{n_2}{n_1} = 2 \frac{2\pi}{\lambda_{CP}} \cdot \frac{n_2}{n_1}$ . Тогда уравнение волны примет вид

$$E(t,x) = E_0 \sin(\omega_1 t - 2\pi \frac{x}{\lambda_{CP}}) + 0,5E_0 \sin(2\omega_1 t - 2 \frac{n_2}{n_1} \cdot 2\pi \frac{x}{\lambda_{CP}}).$$

В точке расположения приемника  $x = L = 3\lambda_{CP}$ . Кроме того,  $\omega_1 t = 2\pi \frac{t}{T}$  и уравнение принимаемого сигнала запишется в виде

$$E(t,L) = E_0 \sin(2\pi \frac{t}{T} - 6\pi) + 0,5E_0 \sin(4\pi \frac{t}{T} - 12\pi \frac{n_2}{n_1}).$$

Перед его построением необходимо произвести расчет показателей преломления по заданной формуле:

$$n_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\pi \cdot 10^7)^2}{(3\pi \cdot 10^7)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \approx 0,943,$$

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\pi \cdot 10^7)^2}{(6\pi \cdot 10^7)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} \approx 0,986,$$

$$\text{и величины } 12\pi \frac{n_2}{n_1} = 12\pi \frac{0,986}{0,943} = 12,55\pi = 12\pi + 0,55\pi.$$

Заметим, что фазовые скорости обеих составляющих волны больше скорости света (см. формулу (5.6)). С учетом периодичности синуса уравнение принимаемого сигнала можно упростить

$$E(t,L) = E_0 \sin(2\pi \frac{t}{T}) + 0,5E_0 \sin(4\pi \frac{t}{T} - 0,55\pi) =$$

$$= E_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 0,5E_0 \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - 0,1375\right)$$

и построение выполнять в интервале времени от 0 до  $2T$ . При этом необходимо учесть, что в отличие от исходного сигнала аргумент у второго синуса изменился на  $-0,55\pi$ . Это означает, что вследствие различия фазовых скоростей составляющих сигнала на графике вторая составляющая сместится по оси абсцисс на 0,1375 вправо. Графическое сложение произведено на [рис. 5.5](#). Получилось, что по сравнению с исходной ([рис. 5.3](#)) форма сигнала существенно искажилась. Следовательно, в заданной среде сигнал с таким широким спектром для передачи информации использовать нельзя. Поэтому в радиотехнике, в отличие от рассмотренного случая, сигнал формируют с помощью суперпозиции сплошного спектра гармонических волн, частоты которых находятся в узком диапазоне. Это позволяет свести последствия дисперсии к минимуму.