

Задача 1

Для электрической схемы, изображенной на **рис.1.34**, по заданным сопротивлениям и ЭДС выполнить следующее:

- 1) составить систему уравнений, необходимых для определения токов по первому и второму законам Кирхгофа;
- 2) найти все токи, пользуясь методом контурных токов;
- 3) проверить правильность решения, применив метод узлового напряжения. Предварительно упростить схему, заменив треугольник сопротивлений R_4 , R_5 и R_6 эквивалентной звездой; Начертить расчетную схему с эквивалентной звездой и показать на ней токи;
- 4) определить ток в резисторе R_6 методом эквивалентного генератора;
- 5) определить показание вольтметра и составить баланс мощностей для заданной схемы;
- 6) построить в масштабе потенциальную диаграмму для внешнего контура.

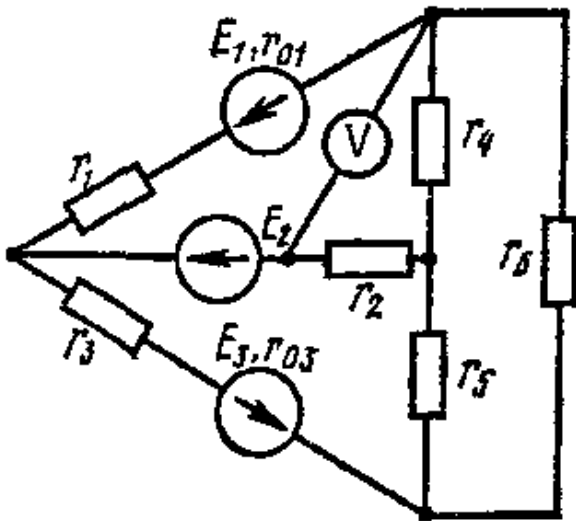


Рис. 1.34

Дано:

$$E_1 = 6 \text{ В}; E_2 = 20 \text{ В}; E_3 = 4 \text{ В};$$

$$R_1 = 4 \text{ Ом}; R_{01} = 0 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 6 \text{ Ом}; R_{02} = 0.8 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 4 \text{ Ом}; R_{03} = 1.2 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 4 \text{ Ом};$$

$$R_5 = 3 \text{ Ом};$$

$$R_6 = 3 \text{ Ом}.$$

1. Составим на основании законов Кирхгофа систему уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы (рис. 1)

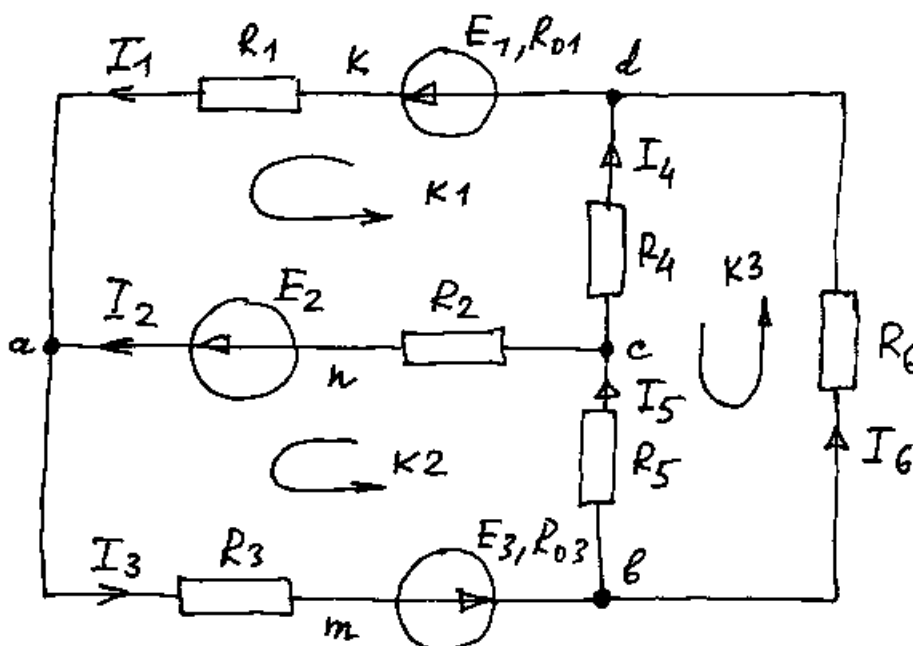


Рис. 1

Для заданной цепи

$$y = 4 \quad - \text{число узлов};$$

$$e = 6 \quad - \text{число ветвей}.$$

Количество уравнений по первому закону Кирхгофа $n_1 = y - 1 = 3$;

Количество уравнений по второму закону Кирхгофа $n_2 = e - (y - 1) = 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a: \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ b: \quad I_3 - I_5 - I_6 = 0 \\ c: \quad -I_2 - I_4 + I_5 = 0 \\ \\ K_1: \quad I_1 \cdot (R_1 + R_{01}) - I_2 \cdot (R_2 + R_{02}) + I_4 \cdot R_4 = E_1 - E_2 \\ K_2: \quad I_2 \cdot (R_2 + R_{02}) + I_3 \cdot (R_3 + R_{03}) + I_5 \cdot R_5 = E_2 + E_3 \\ K_3: \quad -I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 + I_6 \cdot R_6 = 0 \end{array} \right.$$

2. Определим токи во всех ветвях схемы методом контурных токов (рис. 2)

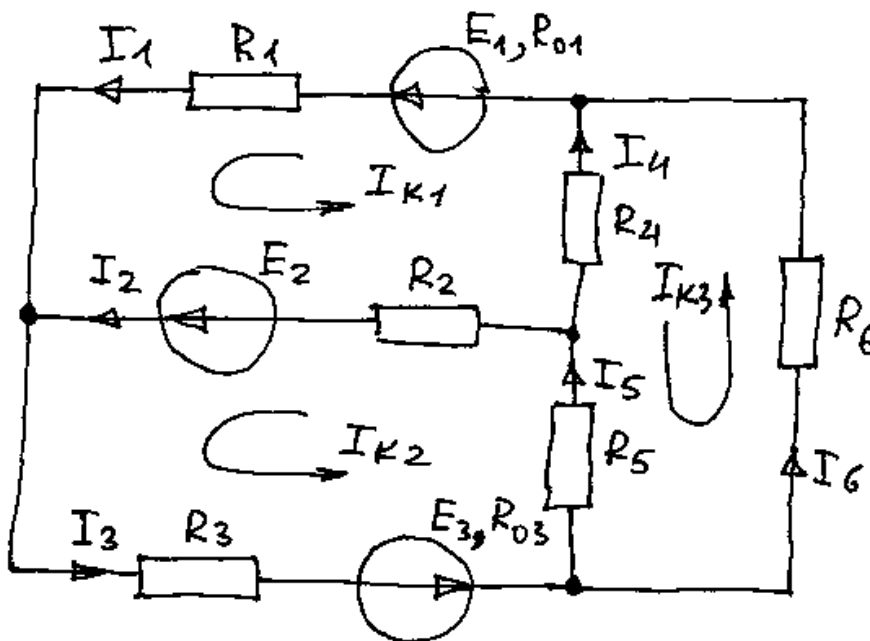


Рис. 2

Система уравнений МКТ

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{K1}(R_1 + R_{01} + R_2 + R_{02} + R_4) - I_{K2}(R_2 + R_{02}) - I_{K3}R_4 = E_1 - E_2 \\ I_{K2}(R_2 + R_{02} + R_3 + R_{03} + R_5) - I_{K1}(R_2 + R_{02}) - I_{K3}R_5 = E_2 + E_3 \\ I_{K3}(R_4 + R_5 + R_6) - I_{K1}R_4 - I_{K2}R_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} (R_1 + R_{01} + R_2 + R_{02} + R_4)I_{K1} & -(R_2 + R_{02})I_{K2} & -R_4I_{K3} = E_1 - E_2 \\ -(R_2 + R_{02})I_{K1} & +(R_2 + R_{02} + R_3 + R_{03} + R_5)I_{K2} & -R_5I_{K3} = E_2 + E_3 \\ -R_4I_{K1} & -R_5I_{K2} & +(R_4 + R_5 + R_6)I_{K3} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) методом определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14.8 & -6.8 & -4 \\ -6.8 & 15 & -3 \\ -4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 1221.2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -14 & -6.8 & -4 \\ 24 & 15 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -54$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 14.8 & -14 & -4 \\ -6.8 & 24 & -3 \\ -4 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2048$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 14.8 & -6.8 & -14 \\ -6.8 & 15 & 24 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 592.8$$

Контурные токи:

$$I_{K1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{1221.2} = -0.0442 \text{ A};$$

$$I_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2048}{1221.2} = 1.6770 \text{ A};$$

$$I_{K3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{592.8}{1221.2} = 0.4854 \text{ A}.$$

Токи ветвей

$$I_1 = I_{K1} = -0.044 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{K2} - I_{K1} = 1.6770 - (-0.0442) = 1.721 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{K2} = 1.677 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{K1} - I_{K3} = (-0.0442) - 0.4854 = -0.530 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{K2} - I_{K3} = 1.6770 - 0.4854 = 1.192 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{K3} = 0.485 \text{ A}.$$

3. Определим токи в ветвях схемы методом узлового напряжения,

Заменим треугольник сопротивлений R_4 , R_5 и R_6 эквивалентной звездой (рис. 3).

$$R = R_4 + R_5 + R_6 = 4 + 3 + 3 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R} = \frac{4 \cdot 3}{10} = 1.2 \text{ Ом};$$

$$R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R} = \frac{4 \cdot 3}{10} = 1.2 \text{ Ом};$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R} = \frac{3 \cdot 3}{10} = 0.9 \text{ Ом}.$$

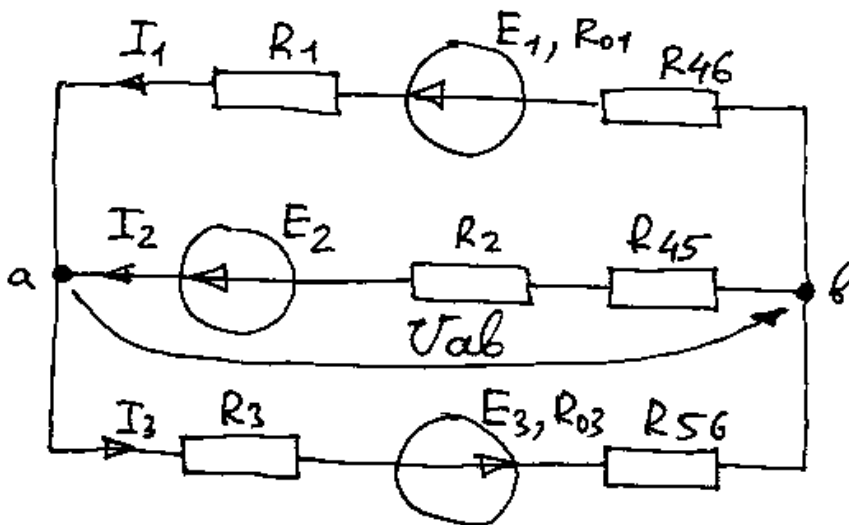


Рис. 3

Узловое напряжение

$$U_{ab} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_{01} + R_{46}} + \frac{E_2}{R_2 + R_{02} + R_{45}} + \frac{-E_3}{R_3 + R_{03} + R_{56}}}{\frac{1}{R_1 + R_{01} + R_{46}} + \frac{1}{R_2 + R_{02} + R_{45}} + \frac{1}{R_3 + R_{03} + R_{56}}} = \frac{\frac{6}{5.2} + \frac{20}{8} + \frac{-4}{6.1}}{\frac{1}{5.2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6.1}} = 6.230 \text{ В}.$$

Токи в ветвях 1, 2 и 3

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1 + R_{01} + R_{46}} = \frac{6 - 6.230}{5.2} = -0.044 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{R_2 + R_{02} + R_{45}} = \frac{20 - 6.230}{8} = 1.721 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{E_3 + U_{ab}}{R_3 + R_{03} + R_{56}} = \frac{4 + 6.230}{6.1} = 1.677 \text{ А}.$$

Определи потенциалы узлов b , c , и d (рис. 1). Полагаем $\varphi_a = 0$:

$$\varphi_b = E_3 - I_3(R_3 + R_{03}) = 4 - 1.677 \cdot 5.2 = -4.720 \text{ В};$$

$$\varphi_c = -E_2 + I_2 R_2 = -20 + 1.721 \cdot 6.8 = -8.297 \text{ В};$$

$$\varphi_d = -E_1 + I_1(R_1 + R_{01}) = -6 + (-0.044) \cdot 4 = -6.176 \text{ В}.$$

Токи в ветвях 4, 5 и 6

$$I_4 = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{R_4} = \frac{(-8.297) - (-6.176)}{4} = -0.53 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_b - \varphi_c}{R_5} = \frac{(-4.720) - (-8.297)}{3} = 1.192 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{R_6} = \frac{(-4.720) - (-6.176)}{3} = 0.485 \text{ А}.$$

Сравним результаты расчета токов, проведенного двумя методами (табл. 1).

Таблица 1 – Сравнение результатов расчетов МКТ и МУП

Метод	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
Метод контурных токов	-0,044	1,721	1,677	-0,530	1,192	0,485
Метод узлового напряжения	-0,044	1,721	1,677	-0,530	1,192	0,485

4. Определим ток I_6 , в заданной по условию схеме (рис. 1), методом эквивалентного генератора
Напряжение холостого хода (рис. 4)

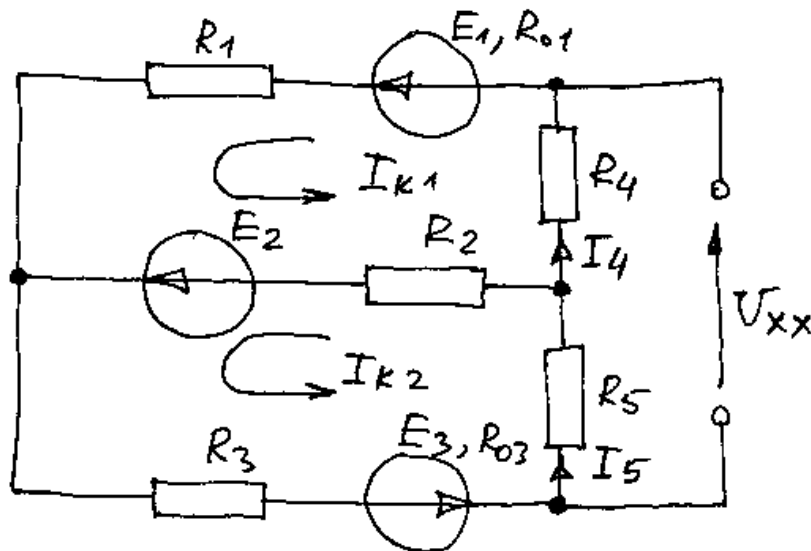


Рис. 4

Составим систему уравнений для цепи (рис. 4) по методу контурных токов

$$\begin{cases} (R_1 + R_{01} + R_2 + R_{02} + R_4) \cdot I_{K1} & - (R_2 + R_{02}) \cdot I_{K2} = E_1 - E_2 \\ - (R_2 + R_{02}) \cdot I_{K1} & + (R_2 + R_{02} + R_3 + R_{03} + R_5) \cdot I_{K2} = E_2 + E_3 \end{cases}$$

Систему уравнений решаем методом определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14.8 & -6.8 \\ -6.8 & 15 \end{vmatrix} = 175.76 ;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -14 & -6.8 \\ 24 & 15 \end{vmatrix} = -46.8 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 14.8 & -14 \\ -6.8 & 24 \end{vmatrix} = 260 .$$

Контурные токи:

$$I_{K1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-46.8}{175.76} = -0.266 \text{ A};$$

$$I_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{260}{175.76} = 1.479 \text{ A}.$$

Токи в ветвях:

$$I_4 = I_{K1} = -0.266 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{K2} = 1.479 \text{ A}.$$

ЭДС эквивалентного генератора

$$E_{\text{ЭГ}} = U_{XX} = I_5 \cdot R_5 + I_4 \cdot R_4 = 1.479 \cdot 3 + (-0.266) \cdot 4 = 3.37 \text{ В}.$$

Сопротивление эквивалентного генератора определим через сопротивление цепи (рис. 5), преобразовав "треугольник" $R_2 R_3 R_5$ в "звезду" $R_{23} R_{25} R_{35}$ (рис. 6).

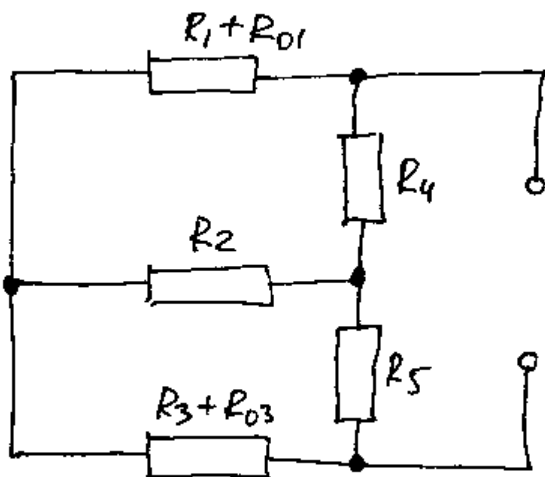


Рис. 5

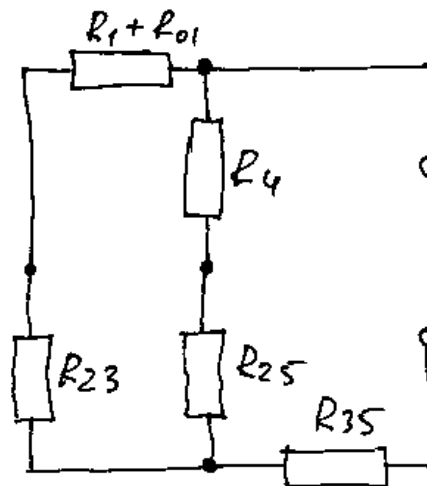


Рис. 6

$$R = (R_2 + R_{02}) + (R_3 + R_{03}) + R_5 = 6.8 + 5.2 + 3 = 15 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = \frac{(R_2 + R_{02}) \cdot (R_3 + R_{03})}{R} = \frac{6.8 \cdot 5.2}{15} = 2.357 \text{ Ом};$$

$$R_{25} = \frac{(R_2 + R_{02}) \cdot R_5}{R} = \frac{6.8 \cdot 3}{15} = 1.36 \text{ Ом};$$

$$R_{35} = \frac{(R_3 + R_{03}) \cdot R_5}{R} = \frac{5.2 \cdot 3}{15} = 1.04 \text{ Ом}.$$

Сопротивление эквивалентного генератора:

$$R_{ЭГ} = R_{35} + \frac{(R_{23} + R_1 + R_{01}) \cdot (R_{25} + R_4)}{(R_{23} + R_1 + R_{01}) + (R_{25} + R_4)} = 1.04 + \frac{6.357 \cdot 5.36}{6.357 + 5.36} = 3.948 \text{ Ом}.$$

Ток I_6 по методу эквивалентного генератора (рис. 7):

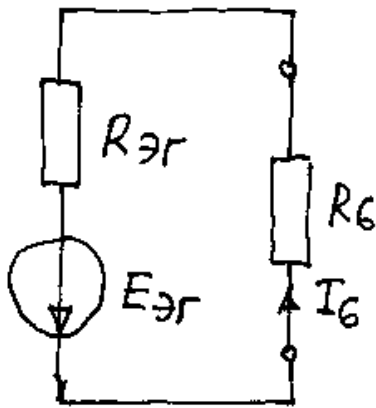


Рис. 7

$$I_6 = \frac{E_{ЭГ}}{R_6 + R_{ЭГ}} = \frac{3.37}{3 + 3.948} = 0.485 \text{ А}.$$

5. Составим баланс мощностей в исходной схеме (рис. 1).

Мощность источников энергии

$$\begin{aligned} P_{ист} &= E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = \\ &= 6 \cdot (-0.044) + 20 \cdot 1.721 + 4 \cdot 1.677 = 40.864 \text{ Вт}, \end{aligned}$$

где ЭДС E_1 потребляет энергию из цепи.

Мощность приемников энергии

$$\begin{aligned} P_{пр} &= I_1^2 \cdot (R_1 + R_{01}) + I_2^2 \cdot (R_2 + R_{02}) + I_3^2 \cdot (R_3 + R_{03}) + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = \\ &= (-0.044)^2 \cdot 4 + 1.721^2 \cdot 6.8 + 1.677^2 \cdot 5.2 + (-0.53)^2 \cdot 4 + 1.192^2 \cdot 3 + 0.485^2 \cdot 3 = 40.86 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Погрешность расчета

$$\delta_{\%} = \frac{|P_{ист} - P_{пр}|}{P_{ист}} 100\% = \frac{|40.864 - 40.86|}{40.864} \cdot 100 = 0.01 \text{ \%}.$$

Показание вольтметра

По второму закону Кирхгофа

$$U_{dn} - I_2 R_2 + I_4 \cdot R_4 = 0$$

Находим

$$U_V = U_{dn} = I_2 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_4 = 1.721 \cdot 6 - (-0.53) \cdot 4 = 12.45 \text{ В.}$$

6. Строим потенциальную диаграмму (рис. 8) для замкнутого контура "ambdka'" схемы рис. 1

$$\phi_a = 0;$$

$$\phi_m = \phi_a - I_3 R_3 = 0 - 1.677 \cdot 4 = -6.71 \text{ В};$$

$$\phi_b = \phi_m + E_3 - I_3 R_{03} = (-6.71) + 4 - 1.677 \cdot 1.2 = -4.72 \text{ В};$$

$$\phi_d = \phi_b - I_6 R_6 = (-4.72) - 0.485 \cdot 3 = -6.17 \text{ В};$$

$$\phi_k = \phi_d + E_1 - I_1 R_{01} = (-6.17) + 6 - (-0.044) \cdot 0 = -0.17 \text{ В};$$

$$\phi'_a = \phi_k - I_1 R_1 = -0.17 - (-0.044) \cdot 4 = 0.0 \text{ В.}$$

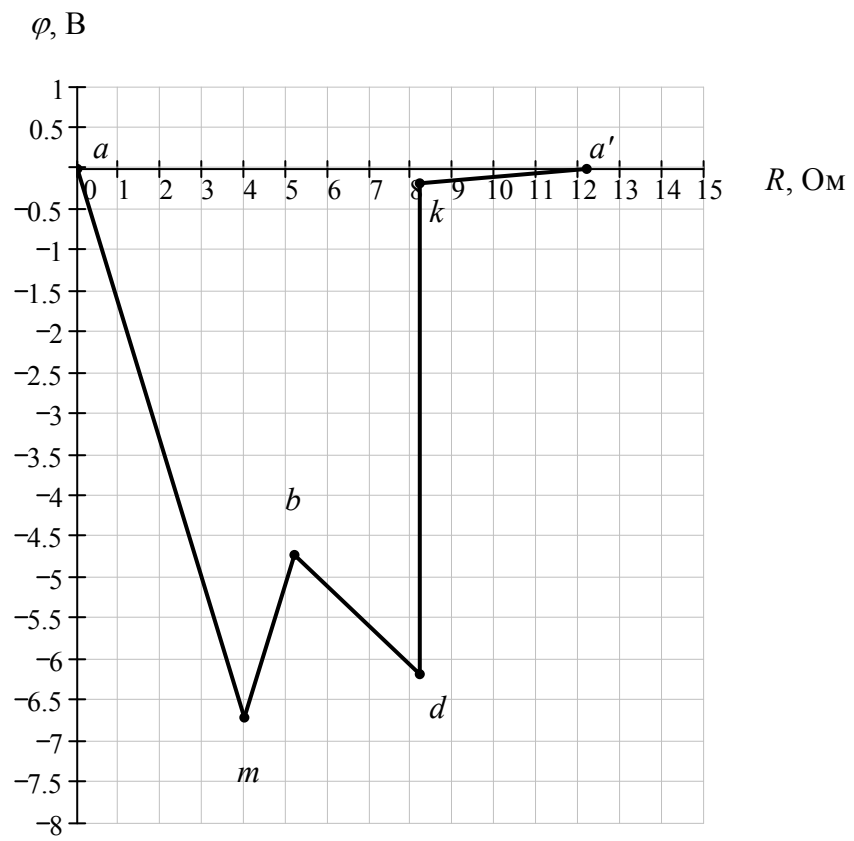


Рис. 8