ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

(МГУПС (МИИТ))

Одобрено кафедрой

«Теоретическая и прикладная

механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Задание на курсовую работу

«ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

для студентов 2 курса специальности

190300.65 «ПОДВИЖНОЙ СОСТАВ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ»

специализаций:

«Локомотивы», «Вагоны», «Электрический транспорт железных дорог», «Технология производства и ремонта подвижного состава», «Высокоскоростной наземный транспорт»

Москва

Составители:

Капранов И.В. – к.т.н., профессор;

Дубровин В.С. – к.т.н., доцент;

Шумейко Г.С. – к.т.н., доцент

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Целью курсовой работы **является формирование** у обучающихся **профессиональных компетенций и приобретение** обучающимися:

умений применения математических методов для решения практических задач;

навыков владения основными законами и методами механики.

Задание на курсовую работу по дисциплине «Теоретическая механика» включает в себя 3 темы:

1. Равновесия простейших механических систем;
2. Определение кинематических параметров движущихся тел;
3. Исследование движения физических тел под действием приложенных сил.

В курсовой работе студент должен:

Тема 1. Равновесия простейших механических систем

- построить исходный рисунок и записать числовые значения величин;

- освободить конструкцию от связей, заменить их реакциями связей;

- составить уравнения равновесия и решить их;

- проанализировать результат.

Тема 2. Определение кинематических параметров движущихся тел

- построить механизм или траекторию точки в масштабе;

- вычислить и построить скорость и ускорение точки.

Тема 3. Исследование движения физических тел под действием приложенных сил

- выбрать метод решения задачи;

- сделать рисунок и показать все силы действующие на тело;

- показать известные скорости и ускорения точек тела;
- составить уравнение теоремы или принципа и решить.

Курсовую работу следует оформлять в соответствии с требованиями ЕСКД. Текстовая часть курсовой работы выполняется с использованием ЭВМ, и только рисунки можно делать карандашом. Работа должна содержать оглавление, текст самой работы и список используемой литературы. Текст работы должен начинаться с задания, сопровождаемого исходными данными в соответствии с выбранным вариантом, а затем последовательно излагается расчетная часть.

Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями. Следует указать, какие теоремы, принципы и формулы использованы для решения задачи. Все промежуточные преобразования, расчеты должны быть показаны в решении и сопровождены необходимыми пояснениями. Все уравнения и формулы следует записывать сначала в общем виде, а затем подставлять вместо буквенных обозначений их числовые значения. Вычисления должны быть доведены до получения окончательного результата. В конце решения необходимо привести ответы. Обязательно указывать размерность искомых величин.

В настоящих заданиях приводится 20 вариантов для каждой задачи.

Номер варианта для всех задач курсовой работы выбирается студентом по двум последним цифрам его учебного шифра (табл. 1).

Таблица 1

Предпоследняя	Последняя	Номер варианта	Предпоследняя	Последняя	Номер варианта
цифра шифра			цифра шифра		
0;1;2;3;4	0	1	5;6;7;8;9	0	11
	1	2		1	12
	2	3		2	13
	3	4		3	14
	4	5		4	15
	5	6		5	16
	6	7		6	17
	7	8		7	18
	8	9		8	19
	9	10		9	20

Например, шифрам с последними цифрами 51, 41, и 77 соответствуют варианты 12,2 и 18.

ТЕМА 1. РАВНОВЕСИЯ ПРОСТЕЙШИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задача С1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Определить реакции связей заданной плоской конструкции. Схемы конструкций указаны на рисунках С1.1 - С1.20, исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Номер варианта	P,кН	G,кН	M,кНм	q,кН/м	l,м	α,град.
С1.1	4	12	4	3	1	60^o
С1.2	10	6	5	2	1,5	45^o
С1.3	-	10	4	3	1	45^o
С1.4	15	-	3	4	1	45^o
С1.5	10	8	5	2	2	30^o
С1.6	6	9	3	5	2	60^o
С1.7	20	14	4	-	1	30^o
С1.8	14	-	6	2	1	30^o
С1.9	10	15	6	-	1	30^o
С1.10	16	-	10	3	1	60^o
С1.11	10	8	6	2	2	30^o
С1.12	15	12	8	1	1,5	60^o
С1.13	8	-	3	6	1	60^o
С1.14	10	-	4	2	1	45^o
С1.15	20	12	3	4	1	60^o
С1.16	15	5	2	3	1	30^o
С1.17	12	6	8	3	2	30^o
С1.18	8	-	3	2	1	45^o
С1.19	20	-	4	6	1	30^o
С1.20	15	10	5	-	1	30^o

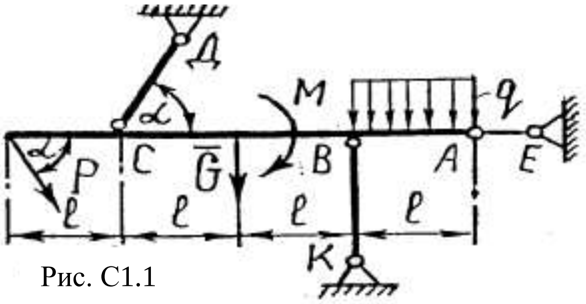


Рис. С1.1

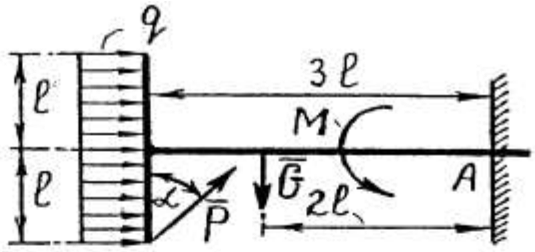


Рис. С1.2

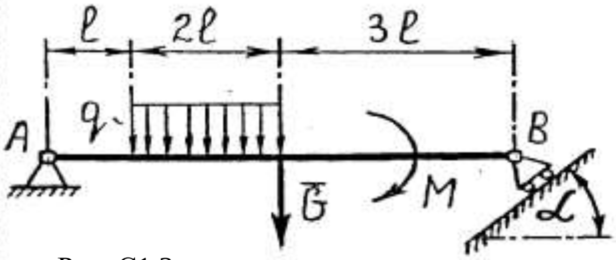


Рис. С1.3

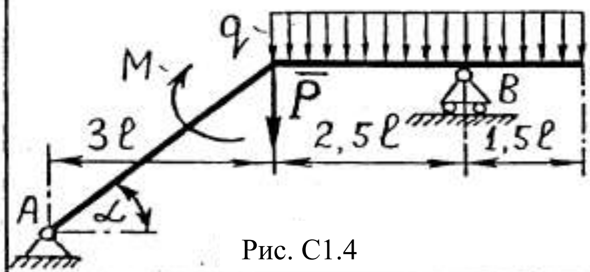


Рис. С1.4

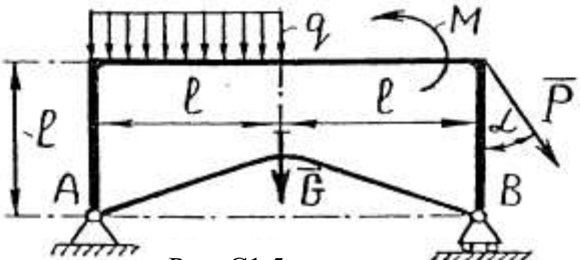


Рис. С1.5

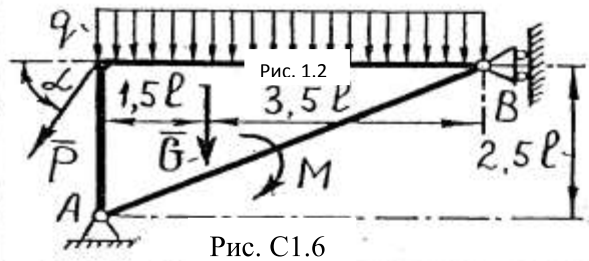


Рис. С1.6

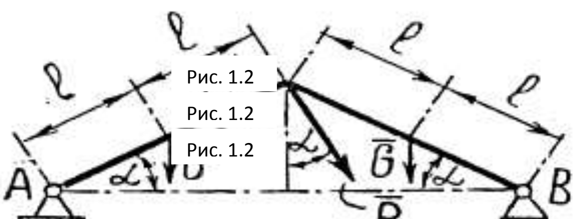


Рис. С1.7

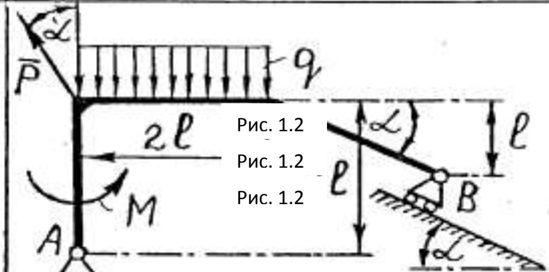


Рис. С1.8

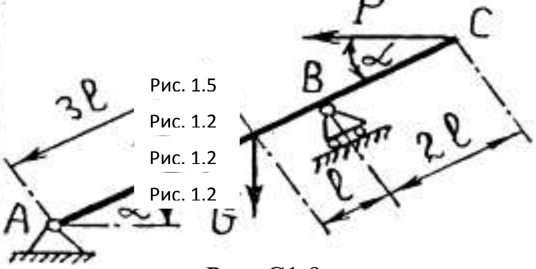


Рис. С1.9

Рис. С1.10

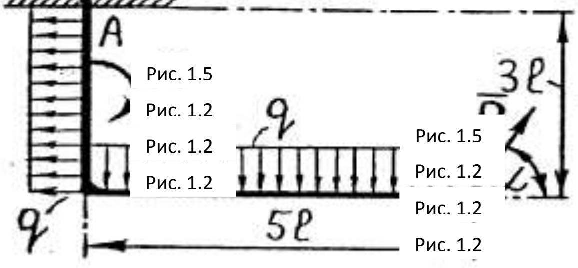


Рис. 1.5

Рис. 1.2

Рис. 1.2

Рис. 1.2

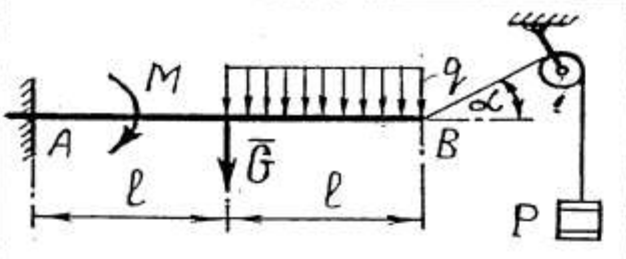


Рис. C1.11

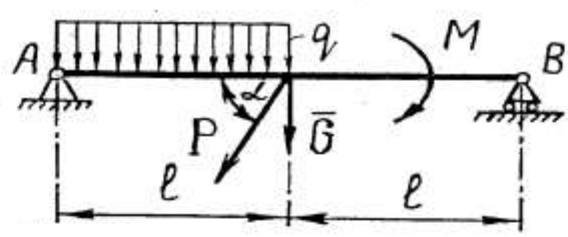


Рис. C1.12

Рис. C1.13

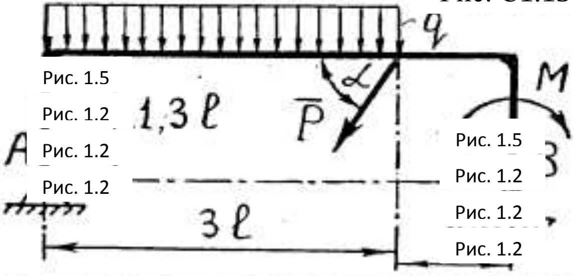
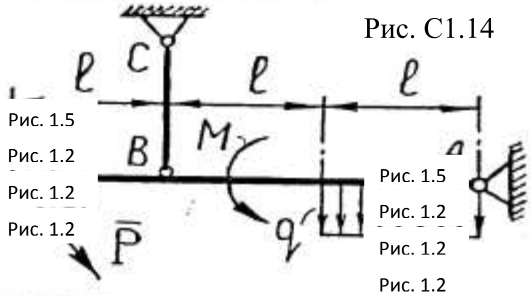


Рис. C1.14



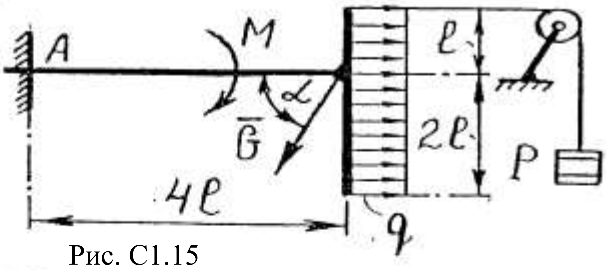


Рис. C1.15

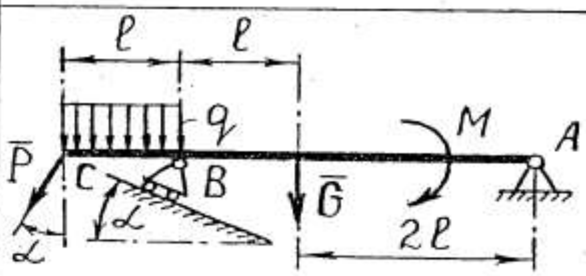


Рис. C1.16

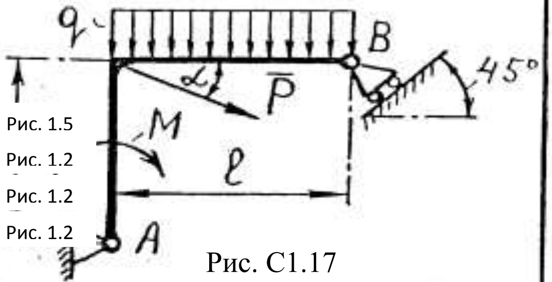


Рис. C1.17

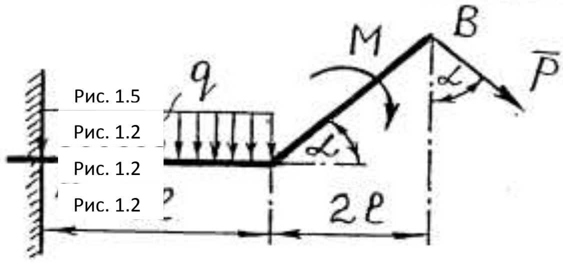


Рис. C1.18

Рис. C1.19

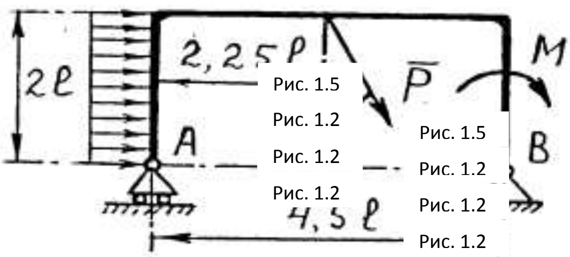
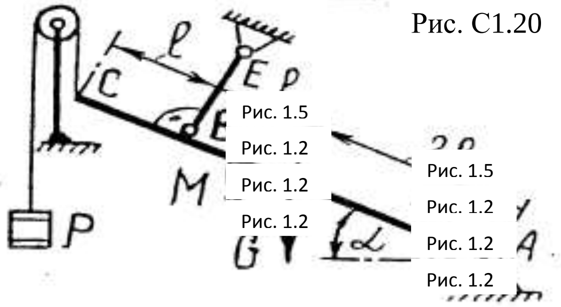


Рис. C1.20



Задача С2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Определить реакции связей в точках А и В составной плоской конструкции, состоящей из двух твердых тел. Схемы конструкций приведены на рис. С2.1 – С2.20, исходные данные указаны в табл. 3

Таблица 3

Номер варианта	P кН	M кН м	q кН/м	a , м	*b*, м	*l*, м	α, град
С2.1	5	4.4	3	2.8	2.3	1.5	30°
С2.2	6	4	2	1.3	2.5	1	60°
С2.3	3	4.8	2	2.8	1.5	1.2	30°
С2.4	7	5.2	4	3.2	2.7	1.6	60°
С2.5	4	3.2	3	2.5	4	2.8	30°
С2.6	2	2	1	1.8	2.5	0.8	60°
С2.7	6	3.6	2	1.5	3	1.5	30°
С2.8	4	4	3	3	2.5	1.5	30°

C2.9	5	2.4	2	1	2.0	1.5	60°
C2.10	4	1.6	3	1	3.0	1.5	60°
C2.11	8	4	3	1.8	2.5	0.8	30°
C2.12	7	4.8	2	1.5	3.0	1.3	30°
C2.13	5	6	2	3	2.5	1.0	60°
C2.14	4	5.2	3	2.5	3.2	1.0	30°
C2.15	5	3.6	3	2.3	4	1.8	30°
C2.16	3	7.2	2	1	4.5	2.2	30°
C2.17	4	3.6	4	1.0	2.2	1.2	60°
C2.18	3	4.8	2	2.5	3.0	1.0	30°
C2.19	5	4	3	2.5	2.0	1.3	30°
C2.20	2	3	3	1.8	2.5	1.0	60°

Рис. С2.1

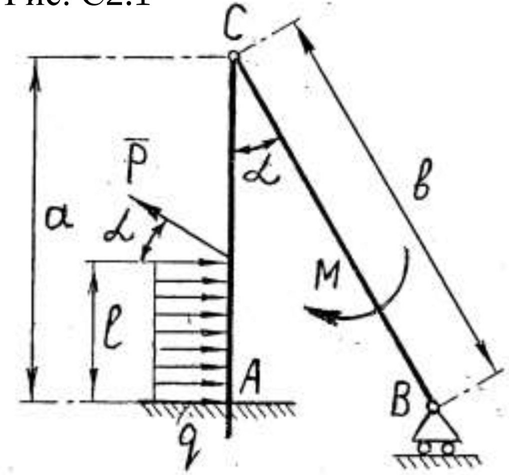


Рис. С2.2

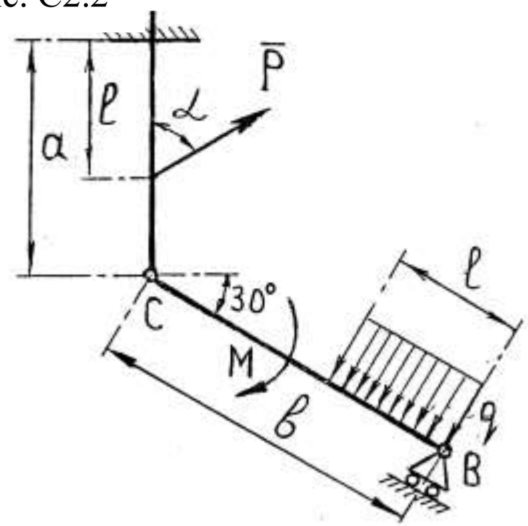
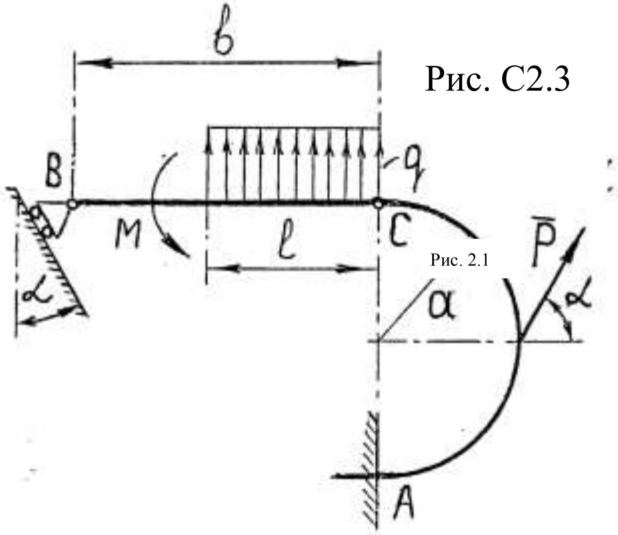


Рис. С2.3



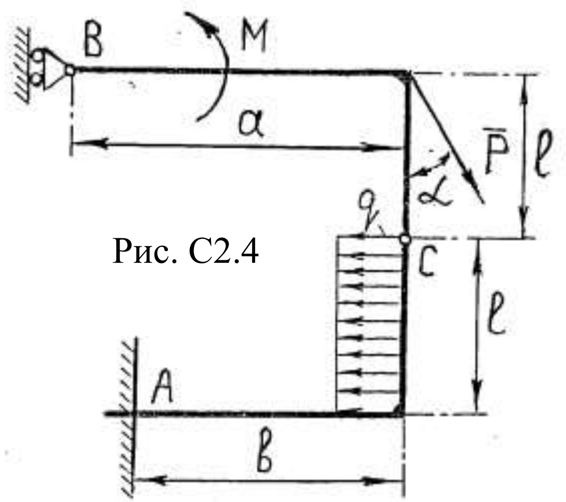


Рис. С2.4

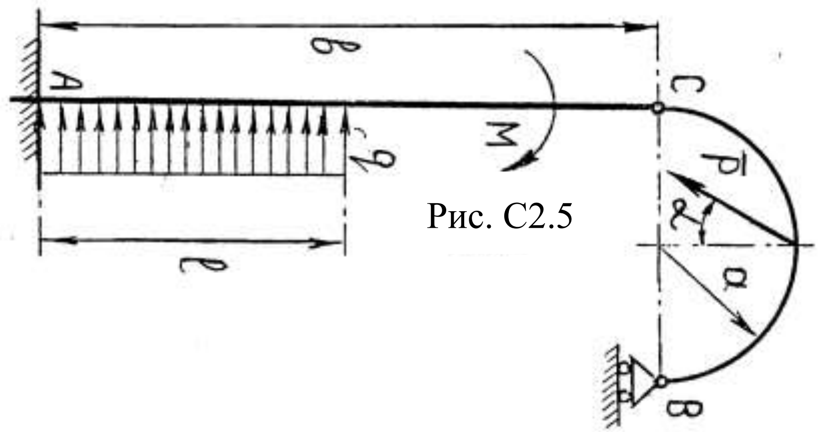
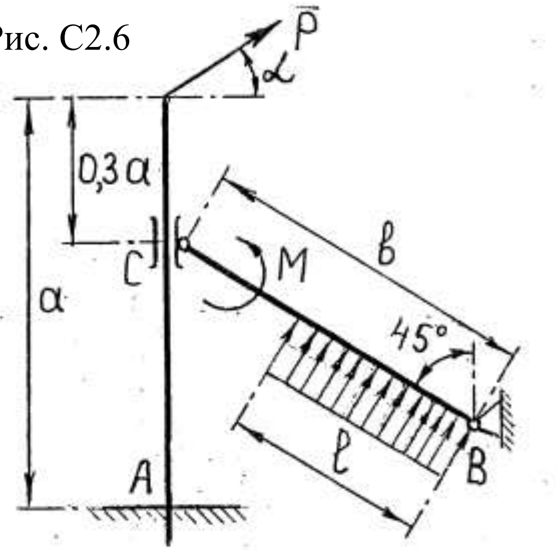


Рис. С2.5

Рис. C2.6



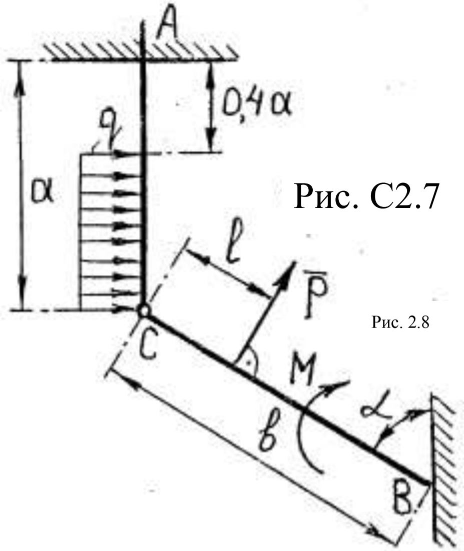
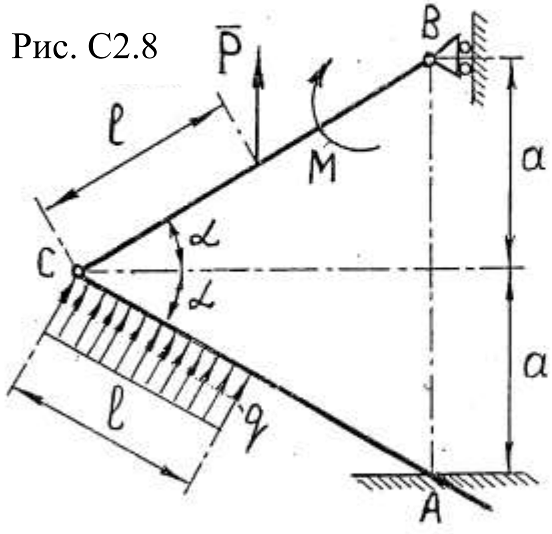


Рис. C2.7

Рис. 2.8

Рис. C2.8



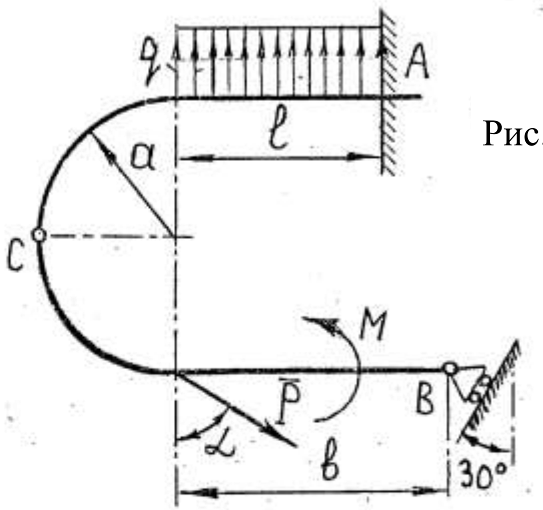
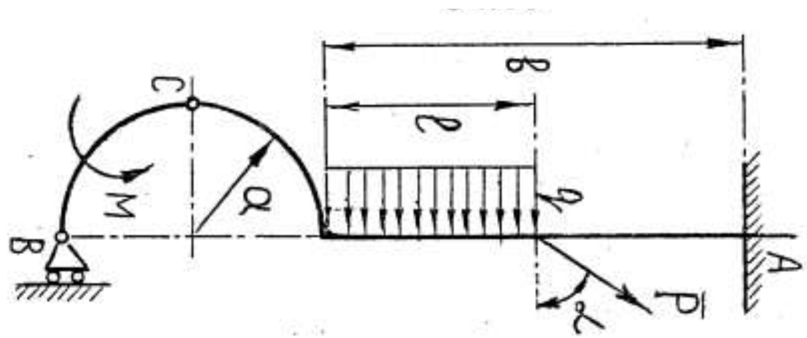


Рис. C2.9

Рис. C2.10



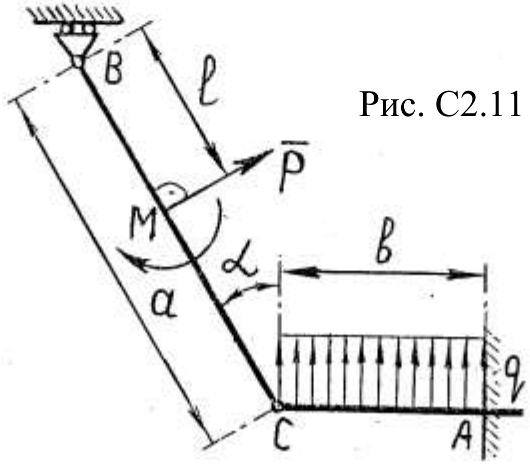


Рис. С2.11

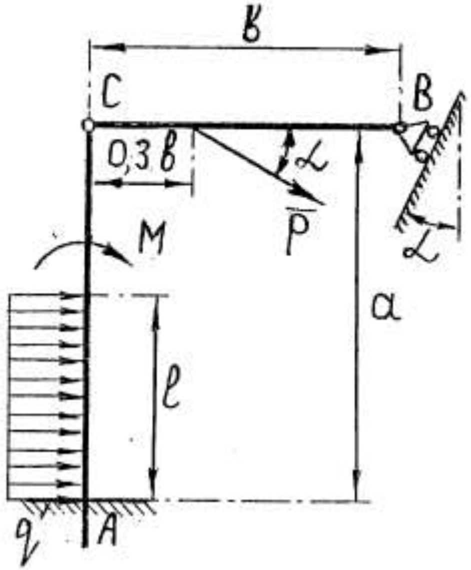


Рис. С2.12

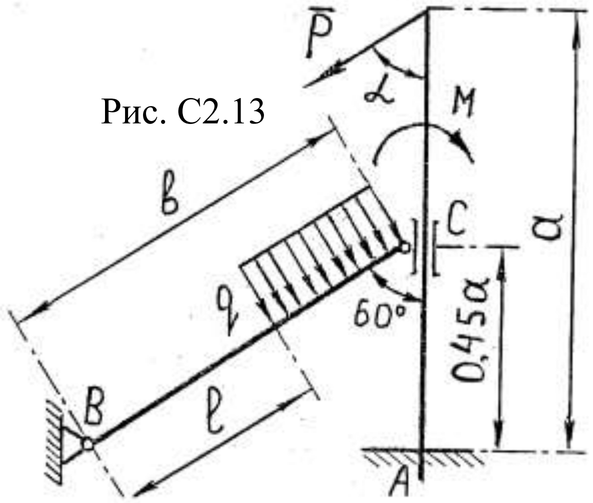


Рис. С2.13

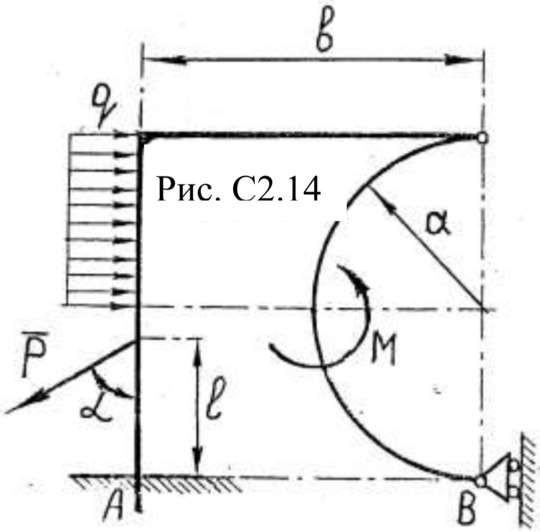


Рис. С2.14

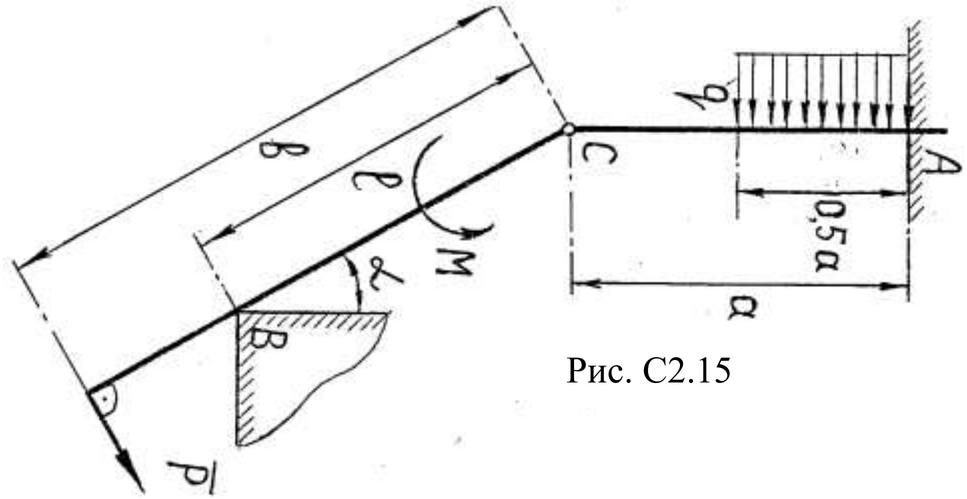


Рис. С2.15

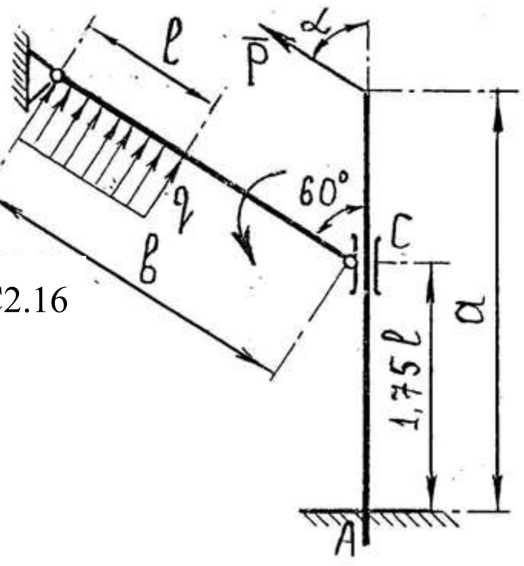


Рис. C2.16

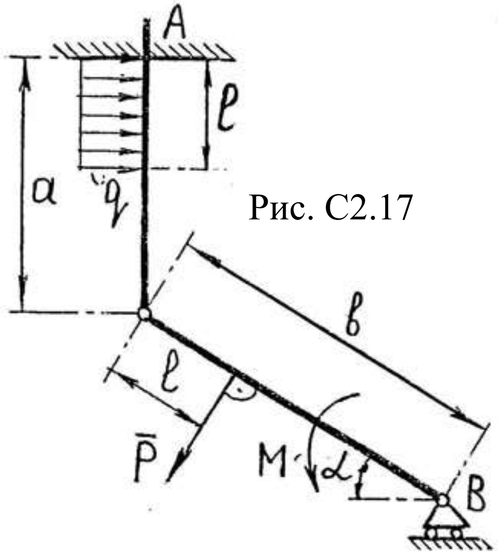


Рис. C2.17

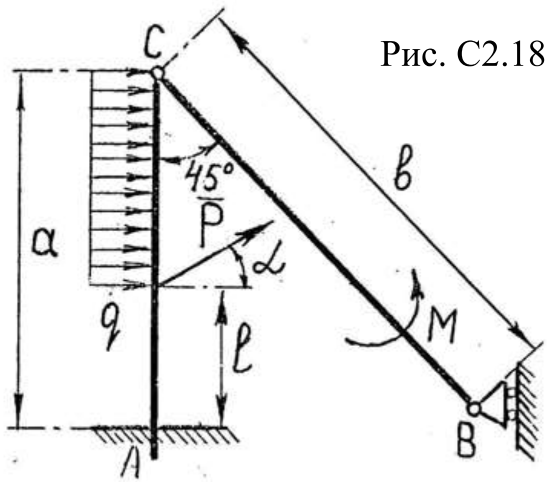


Рис. C2.18

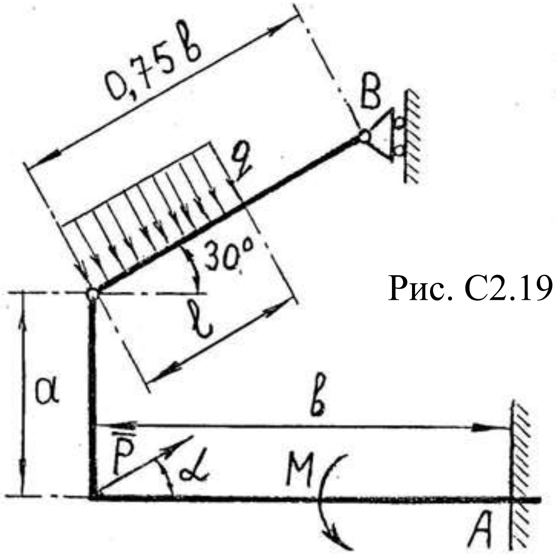


Рис. C2.19

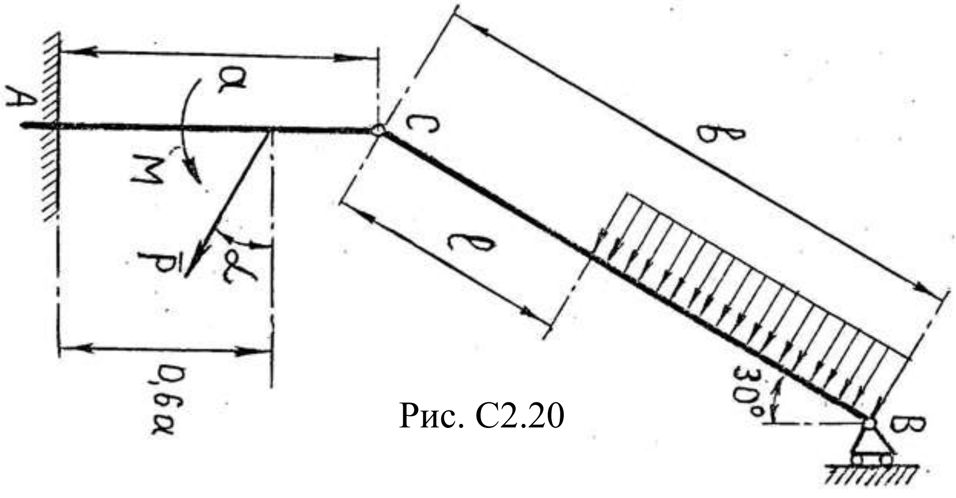


Рис. C2.20

Задача С3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Определить усилия в стержнях плоской фермы (рис. С3.1 – С3.20) соответственно способом разрезов Риттера и способом вырезания стержней с узлом фермы. Номера стержней и исходные данные указаны в табл. 4

Таблица 4

Номер варианта	Номера стержней	Номера стержней	P_1, кН	P_2, кН
С3.1	2,9,4	1,6	90	40
С3.2	1,7,5	2,3	80	50
С3.3	2,9,4	1,6	60	70
С3.4	2,8,5	3,4	70	90
С3.5	1,6,4	2,3	120	80
С3.6	2,7,4	1,5	110	70
С3.7	1,9,3	4,5	150	120
С3.8	3,8,6	1,2	140	90
С3.9	8,9,2	3,4	170	120
С3.10	7,11,5	1,2	160	100
С3.11	2,11,4	6,7	190	120
С3.12	1,8,6	3,4	150	130

C3.13	1,7,5	2,3	70	120
C3.14	2,9,4	1,6	80	100
C3.15	2,11,4	6,7	90	140
C3.16	2,10,5	3,4	170	130
C3.17	1,7,5	2,3	130	150
C3.18	2,9,4	1,6	120	140
C3.19	7,10,2	5,4	170	200
C3.20	7,10,2	5,4	170	200

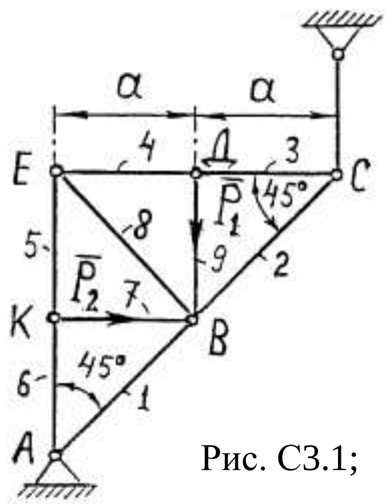


Рис. С3.1;

Рис. С3.2

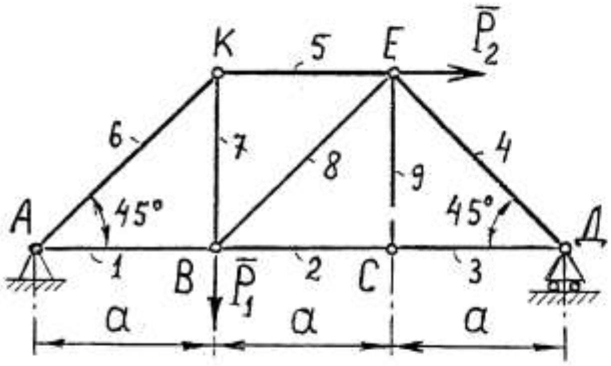
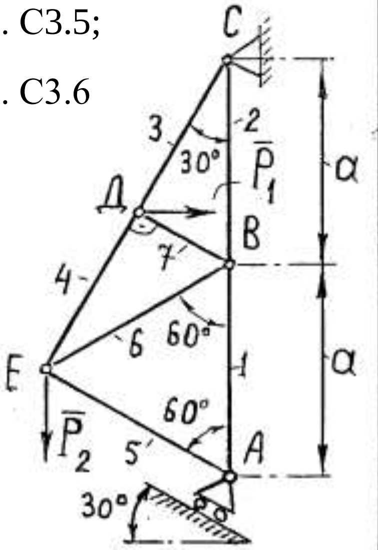


Рис. С3.3; Рис. С3.4

Рис. С3.5;

Рис. С3.6



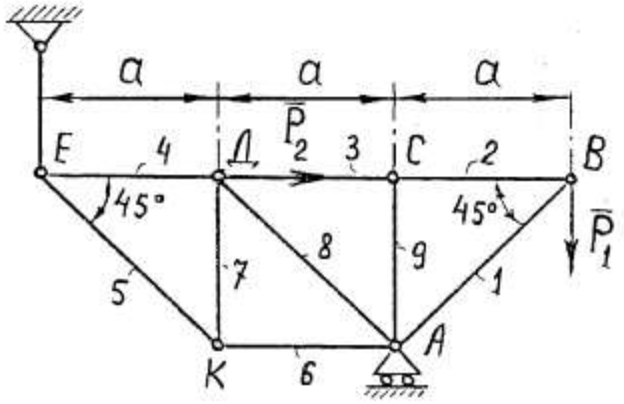


Рис. С3.7;

Рис. С3.8

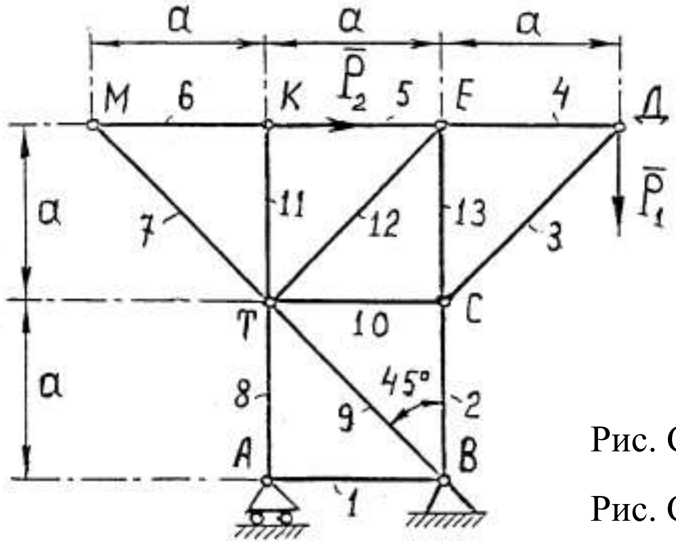


Рис. С3.9;

Рис. С3.10

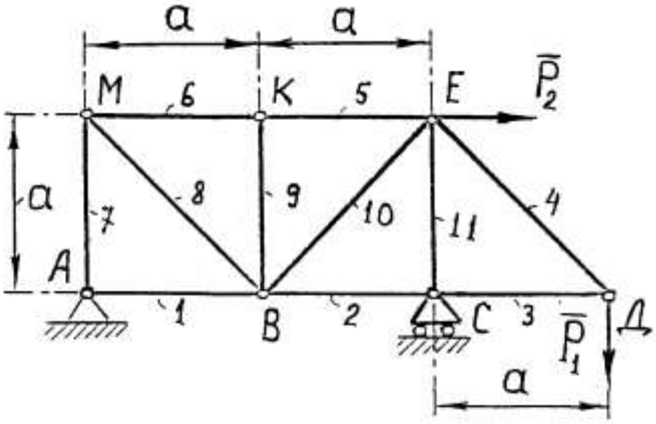


Рис. С3.11;

Рис. С3.12

Рис. С3.13

Рис. С3.14

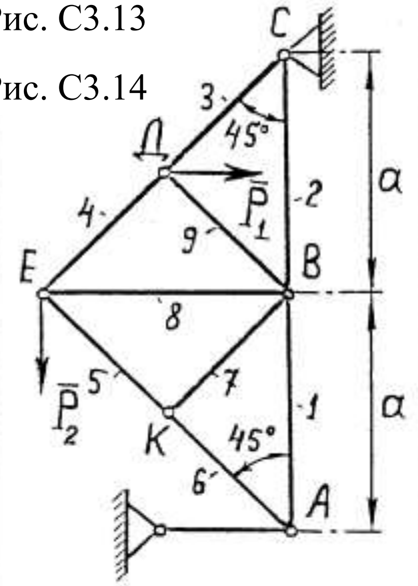


Рис. С3.15;

Рис. С3.16

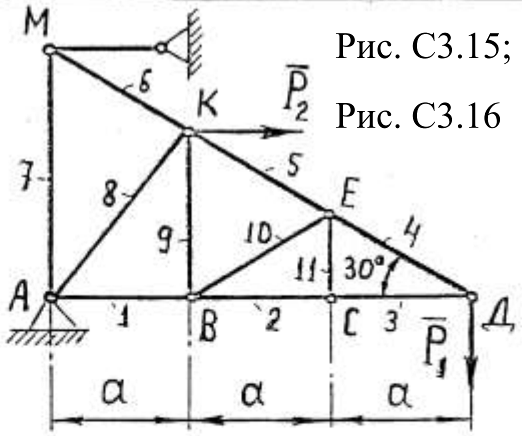
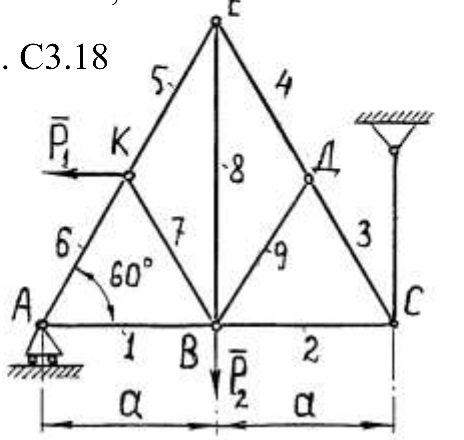


Рис. С3.17;

Рис. С3.18



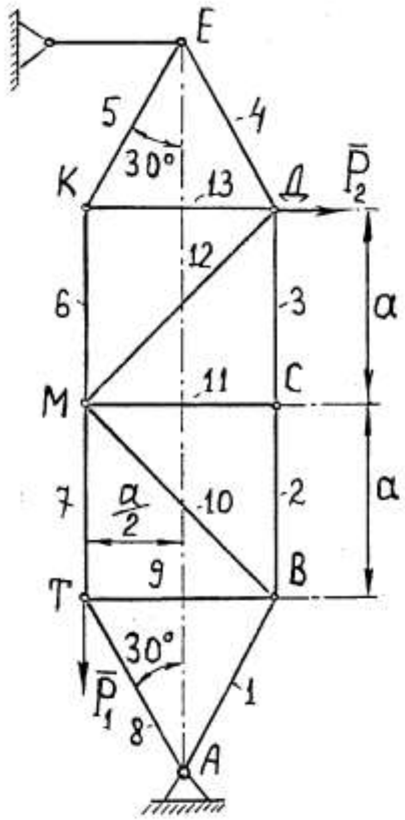


Рис. С3.19;

Рис. С3.20

Задача С4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Определить реакции связей пространственной конструкции, находящейся под действием сил F, P и пары сил с моментом M. Для всех вариантов принять F=200 Н, P=300Н, M=60Нм, a = 1м, схемы конструкций представлены на рисункахС4.1 - С4.20

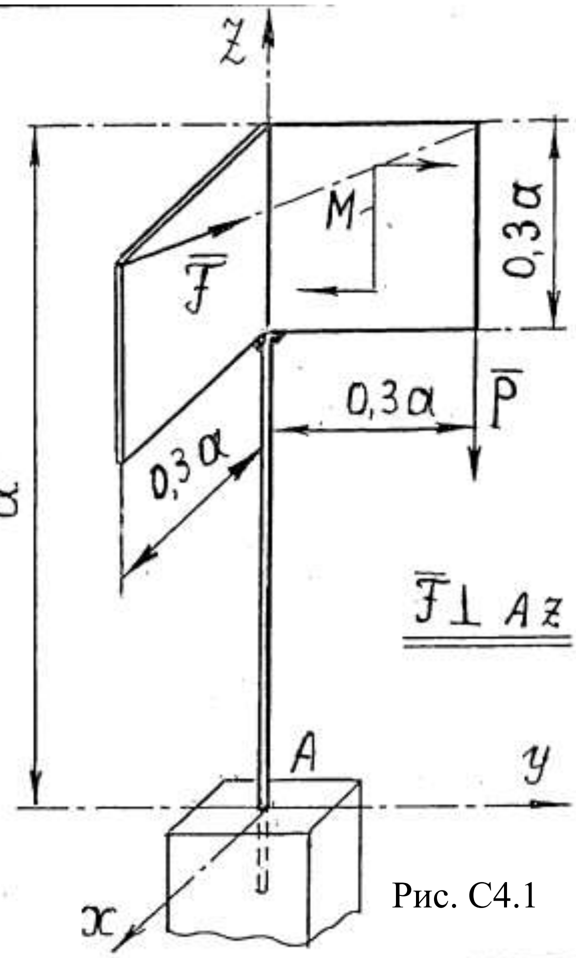


Рис. С4.1

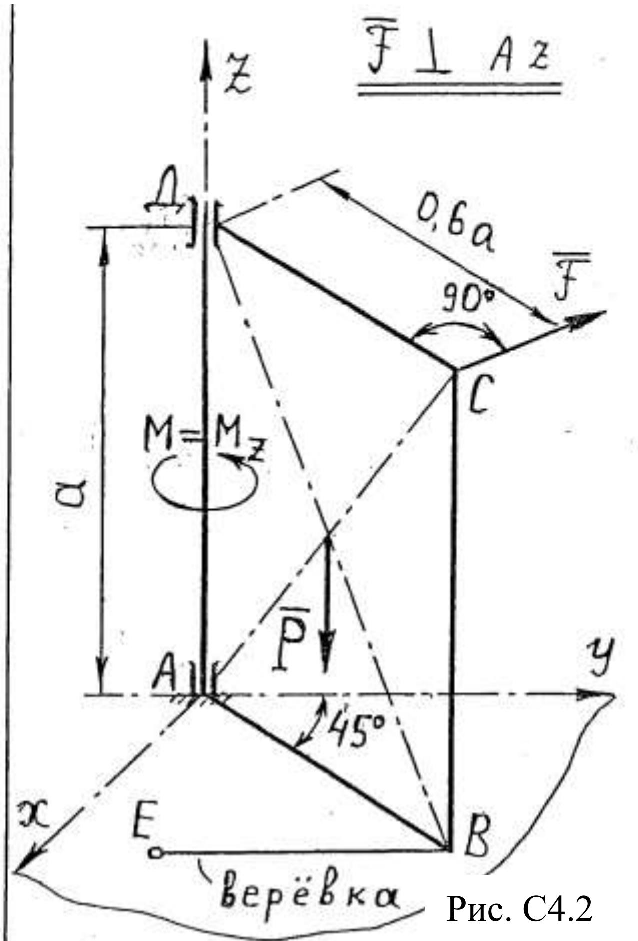


Рис. С4.2

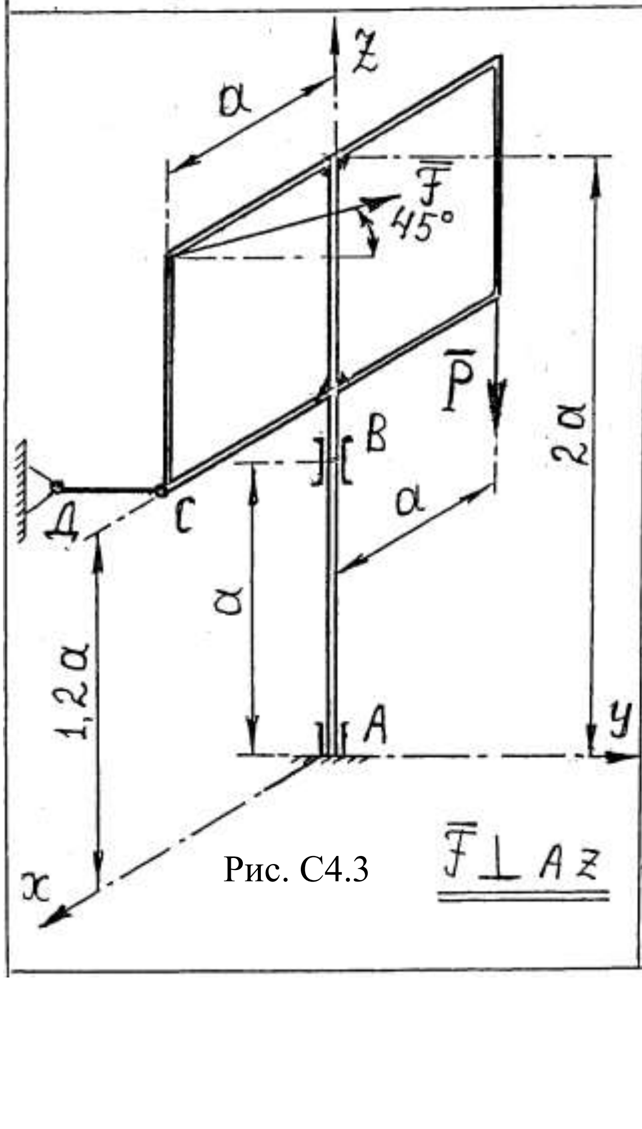


Рис. С4.3

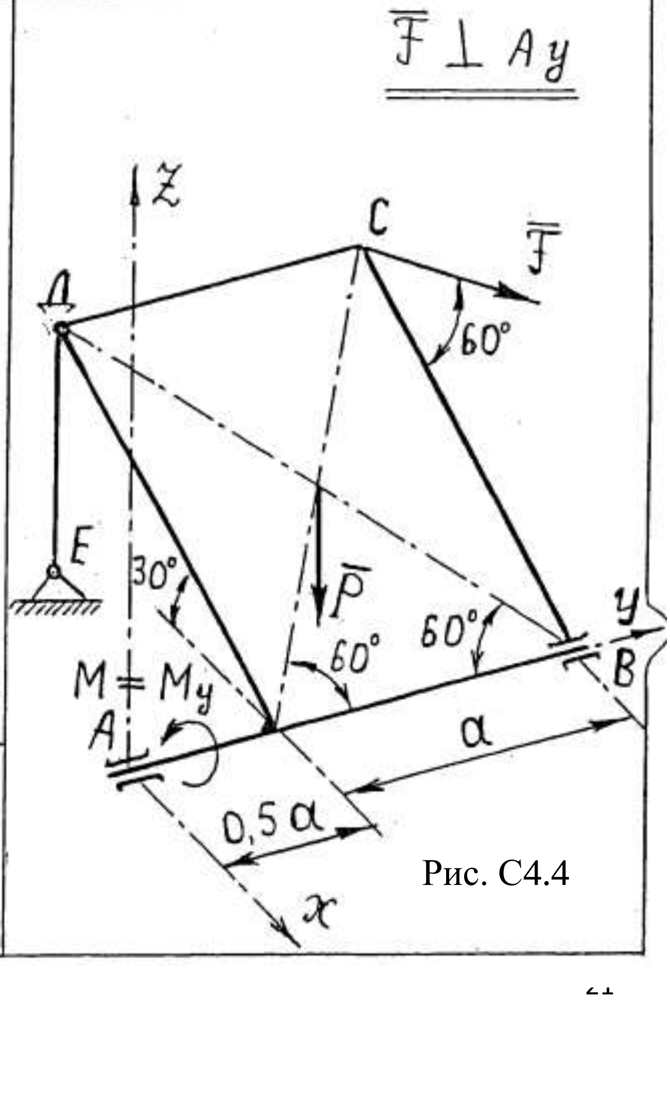


Рис. С4.4

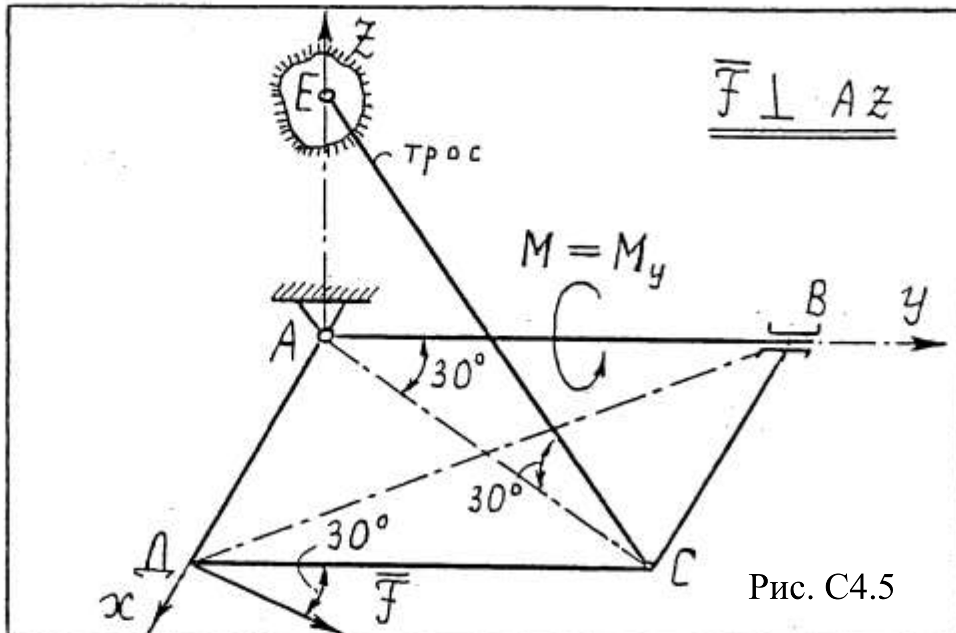


Рис. С4.5

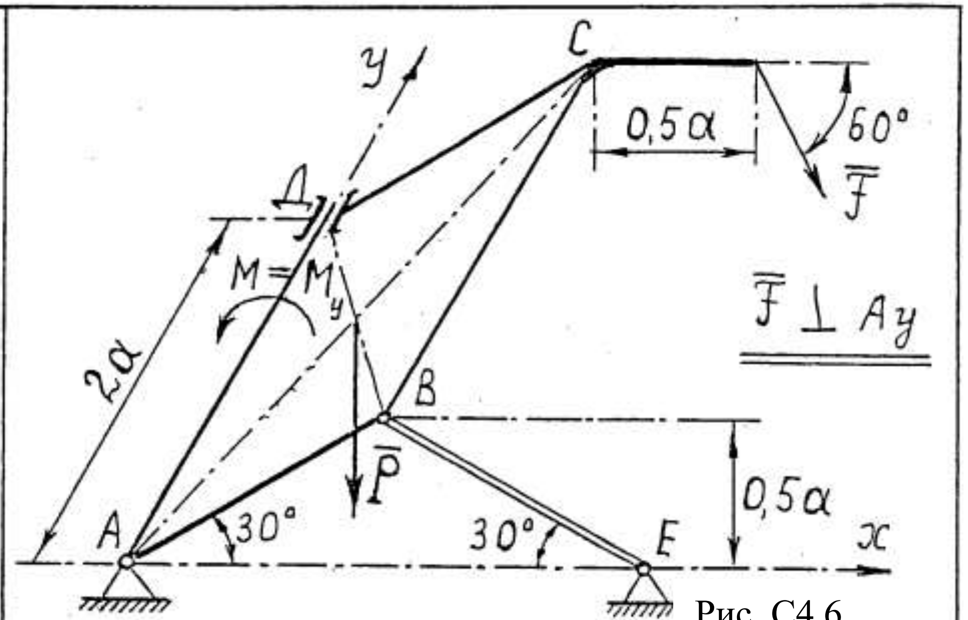


Рис. С4.6

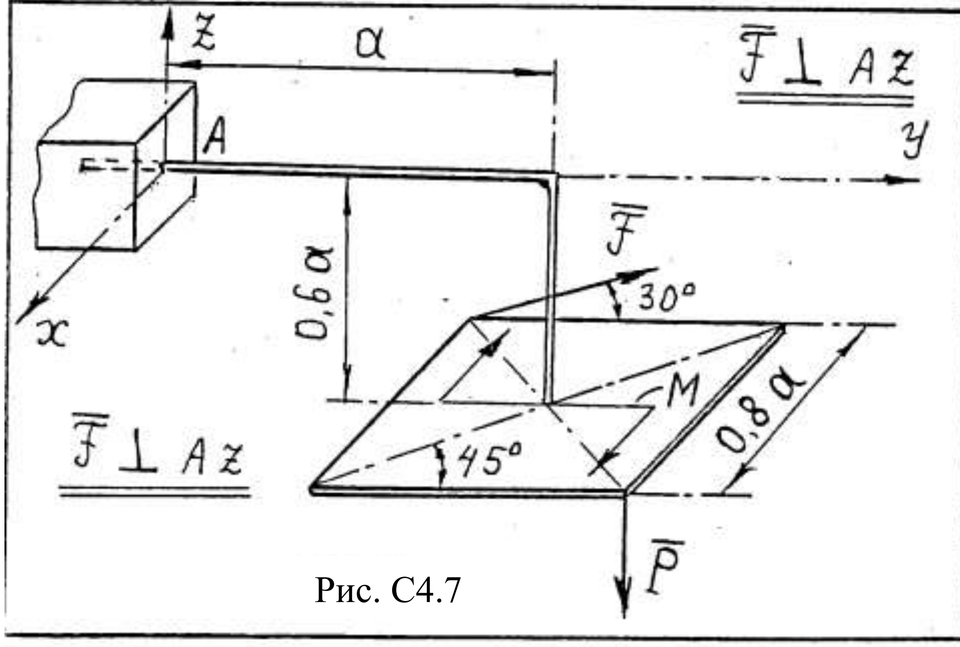


Рис. С4.7

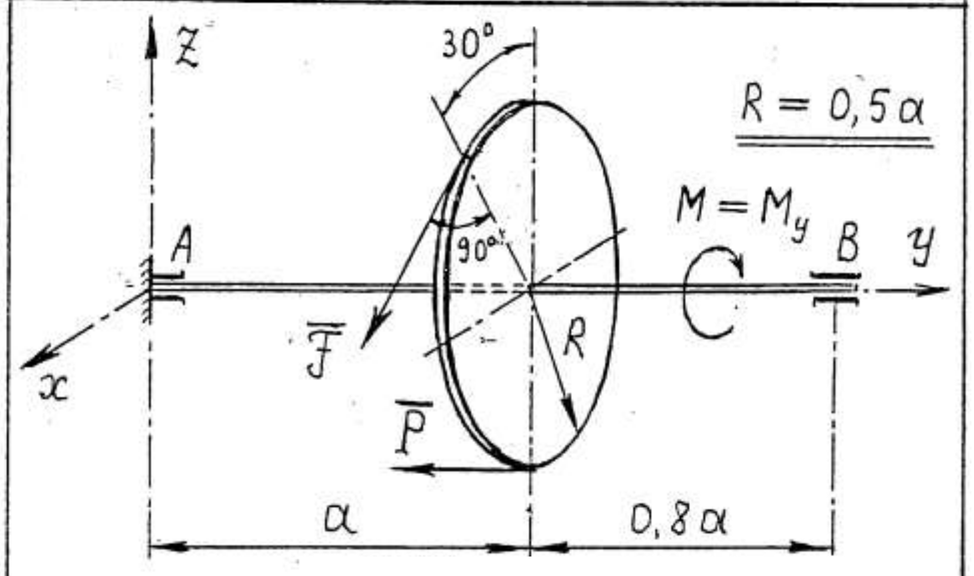
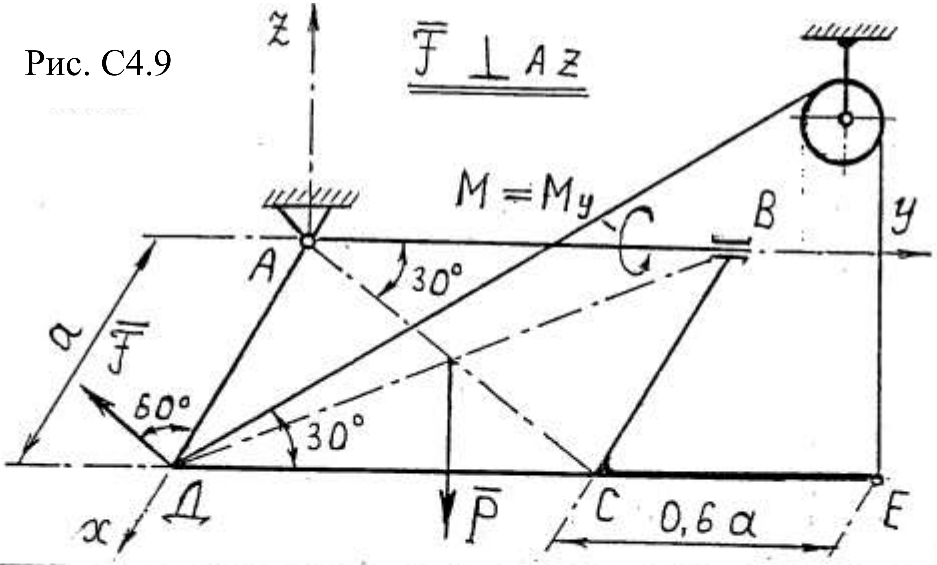


Рис. С4.8

Рис. С4.9



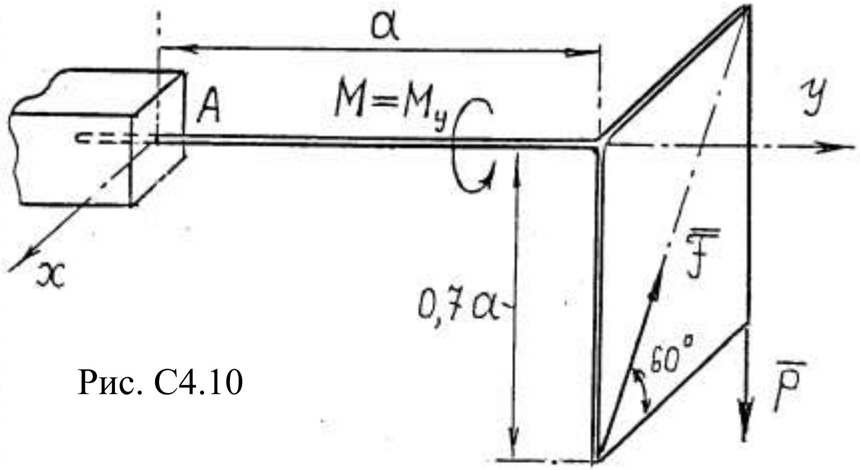


Рис. С4.10

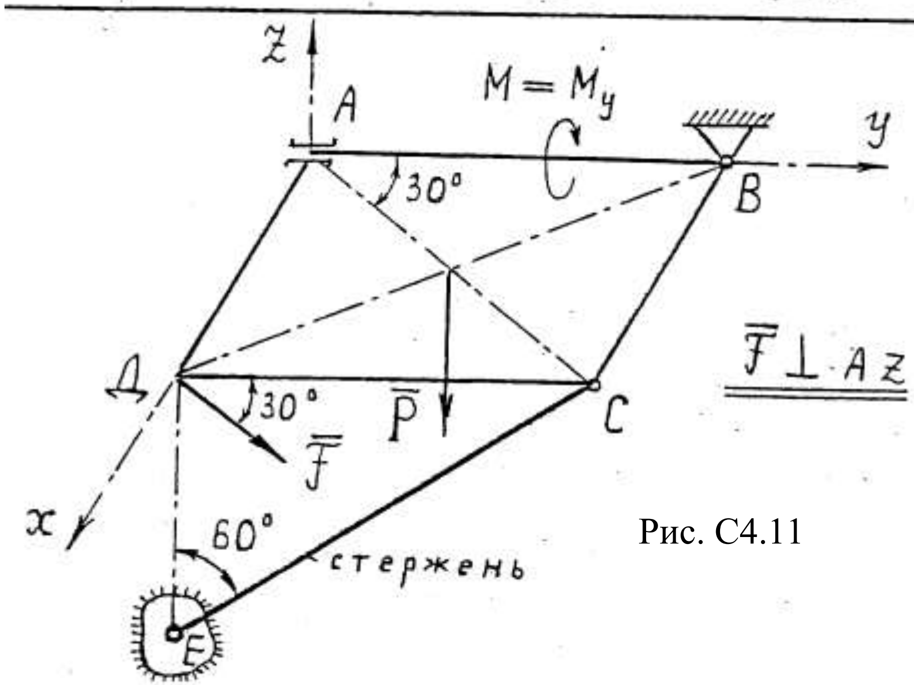


Рис. С4.11

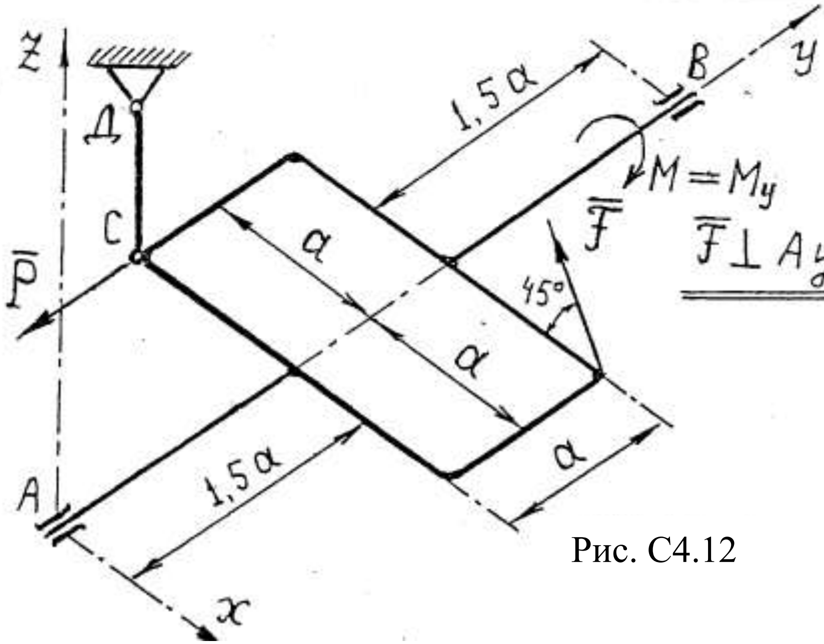


Рис. С4.12

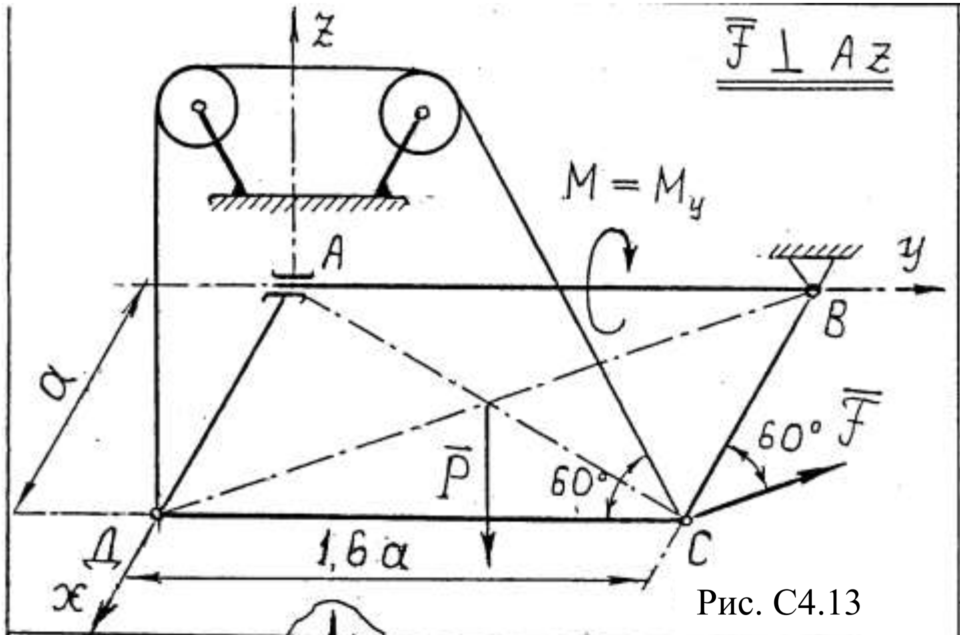


Рис. С4.13

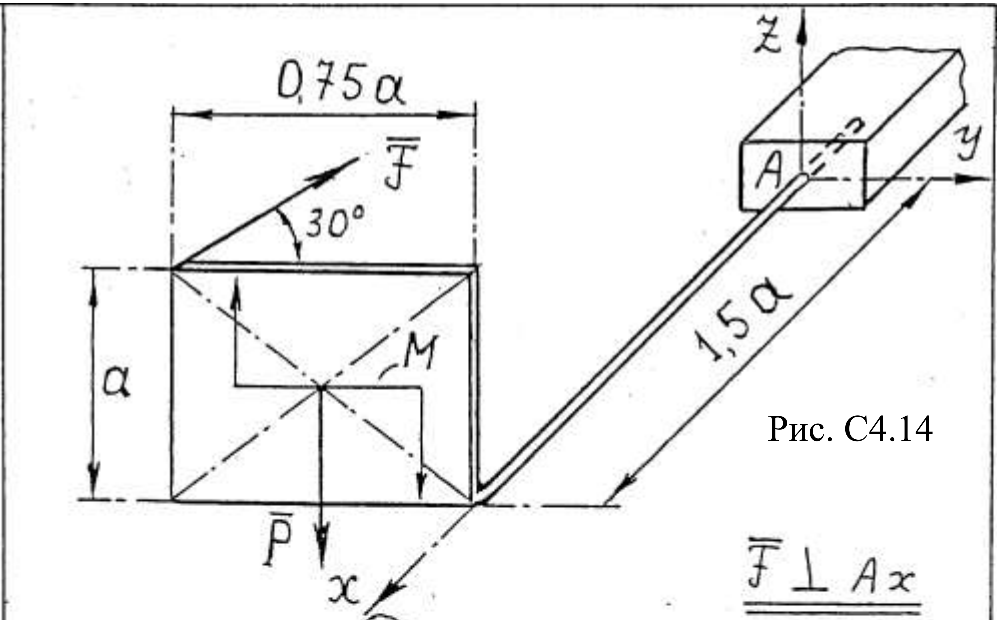


Рис. С4.14

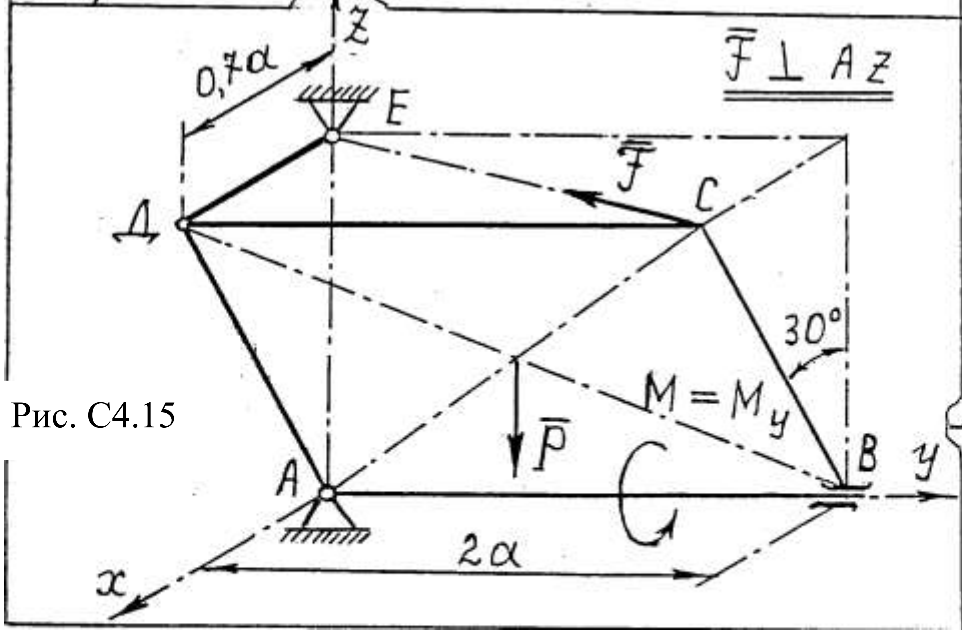


Рис. С4.15

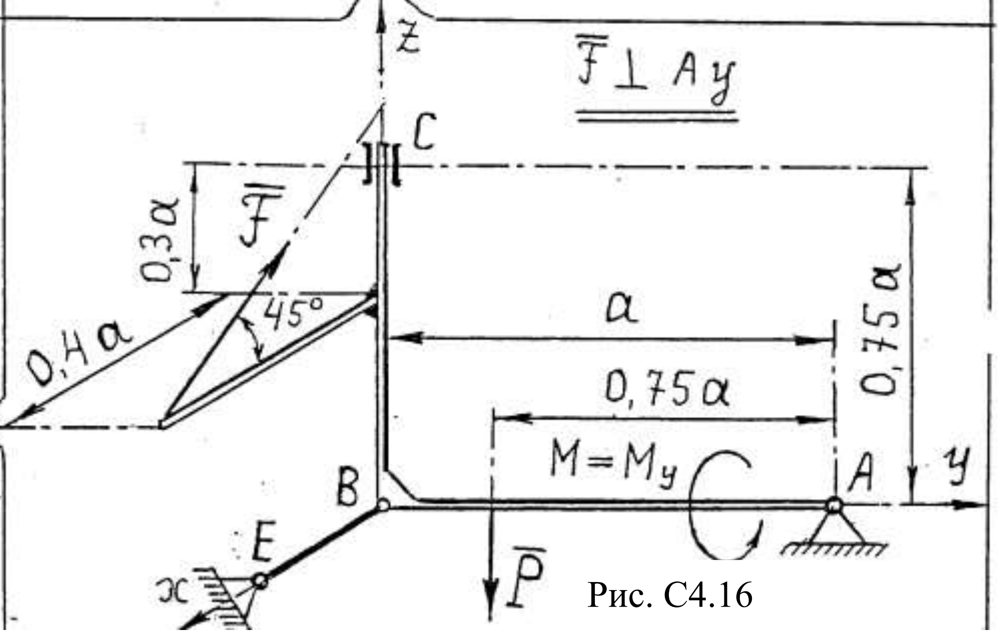
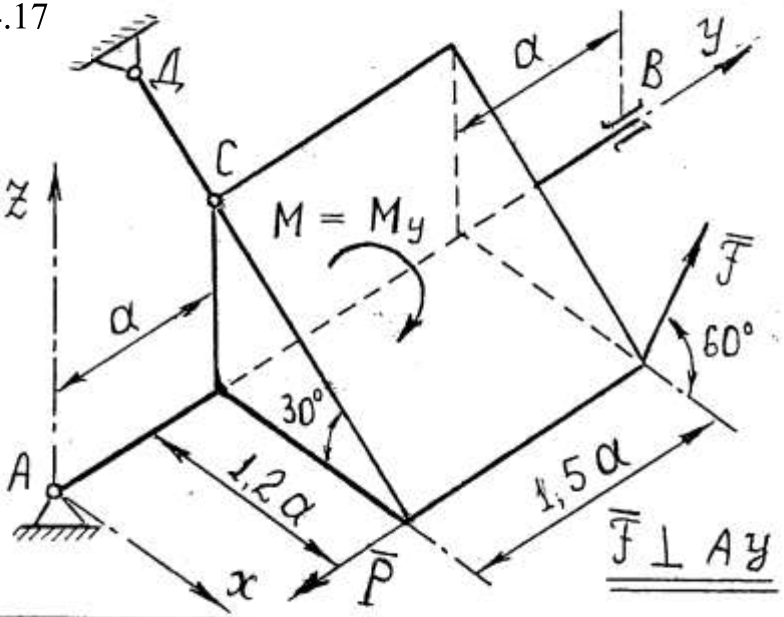


Рис. С4.16

Рис. С4.17



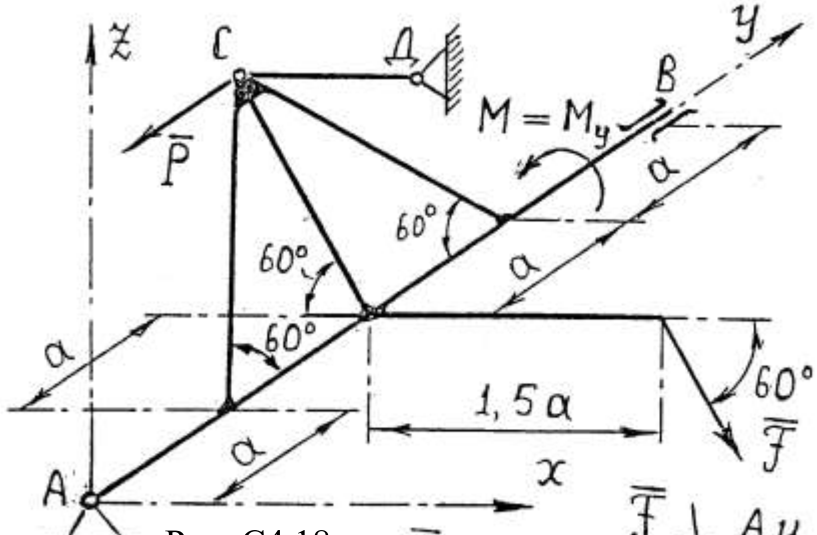


Рис. С4.18

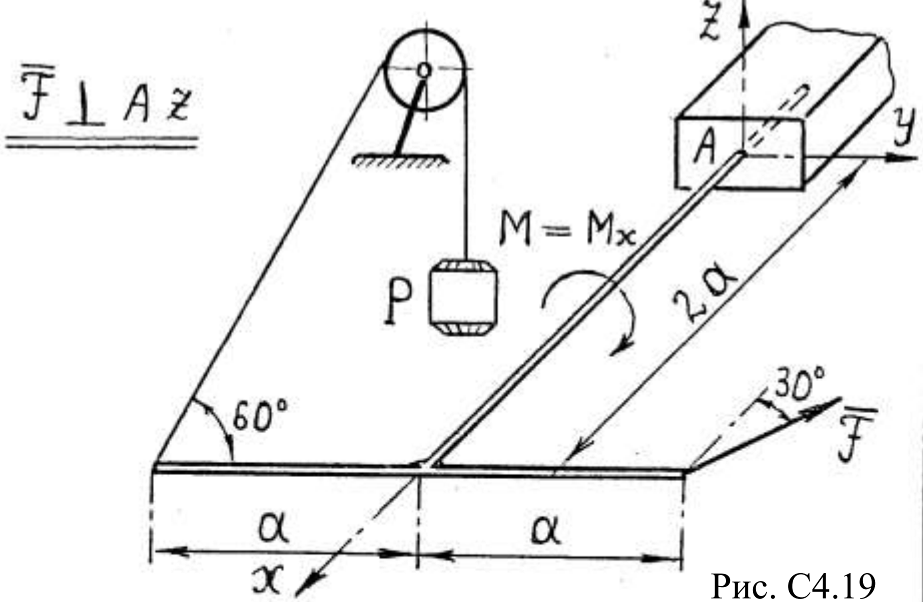


Рис. С4.19

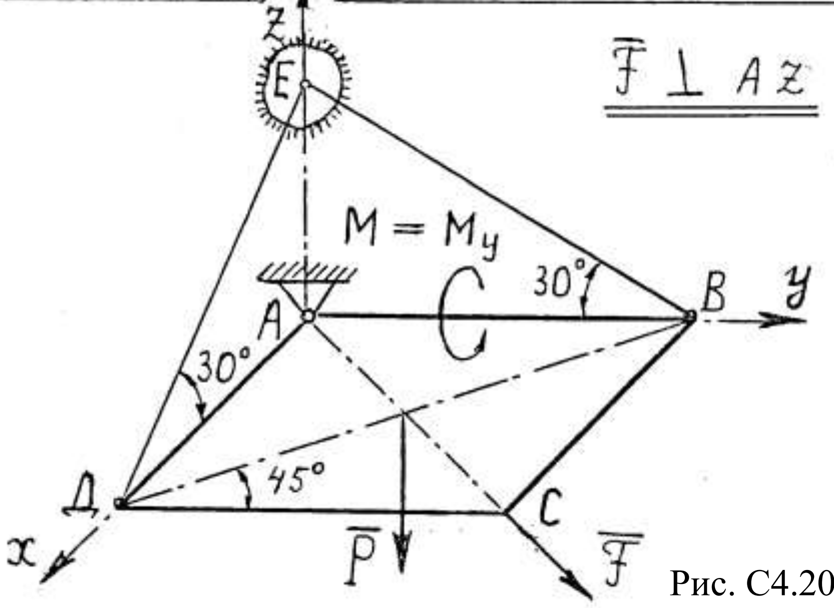


Рис. С4.20

ТЕМА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Задача К1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

По заданным уравнениям движения точки М $x=x(t)$. $y=y(t)$ найти траекторию точки, а также для заданного момента времени $t = t_1$ найти положение точки на ее траектории, определить и построить векторы скорости, нормального, касательного и полного ускорений, вычислить радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Исходные данные для расчета приведены в табл. 4.

Таблица 4

№ варианта	$x=x(t)$, см	$y=y(t)$, см	Время t_1 ,с
К1.1	$5t$	$2-5t^2$	1
К1.2	$3\cos\pi t$	$4\sin\pi t$	5/6
К1.3	$6t^2 -3$	$3t$	1
К1.4	$3\cos(\pi t/3)-2$	$5\sin(\pi t/3)$	4
К1.5	$2t$	$t^2 -3$	2
К1.6	$5\sin(\pi t/3)$	$3\cos(\pi t/3)-2$	2
К1.7	$2t$	$4t-6t^2$	1
К1.8	$4\cos(\pi t/2)$	$3\sin(\pi t/2)$	1,5
К1.9	$4t^2 +3$	$2t$	1
К1.10	$3\sin(\pi t/2)$	$4\cos(\pi t/2)$	0,5

К1.11	$3t$	$5-3t^2$	2
К1.12	$2\sin(\pi t/6)-4$	$3\cos(\pi t/6)$	2
К1.13	$4t^2 +1$	$4t$	1
К1.14	$3\cos(\pi t/6)$	$2\sin(\pi t/6)-3$	5
К1.15	$6\sin(2\pi t)$	$4\cos(2\pi t)$	2/3
К1.16	$3t^2 +4t$	$-2t$	1
К1.17	$4\cos(2\pi t)$	$6\sin(2\pi t)$	1/3
К1.18	$5t-6t^2$	$2t$	1
К1.19	$2\sin(\pi t/6)-3$	$3\cos(\pi t/6)$	2
К1.20	$4t-5t^2$	$2t$	2

Задача К2

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

•**К2.1.** Турбина вращается равноускоренно вокруг неподвижной оси. В начальный момент времени угловая скорость турбины $\omega_0 = 30\pi$ $с^{-1}$ и через 30с достигает значения 39π $с^{-1}$. Найти закон вращения турбины, а также определить в момент времени $t_1 = 40$ со скорость и ускорение точки турбины, отстоящей от оси вращения на расстоянии 0.6 м.

•**К2.2.** Движение точки вращающегося тела задано уравнениями $x = 10\cos 2t^2$; $y = 10\sin 2t^2$ (x и y - в см, t - в с). Найти закон вращения, скорость и ускорение точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии r = 6 см. Начальная угловая скорость тела $\omega_0 = 0$ $с^{-1}$.

•**К2.3.** Винт совершившего посадку самолета с момента выключения мотора совершил до остановки 100 оборотов. Начальная скорость винта соответствовала 1200 об/мин. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки винта, если считать его вращение равнозамедленным?

•**К2.4.** Вращение маховика в период пуска машины происходит по закону $\varphi = 0.5\pi t^3$,где φ задан в радианах, а время t - в секундах. Найти скорость и ускорение точки маховика, отстоящей от оси вращения на 0.3 м в момент, когда маховик совершил 16 оборотов.

•**К2.5**. Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 30°. Нормальное ускорение точки в данный момент $a_п = 10\sqrt{3}$ м/с^2. Найти касательное и полное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии r = 0.6 м. Радиус махового колеса R= 1 м.

•**К2.6.** Диск турбины, вышедшей из состояния покоя, вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At^3 + Bt^2$, где φ задан в радианах, а время t - в секундах; A и B - постоянные коэффициенты. В момент времени $t_1 = 2$ с и t_2 ,= 3 с угловая скорость диска достигает значений $\omega_1 = 2$ $с^{-1}$ и $\omega_2 = 3$ $с^{-1}$. Определить угловое ускорение точки диска, отстоящей от оси вращения на 30 см, в момент времени $t_3 = 4$ с.

•**К2.7.** Угловая скорость винта совершившего посадку самолета, равная в данный момент 80π $с^{-1}$, через 10 секунд после выключения мотора становится равной 40π $с^{-1}$. Считая вращение винта равнозамедленным, определить скорость и ускорение точки винта в момент $t_1 = 12$ с, если расстояние до этой точки от оси вращения равно 1.5 м.

•**К2.8.** Ротор турбины имел угловую скорость, соответствующую 3000 об/мин. Вращаясь затем равнозамедленно, он уменьшил за 20 со свою угловую скорость до 1500 об/мин. Сколько оборотов сделал ротор за это время? Найти время вращения ротора до остановки.

•**К2.9.** Маховое колесо радиуса R = 0.5 м имело начальную скорость $\omega_0 = 30\pi$ $с^{-1}$. Определить закон вращательного движения колеса, считая его равнозамедленным, а также касательное, нормальное и полное ускорение точки, лежащей на его ободе, если линейная скорость этой точки через 2 с после начала движения V = 30 $мс^{-1}$ и начальный угол $\varphi_0 = 0$.

•**К2.10.** Маховое колесо, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, в первые 3 мин совершает 4050 оборотов. Определить скорость и ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии 0.8 м.

•**К2.11.**Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60°. Касательное ускорение точки в данный момент $a_\tau = 20\sqrt{3}$ $мс^{-2}$. Найти нормальное и полное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии г= 0.5 м. Радиус махового колеса R = 0.8 м.

•**К2.12.** Колесо, имеющее неподвижную ось вращения, получило начальную угловую скорость 4π c^{-1} . Сделав 20 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках, остановилось. Определить угловое ускорение колеса, считая его постоянным, а также время вращения колеса до остановки.

•**К2.13.** Маховик вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At^3 + Bt^2$, где φ задан в радианах, а время t - в секундах; A и B - постоянные коэффициенты. В момент времени $t_1 = 3c$ угловая скорость маховика и его угловое ускорение имели значения $\omega_1 = 72$ c^{-1} и $\varepsilon = 42$ c^{-2}. Определить угловое ускорение маховика, а также скорость и ускорение его точки, отстоящей от оси вращения на 20 см в момент времени $t_2 = 4c$.

•**К2.14.** Маховик, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, приобрел угловую скорость n = 1200 об/мин, совершив при этом 400 оборотов. Определить за какое время маховик совершил эти 400 оборотов и с каким угловым ускорением он вращался.

•**К2.15.** Составить уравнение вращения диска турбины при пуске в ход, если угол поворота пропорционален кубу времени и при $t_1 = 4$ с, угловая скорость диска достигла значения $\omega_1 = 96$ c^{-1}. Найти скорость и ускорение точки диска в момент времени $t_2 = 5$ с , если расстояние до этой точки от оси вращения равно 0.5 м.

•**К2.16.** Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \pi(t^3 + 4t)$ где φ задан в радианах, а время t - в секундах. В момент времени $t_1 = 4$ с найти угловую скорость и угловое ускорение тела, линейную скорость и ускорение точки тела, отстоящей на 0.2 м от оси вращения, а также число оборотов, которое совершило тело.

•**К2.17.** Маховое колесо начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя. Через 2 минуты после начала движения оно имеет угловую скорость, соответствующую 240 об/мин. Сколько оборотов сделало колесо за

3 минуты? Найти скорость и ускорение точки колеса на расстоянии 0.4 м от оси вращения в момент времени t_1 ,=4 мин.

•К2.18. Точка на ободе маховика в период разгона движется по закону $S = 0.8(t^3 + 3t^2)$, где угол φ задан в радианах, а время t - в секундах. Радиус маховика R = 1.6 м. Найти угловую скорость и угловое ускорение маховика, а также нормальное, касательное и полное ускорение точки обода маховика в тот момент времени, когда ее линейная скорость составляет $V=36$ $мс^{-1}$. Сколько оборотов совершил маховик к этому моменту времени?

•К2.19. Диск турбины вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At^2 + Bt$, где φ задан в радианах, а время t - в секундах; A и B - постоянные коэффициенты. Остановка диска турбины произошла через 2 мин после ее отключения. Угловая скорость диска в момент времени $t_1 = 60$ с имела значение $\omega_1 = 120$ $с^{-1}$. Найти скорость и ускорение точки диска, отстоящей от оси вращения на 10 см, в момент времени $t_2 = 90$ с.

•К2.20. Тело начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя. В тот момент, когда его угловая скорость численно равна углу поворота, оно делает 120 об/мин. Чему равно угловое ускорение тела и сколько оборотов оно сделало за первые 15 с? Найти линейную скорость точки тела, а также ее нормальное, касательное и полное ускорение в указанный момент времени при условии, что точка находится от оси вращения на расстоянии 0.4м.

Задача К3

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

На рис. К3.1-К3.20 показаны схемы механизмов, причем O_1 А = L_1 = 0.4м; АВ = L_2 = 1.4м; ДЕ = L_3 = 1.2 м; 0_2В = L_4 = 0.6 м; АД=ДВ.

<u>Варианты К3.1 - К 3 . 1 0</u>

Кривошип O_1А вращается вокруг оси O_1с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \omega_{OA} = 4$ c^{-1}. Для заданного положения механизма построить мгновенные центры скоростей шатунов АВ и ДЕ, найти скорости точек А, В, Д, Е, угловые скорости указанных шатунов и кривошипа O_2 В, а также ускорение точки В.

<u>Варианты К3.1 0 - К 3 . 2 0</u>

Ползун в данном положении механизма имеет скорость V_B = 4 м/с и ускорение a_B = 6 м/c^2. Для заданного положения механизма построить мгновенные центры скоростей шатунов АВ и ДЕ, найти скорости точек А, Д, Е, угловые скорости указанных шатунов и кривошипа O_1А, а также ускорение точки А.

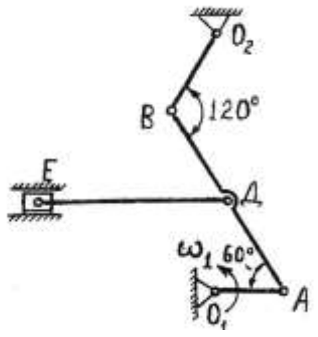


Рис. К3.1

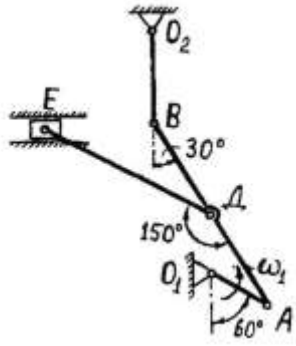


Рис. К3.2

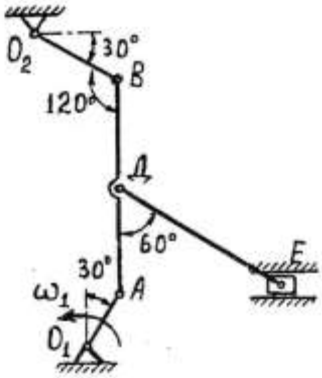


Рис. К3.3

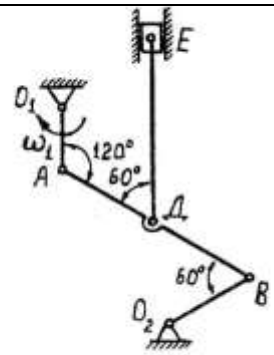


Рис. К3.4

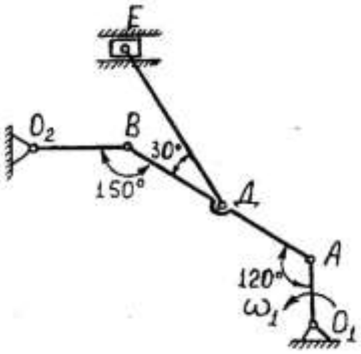


Рис. К3.5

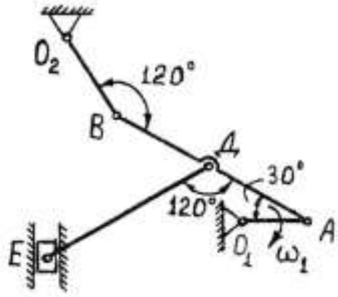


Рис. К3.6

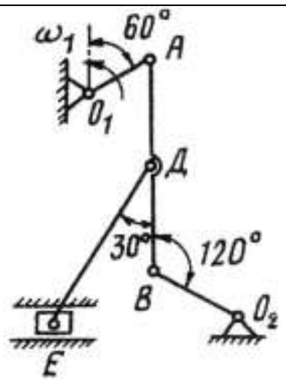


Рис. К3.7

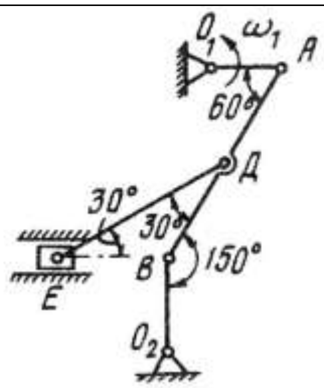


Рис.К3.8

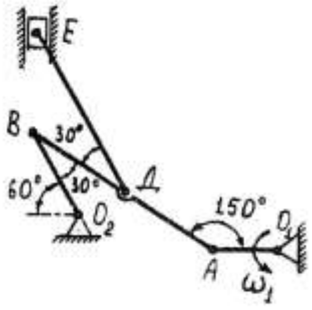


Рис. К3.9

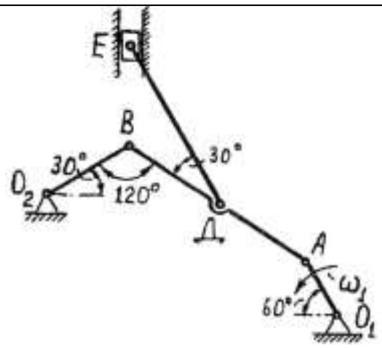


Рис. К3.10

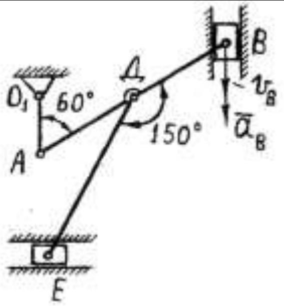


Рис. К3.11

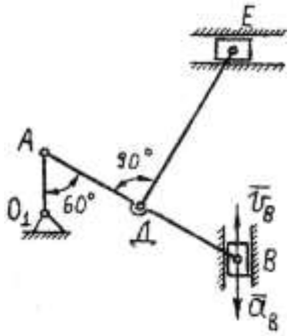


Рис. К3.12

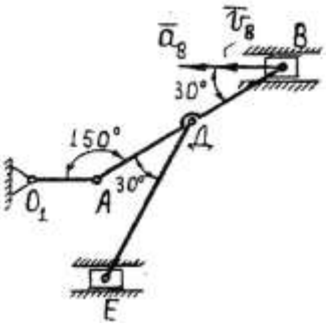


Рис. К3.13

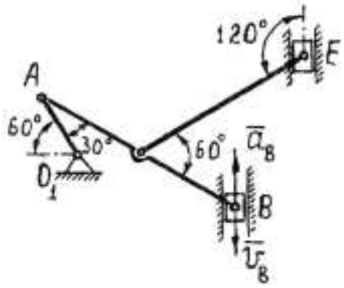


Рис. К3.14

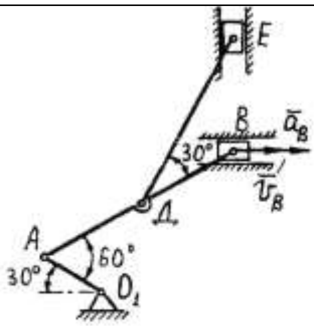


Рис. К3.15

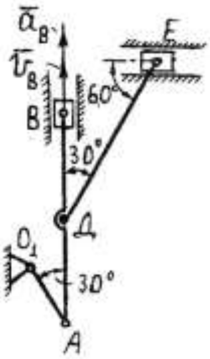


Рис. К3.16

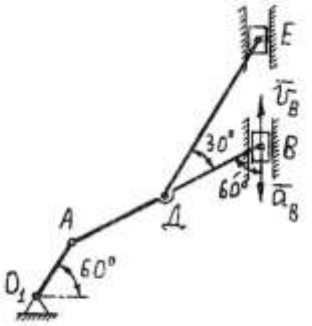


Рис. К3.17

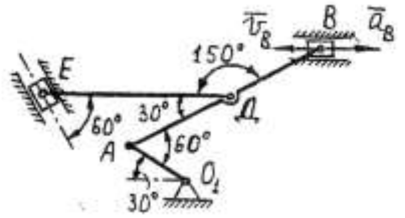


Рис. К3.18

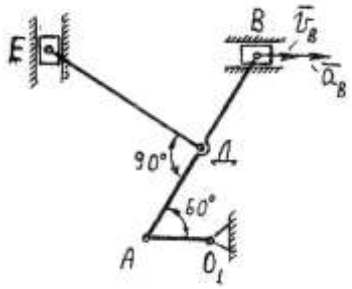


Рис. К3.19

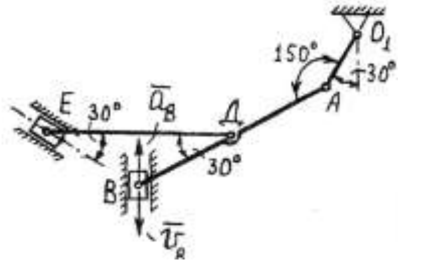


Рис. К3.20

Задача К4

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

К4.1. Диск радиуса R = 0.3 м вращается вокруг оси 0Z с угловой скоростью со = 2 c^{-1}. По его ободу движется точка с постоянной скоростью $V_{отн}$ = 0.3 м c^{-1} . Определить абсолютную скорость точки в указанном положении, если угол α= 60°.

К4.2. По стержню шарнирного параллелограмма $OABO_1$, движется точка с постоянной скоростью $V_{отн}$ = 31 м c^{-1} . Определить абсолютную скорость точки М в момент времени, когда угол α = 60°. Угловая скорость стержня ОА длиной 0.2 м равна со = 4 c^{-1}

К4.3. Трубка вращается вокруг оси 0Z с угловой скоростью со =2 c^{-1}. Шарик М движется вдоль трубки по закону $M_0M = 0.5t^2$ м c^{-1} . Определить абсолютную скорость шарика М в момент времени t_1=2с.

К4.4. Пластина АВС вращается вокруг оси 0Z по закону $\varphi = 4t^3$ рад, а по ее стороне АС движется точка М согласно уравнения АМ = O.3t^2 м . Определить абсолютное ускорение точки М в момент времени t_1 = 1с.

К4.5. Звено ОА = 0.5 м вращается согласно уравнения $\varphi = 4t^3$ рад. По дуге окружности радиуса г = 0.3 м движется точка М по закону АМ = S = 2гt м . Определить абсолютную скорость точки М в момент времени $t_1 = \pi/4$ с, когда угол α = 60°.

К4.6. Стержень ВС кулисного механизма движется со скоростью V= 1 м c^{-1} . Для указанного положения механизма определить угловую скорость кулисы ОА, если расстояние ОВ = 0.7 м.

К4.7. Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси 0Z с угловой скоростью $\omega = 2$ с$^{-1}$, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении угловую скорость $\omega_1 = 1.2$ с$^{-1}$. Найти абсолютную скорость шаров регулятора, если длина стержней 1 = 0.5 м, расстояние между осями их подвеса $O_1O = 2e = 0.1$ м, угол $\alpha = 30°$.

К4.8. В кулисном механизме при качании кривошипа ОА вокруг оси О ползун В, перемещаясь вдоль кривошипа ОА, приводит в движение стержень ВС . Определить скорость движения ползуна В относительно кривошипа в функции угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

К4.9. В кулисном механизме кривошип ОА длиной 0.3м вращается с угловой скоростью $\omega = 3\pi$ с$^{-1}$. Определить скорость кулисы ВС в момент времени, когда кривошип образует с осью кулисы угол $\alpha = 30°$.

К4.10._ К валу электромотора, вращающемуся согласно уравнения $\varphi = \omega t$, прикреплен под прямым углом стержень ОА длины ***l***. Электромотор, установленный без креплений, совершает гармонические колебания по закону .$x = b\cos \omega t$. Определить абсолютную скорость точки А в момент времени $t_1 = \pi/2\omega$.

К7.11. Точка М движется по ободу диска радиуса R = 0.3 м со скоростью $V_{отн} = 4$ мс$^{-1}$. Определить абсолютную скорость точки М в указанном положении, если закон вращения диска $\varphi = 21^2$ рад.

К4.12. Точка М движется по ободу диска радиуса R = 0.2 м согласно уравнению ДМ = 3г^2+21 м . Определить абсолютную скорость точки М в указанном положении, если закон вращения диска $\varphi = 2X$ рад.

К4.13. По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны АВ с угловой скоростью $\omega = 4$ с$^{-1}$, движется точка М с постоянной скоростью $V_{отн}$

= 2 мс$^{-1}$. Определить абсолютную скорость точки в этот момент времени, если длина МВ = 0.3 м., угол α = 30°.

К4.14. Пластина АВСД вращается вокруг оси 0Z с угловой скоростью со = 4t^2 с$^{-1}$. По ее стороне ВС в направлении от В к С движется точка М с постоянной скоростью 8 м с$^{-1}$. Определить абсолютную скорость точки в момент времени t = 2с, если длина АВ = 0.6 м.

К4.15. Тело в виде полуцилиндра скользит по горизонтальной плоскости со скоростью V = 0.2 м с$^{-1}$, поворачивая шарнирно закрепленный в точке А стержень АВ . Определить относительную скорость точки касания М стержня АВ, если угол α = 30°.

К4.16. По диаметру диска, вращающегося вокруг вертикальной оси 0Z с угловой скоростью со = 3t^2 с$^{-1}$, движется точка М по закону $S_{отн}$ = 0.6t^2 м с$^{-1}$. Определить абсолютную скорость точки М в момент времени t = 1с.

К4.17. Квадратная плита вращается вокруг оси 0Z с угловой скоростью со = 3 с$^{-1}$. Вдоль стороны плиты движется точка М с постоянной скоростью $V_{отн}$ = 4 м с$^{-1}$. Определить абсолютную скорость точки М в указанном положении, если сторона квадрата равна 30 см.

К4.18. Конус вращается вокруг оси 0Z с постоянной угловой скоростью со = 3 с$^{-1}$. По его образующей с постоянной скоростью $V_{отн}$= 2 м с$^{-1}$ движется точка М в направлении от А к В . Определить абсолютную скорость этой точки в положении, когда расстояние АМ = 0.8 м, если угол α = 30°.

К4.19. Конус, по образующей которого движется точка М согласно уравнения АМ = 2t м, вращается вокруг оси 0Z по закону φ = 4sin(πt/3) рад. Определить абсолютную скорость точки М в момент времени t_1 = 1с, если угол α= 30° .

К4.20. По стороне АВ прямоугольной пластины, вращающейся в плоскости чертежа, движется точка М по закону, АМ= 3sin(πt/6). В момент времени t_1 =1с угловая скорость пластины со = 3 $с^{-1}$ Определить абсолютную скорость этой точки в этот момент, расстояние ОА = 1 м.

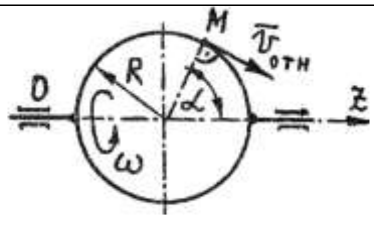


Рис. К4.1

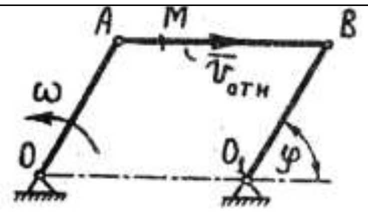


Рис. К4.2

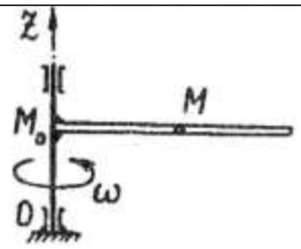


Рис. К4.3

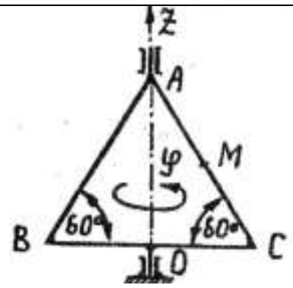


Рис. К 4.4

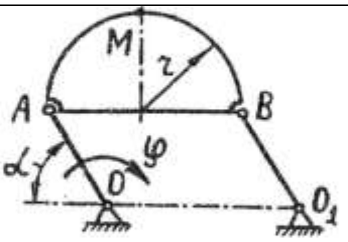


Рис. К4.5

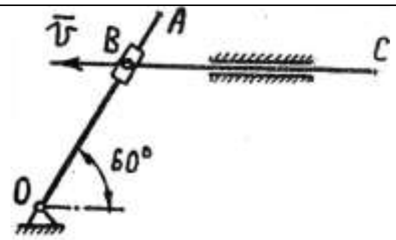


Рис. К4.6

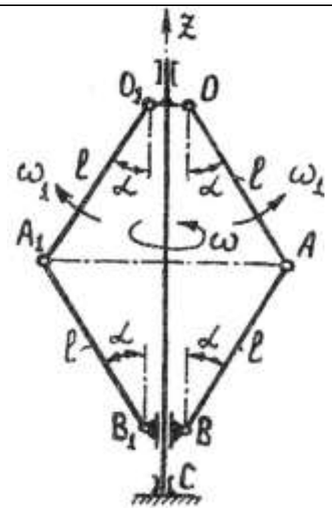


Рис. К4.7

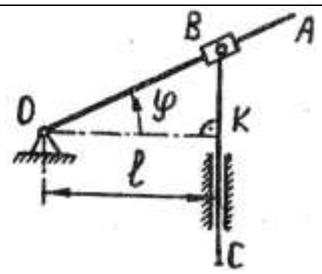


Рис. К4.8

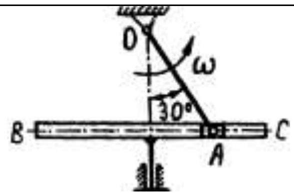


Рис. К4.9

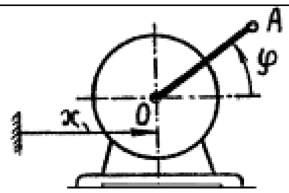


Рис. К4.10

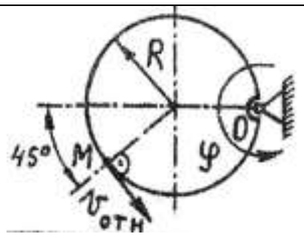


Рис. К4.11

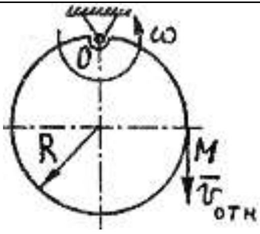


Рис. К4.12

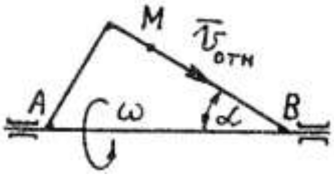


Рис. К4.13

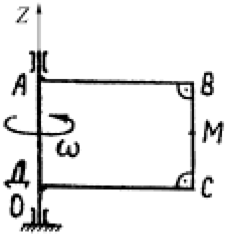


Рис. К4.14

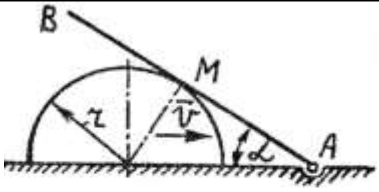


Рис. К4.15

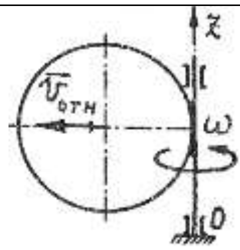


Рис. К4.16

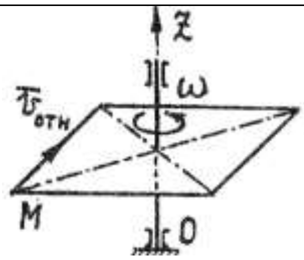


Рис. К4.17

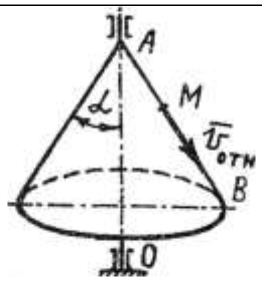


Рис. К4.18

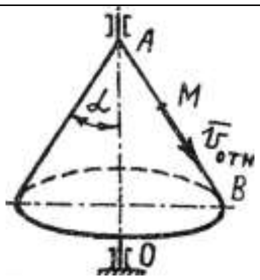


Рис. К4.19

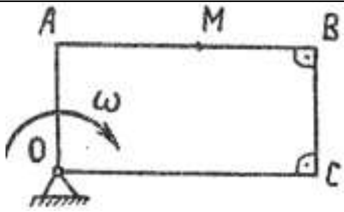


Рис. К4.20

ТЕМА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ

Задача Д1

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Д1.1. Гиря массы $\boldsymbol{m = 0{,}2}$ ***кг*** подвешена к нити длиной $\boldsymbol{l = 1}$ ***м,*** вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость $\mathbf{V} = 3$ ***м/с.*** Определить натяжение нити непосредственно после толчка.	**Д1.2.** Груз, привязанный к нити длиной $\boldsymbol{l}$, движется по окружности в вертикальной плоскости. Какую минимальную скорость в наивысшем положении должен иметь груз, чтобы нить оставалась натянутой?
Д1.3. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой $\boldsymbol{m}$=**3кг** в момент времени $\boldsymbol{t} = \mathbf{6}$ **с**, если она движется по оси Ох согласно уравнению $\boldsymbol{x = 0.4t^3+21t}$.	**Д1.4**. Вагон массой $\boldsymbol{m=9000}$ ***кг*** скатывается с горки . Какой угол к горизонту должна иметь горка, для того чтобы вагон двигался с ускорением $\boldsymbol{a = 3}$ ***м/с***^{2}? Угол выразить в градусах.
Д1.5. Точка массой $\boldsymbol{m = 4}$ ***кг*** движется по горизонтальной прямой с ускорением $\boldsymbol{a = 0{,}3t}$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени $\boldsymbol{t = 3}$ ***с***.	**Д1.6**. Груз массы $\boldsymbol{m = 0{,}1}$ ***кг,*** подвешенный на нити длиной $\boldsymbol{l = 0{,}4}$***м*** в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причём нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Определить скорость груза и

	натяжение нити.
Д1.7. Автомобиль массы ***m = 1500 кг*** движется по вогнутому, участку дороги со скоростью ***V = 10 м/с.*** Радиус кривизны в нижней точке дороги $\boldsymbol{\rho}$ ***= 60 м***. Определить силу давления автомобиля на дорогу в момент прохождения этого участка дороги.	**Д1.8**. Локомотив, двигаясь с ускорением ***a = 1 м/с²*** по горизонтальному участку пути, перемещает вагоны массой 60000 кг. Определить силу в автосцепке, если сила сопротивления движению состава равна $F_c = 0.002mg$.
Д1.9. Тело массой ***m = 4 кг*** движется по горизонтальной прямой со скоростью $\boldsymbol{V = 0{,}9t^2+2t}$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени *t* = 3 с.	**Д1.10**. Искусственный спутник Земли описывает круговую орбиту радиуса R на небольшой высоте над поверхностью Земли (изменением силы тяжести на этой высоте по сравнению с силой тяжести на поверхности Земли можно пренебречь). Определить скорость движения спутника по орбите и время одного оборота спутника. Радиус Земли ***R= 6380 км***.
Д1.11. Материальная точка массой m=2 кг движется по окружности радиуса R = 0,6 м согласно уравнению $\boldsymbol{S= 2{,}4t^2}$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.	**Д1.12**. Материальная точка массой ***m=100кг*** движется в плоскости ***Oxy*** согласно уравнениям $\boldsymbol{x = at^2}$, $\boldsymbol{y = bt}$, где ***a=10 и b=100*** - постоянные. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.

Д1.13. Груз массы m = 100 кг, подвешенный к концу намотанного на барабан троса, движется с ускорением ***a* = 0,2 *g***.. Определить натяжение троса при подъёме и опускании груза.	**Д1.14**. Материальная точка массой ***m = 16 кг*** движется по окружности радиуса ***R = 9 м*** со скоростью ***V=3 м/с***. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на главную нормаль к траектории.
Д1.15. Материальная точка массой m= 9 кг движется в горизонтальной плоскости Oxy с ускорением $a = 4\bar{i} + 3\bar{j}$. Определить модуль силы, действующей на нее в плоскости движения.	**Д1.16** .Движение материальной точки массой ***m = 8 кг*** происходит в горизонтальной плоскости ***Oxy*** согласно уравнениям ***x = 5t и y = t***^{3}. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени t = 4 с.
Д1.17. Автомобиль массы ***m = 1500 кг*** движется по выпуклому участку дороги со скоростью **V = *10 м/с***. Радиус кривизны в верхней точке дороги **ρ = *60 м***. Определить силу давления автомобиля на дорогу в момент прохождения этого участка дороги.	**Д1.18**. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой ***b=5 см***. Найти наименьшую частоту ***k*** колебаний решета, при котором куски руды, лежащие на нём, отделяются от него и подбрасываются вверх.
Д1.19. Материальная точка массы т движется в плоскости согласно уравнениям $x = a\cos\omega t;\ y = b\sin\omega t$. Найти силу, действующую на точку.	**Д1.20**. Определить давление человека массой m = 80 кг на площадку лифта в начале подъёма и перед остановкой; ускорение (замедление) лифта a = 0,2g.

З а д а ч а Д2

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Д2.1. Вагон массой $\boldsymbol{m}$ ударяет в пружинный амортизатор жёсткостью $\boldsymbol{c}$, имея в момент начала удара скорость $\boldsymbol{V_0}$. Определить максимальную деформацию пружины амортизатора, пренебрегая её массой и полагая её недеформированной перед ударом.
Д2.2. Маховое колесо радиуса $\boldsymbol{R}$ и веса $\boldsymbol{P}$ вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ***со***. Колесо останавливают с помощью тормозной колодки силой $\boldsymbol{R}$, линия действия которой проходит через ось маховика перпендикулярно этой оси. Найти коэффициент трения между тормозной колодкой и ободом колеса, если оно до остановки сделало $\boldsymbol{N}$ оборотов. Трением в подшипниках пренебречь.
Д2.3. Барабан массой $\boldsymbol{m}$ и радиусом r приводится во вращательное движение из состояния покоя моментом $\boldsymbol{M}$. Определить ускорение поднимаемого с помощью троса груза массой $\boldsymbol{m_1}$. Барабан считать однородным цилиндром, массой троса пренебречь.
Д2.4. Транспортёр приводится в движение из состояния покоя моментом $\boldsymbol{M}$, приложенным к нижнему шкиву. Определить ускорение груза массой $\boldsymbol{m}$, если шкивы А и В радиусом r и массой $\boldsymbol{m}_1$ каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортёра, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам и груза по ленте отсутствует.

Д2.5. Тележка начинает движение из состояния покоя под действием момента ***M,*** приложенного к передним колёсам. Масса тележки без колёс равна $\boldsymbol{m_1}$ масса каждого из четырёх колёс радиусом r равна $\boldsymbol{m_2}$, коэффициент трения качения $\boldsymbol{\delta}$. Определить ускорение тележки, считая колёса однородными дисками.
Д2.6. Тележка начинает движение без скольжения из состояния покоя под действием горизонтальной силы ***P***. Масса тележки без колёс равна $\boldsymbol{m_1}$ масса каждого из четырёх колёс радиусом r равна $\boldsymbol{m_2}$, коэффициент трения качения δ. Определить скорость тележки, считая колеса однородными дисками.
Д2.7. Чему равна кинетическая энергия зубчатой передачи двух цилиндрических колес с числом зубьев $\boldsymbol{z_2= 2\, z_1}$, если их момент инерции относительно осей вращения $\boldsymbol{I_2= 2\, I_1=6}$ ***кгм***^{2}, а угловая скорость колеса 1 равна $\boldsymbol{\omega_1}$***=10 рад/с***.
Д2.8. На горизонтальный вал насажен маховик диаметром ***D*** делающий ***n*** *[об/мин]*. Определить коэффициент трения скольжения между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал ***n*** оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределённой по его ободу. Массой вала пренебречь.
Д2.9. Шар весом ***P,*** лежащий на пружине с коэффициентом жёсткости ***c***, вызывает статическую осадку пружины ***0,025 м***. Какова будет осадка пружины, если тот же шар упадёт на пружину с высоты ***h = 0,1 м.*** Массой пружины пренебречь.

Д2.10. Оси колеса радиусом ***r***, находящемуся на горизонтальной плоскости, сообщили скорость V_0. Коэффициент трения качения равен δ. Определить путь, пройденный колесом до остановки. Качение колеса происходит без скольжения. Колесо считать однородным диском.
Д2.11. Однородный диск массой ***m= 30 кг*** радиуса ***R=1 м*** начинает вращаться из состояния покоя равноускорено с постоянным угловым ускорением $\varepsilon=2рад/с^2$. Определить кинетическую энергию диска в момент времени ***t=2с*** после начала движения.
Д2.12. Снаряд массой ***m*** вылетает из ствола орудия со скоростью V_0 Длина ствола орудия ***l.*** Найти силу среднего давления газов на снаряд.
Д2.13. Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса ***R*** для того, чтобы оно, катясь без скольжения, поднялось на высоту ***H*** по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен δ. Колесо считать однородным диском.
Д2.14. Стержень длиной ***l*** подвешен на шарнире О. Какую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он поднялся до горизонтального положения ?
Д2.15. Однородная цепочка длиной ***l*** лежит на гладком горизонтальном столе, и часть её свешивается. Предоставленная самой себе, цепочка соскальзывает со стола. Найти скорость цепочки в тот момент, когда она вся сойдёт со стола, если в начальный момент длина свешивающейся части

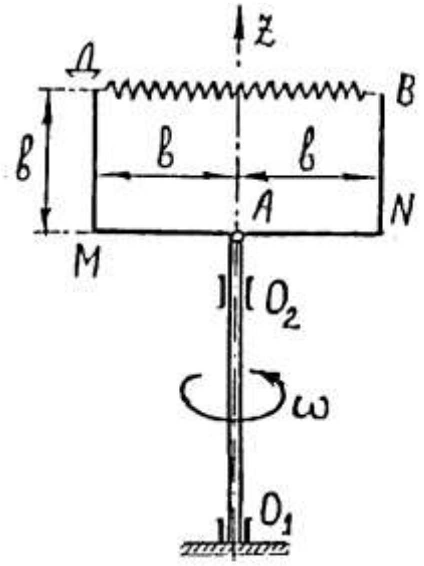
незначительна.
Д2.16. Лыжник скатывается с горки. Длина горки - ***l*,** угол наклона горки с горизонтом - α, коэффициент трения между лыжами и снегом – ***f*.** Найти расстояние, пройденное лыжником на горизонтальном участке до остановки.
Д2.17. Какую скорость приобрёл бы камень при падении без начальной скорости с высоты ***H*,** если бы не было сопротивления воздуха?
Д2.18. Груз массой ***m*** подвешен к недеформированной пружине жёсткостью ***с*** и отпущен без начальной скорости. Найти наибольшее расстояние, на которое опустится груз.
Д2.19. Шар весом ***P***, лежащий на пружине с коэффициентом жёсткости ***с*** , вызывает статическую осадку пружины ***0,025 м***. Какова будет осадка пружины, если тот же шар упадёт на пружину с высоты ***h = 0,1 м***. Массой пружины пренебречь.
Д2.20. Пружина имеет в ненапряжённом состоянии длину ***20 см.*** Сила, необходимая для изменения её длины на ***0,01 м,*** равна **1,96 *Н***. С какой скоростью ***V*** вылетит из трубки шарик массой ***0,03 кг,*** если пружина была сжата до длины ***0,1 м.*** Трубка с пружиной расположена горизонтально.

З а д а ч а Д3

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

<table>
<tr>
<td>

Д3.1.

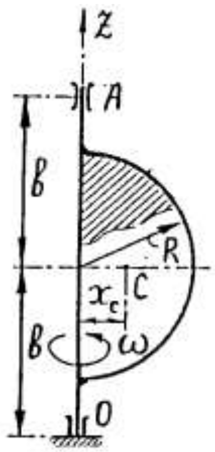


</td>
<td>

Тонкие однородные стержни ANB и АМД одинаковой массы , изогнутые под прямых углом, соединены в точке *A* шарниром. Стержни вращаются вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой, скоростью ***ω*.** При этом они удерживаются в положении, при котором части МД и NB параллельны, а АМ и AN перпендикулярны оси вращения, при помощи пружины ВД. Определить усилие в пружине.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Д3.2.



</td>
<td>

Однородный полукруг массой ***m****,* радиусом ***R*** вращается с постоянной угловой скоростью ***ω*** вокруг оси ОА. Определить реакции подшипника А и подпятника О. Расстояние от центра тяжести полукруга до оси ОА $x_c=4R/3\pi$, где ***R*** - радиус.

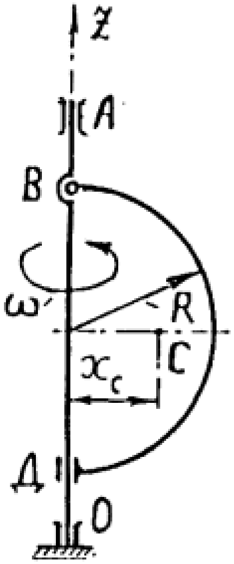
</td>
</tr>
<tr>
<td>

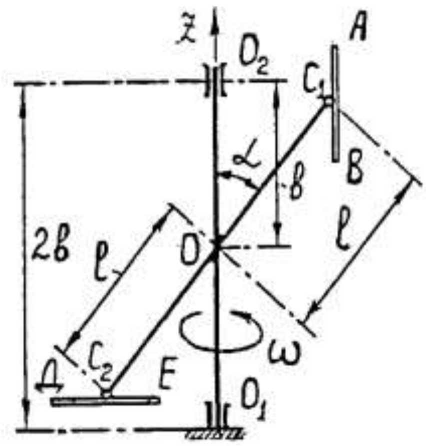
Д3.3.

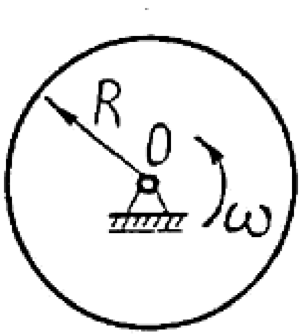
</td>
<td>

Однородная проволочная полуокружность массой ***m****,* радиусом

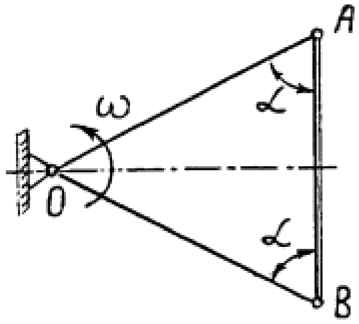
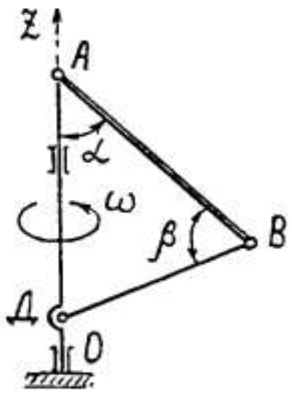
</td>
</tr>
</table>

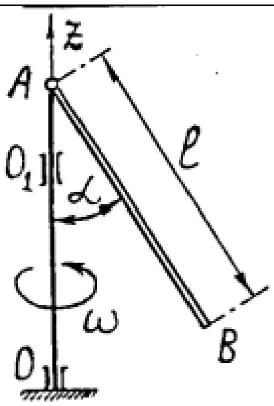
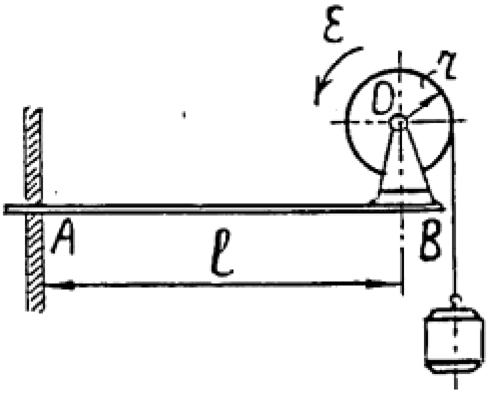
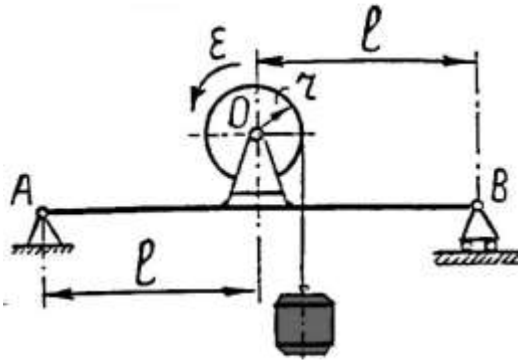
<table>
<tr>
<td>


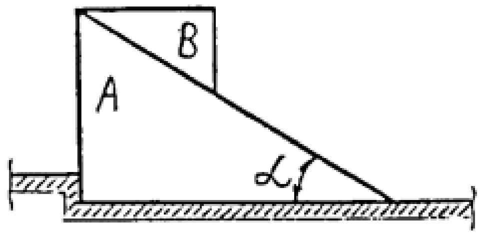
</td>
<td>R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси ОА. Определить реакции в точках крепления В и Д кольца к оси ОА. Расстояние от центра тяжести полуокружности до оси ОА $x_c=2R/3\pi$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Д3.4.


</td>
<td>Два тонких однородных стержня АВ и ДЕ одинаковой массы m скреплены невесомым стержнем C_1C_2 Стержень жёстко соединён с вертикальной осью O_1O_2, с которой он образует угол α. Стержни вращаются вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω. Даны размеры: O_1O = OO_2 = b; C_1O = OC_2= l; AC_1= C_1B; $ДC_2$ = C_2E. Определить реакции подпятника и подшипника.</td>
</tr>
<tr>
<td>Д3.5.


</td>
<td>Тонкое однородное проволочное кольцо массой m, радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси О, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости. Наибольшее усилие, которое выдерживает проволока при</td>
</tr>
</table>

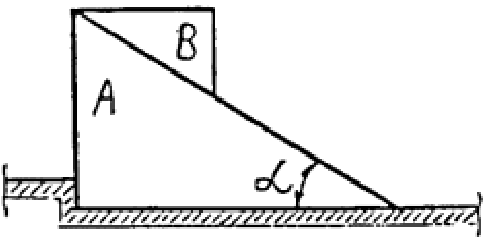
	растяжении, равно $\boldsymbol{S}$. С какой наибольшей угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ может вращаться кольцо без разрыва? Расстояние от центра О до центра тяжести полуокружности $\boldsymbol{x_c=2R/3\pi}$.
ДЗ.6.  	Тонкий однородный стержень АВ массой $\boldsymbol{m}$, лежащий в горизонтальной плоскости, вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг вертикальной оси О, с которой он скреплен одинаковыми невесомыми стержнями ОА и ОВ длиной $\boldsymbol{l}$. Определить реакции этих стержней.
ДЗ.7.  	Тонкий однородный стержень АВ массой $\boldsymbol{m}$ и длиной $\boldsymbol{l}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси ОА. Стержень закреплен на оси при помощи шарнира А и невесомого стержня ВД; положение стержня АВ определяется углами α и β. Определить реакции связей стержня *AB*.
ДЗ.8.	Тонкий однородный стержень АВ длиной $\boldsymbol{l}$ вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг

	вертикальной оси ОА. Вычислить угол отклонения стержня от вертикали, не учитывая трение в шарнире А. При каком наименьшем значении $\boldsymbol{\omega}$ стержень отклонится от вертикали?
ДЗ.9. 	Барабан лебедки радиусом г, установленной на жёсткой балке АВ, вращается с угловым ускорением ε. Масса поднимаемого груза - $\boldsymbol{m}$, момент инерции барабана лебёдки вместе с двигателем равен $\boldsymbol{J_c}$, длина балки - $\boldsymbol{l}$. Определить реакции заделки жёсткой консольной балки АВ. Массой каната и балки пренебречь.
ДЗ.10. 	Барабан лебедки радиусом $\boldsymbol{r}$, установленной на жёсткой балке АВ, вращается с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$. Масса поднимаемого груза - $\boldsymbol{m}$, масса лебедки - $\boldsymbol{M}$. Пренебрегая массами каната и самой балки, определить реакции опор А и В. Центр тяжести О барабана находится на одинаковом расстоянии от опор А и В .
ДЗ.11.	Клин В массой $\boldsymbol{m}$ опускается



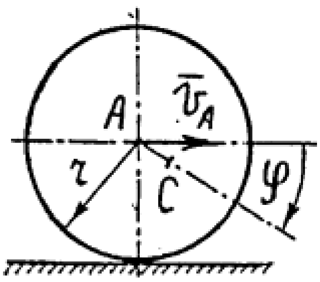
по поверхности клина А, образующей с горизонтом угол α. Определить давление клина А на горизонтальную плоскость, если его масса равна M.

ДЗ.12.

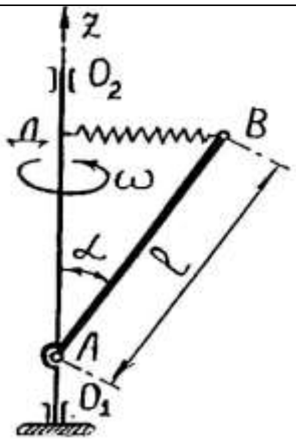


Клин В массой m опускается по поверхности клина А, образующей с горизонтом угол α. Определить давление клина А на вертикальный выступ пола.

ДЗ.13.

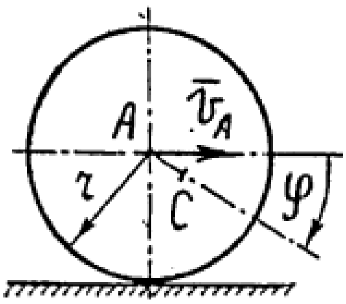
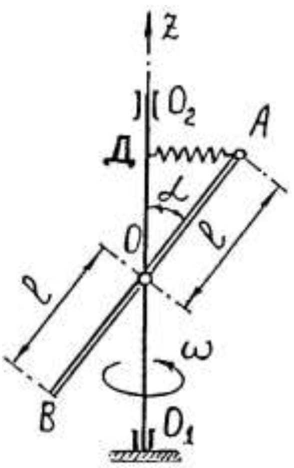
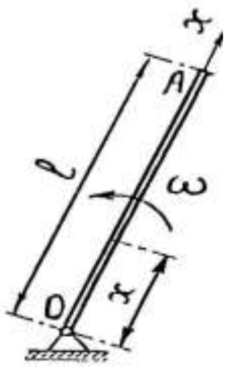


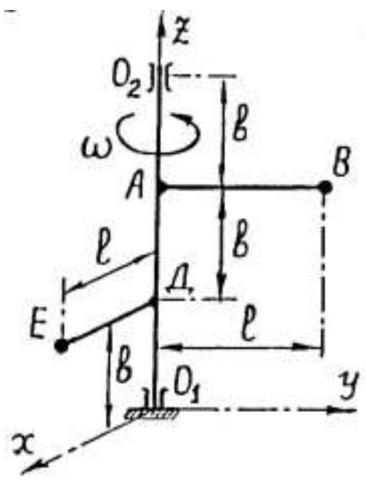
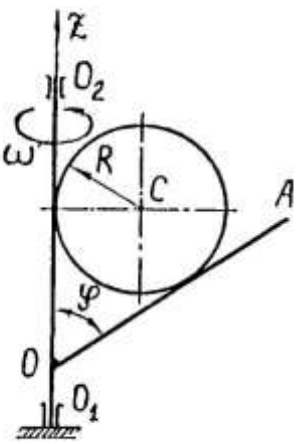
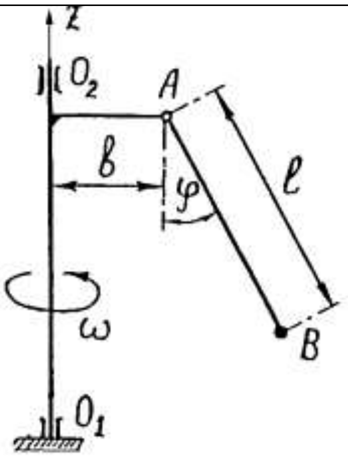
Ось колеса А массой $m = 300$ *кг,* радиусом $r = 0{,}5$ *м* движется с постоянной скоростью $V_A = 20$ *м/с.* Центр тяжести С колеса смещен от его оси А на расстояние $AC = h = 0{,}02$ *м*. Определить давление колеса на рельс, когда его центр тяжести занимает наивысшее положение. Колесо катится без скольжения.



ДЗ.14.

Тонкий однородный стержень АВ массой m, длиной l, закрепленный на оси O_1O_2 в точке А, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω, образуя с ней угол α. Определить усилие в пружине ВД.

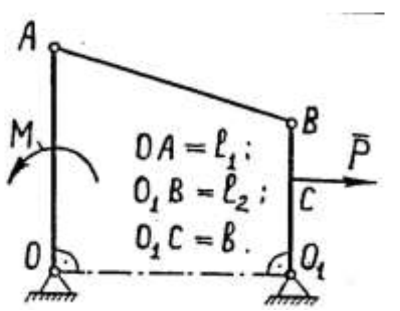
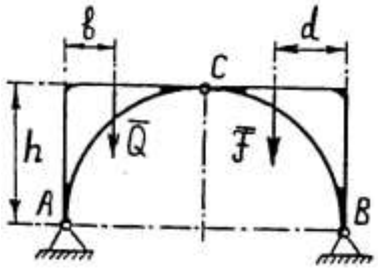
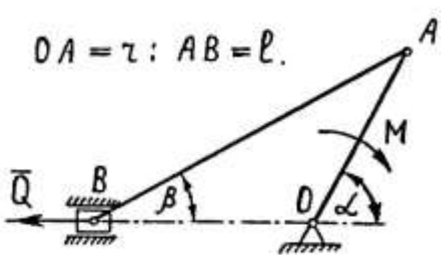
ДЗ.15.  	Ось колеса А массой ***m* = *300 кг,*** радиусом ***r* = *0,5 м*** движется с постоянной скоростью $\mathbf{V_A}$ = ***20 м/с.*** Центр тяжести С колеса смещен от его оси А на расстояние ***AC* = *h* = *0,02 м*.** Определить давление колеса на рельс, когда его центр тяжести занимает наинизшее положение. Колесо катится без скольжения.
ДЗ.16  	Тонкий однородный стержень АВ массой ***m*,** длиной ***21*,** закрепленный шарнирно в своей середине О на оси O_1O_2, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью *ω.* При этом он удерживается в положении, образующем угол α с осью O_1O_2, при помощи пружины АД. Определить усилие в пружине.
ДЗ.17.  	Тонкий однородный стержень ОА массой ***m*,** длиной ***l*** вращается с постоянной угловой скоростью *ω* вокруг вертикальной оси О. Определить продольное растягивающее усилие в сечении стержня в функции его координаты ***x***.

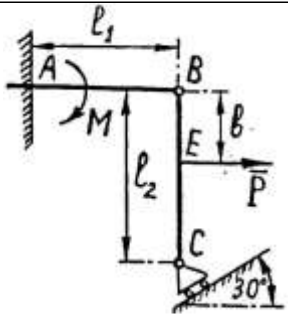
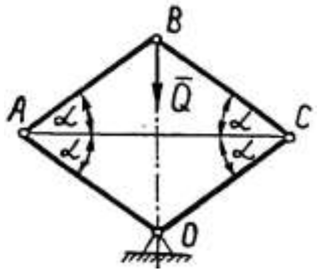
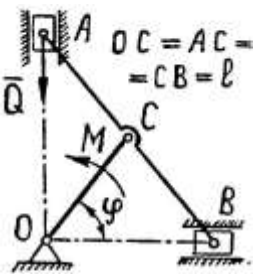
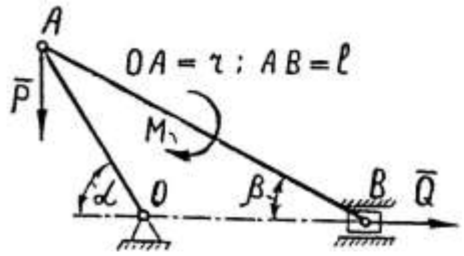
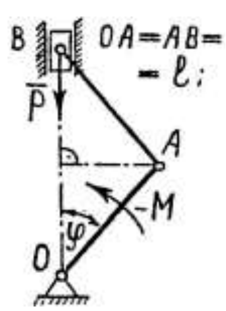
Д3.18. 	Тонкие однородные стержни АВ и ДЕ массами ***m***, на концах которых закреплены точечные грузы В и Е тоже массами ***m***, вращаются вокруг неподвижной оси O_1O_2. Оба стержня перпендикулярны к оси вращения, причём АВ ‖ 0_1y; ДЕ ‖ 0_1x. Даны размеры: ***$O_1Д = ДА = AO_2 = b$; $AB = ДЕ = l$.*** Определить реакции подпятника и подшипника.
Д3.19. 	Тонкий однородный и гладкий диск массой ***m***, радиусом ***R*** установлен между валом O_1O_2. и стержнем ОА, приваренным к валу под углом ***φ***. Стержень и вал вращаются вместе с диском с постоянной угловой скоростью ***ω***. Определить давление диска на стержень и вал.
 **Д3.20**.	Невесомый стержень АВ длиной ***l***, на конце которого расположен точечный груз В, вращается вокруг оси O_1O_2. с постоянной угловой скоростью *ω*. Расстояние от шарнира А до оси вращения равно ***b***. Определить значение ***ω***, если стержень отклонится от вертикали на угол ***φ***.

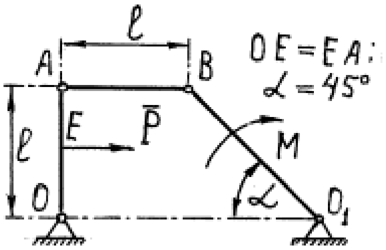
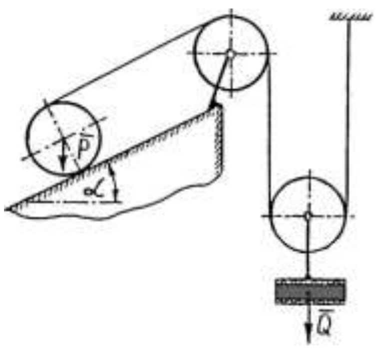
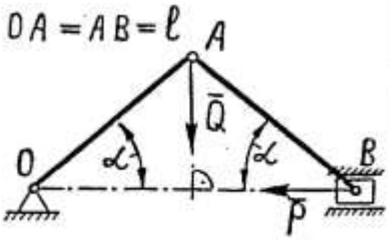
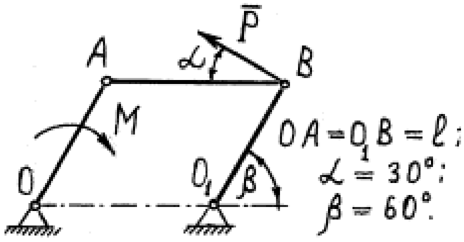
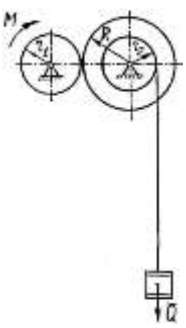
Задача Д4

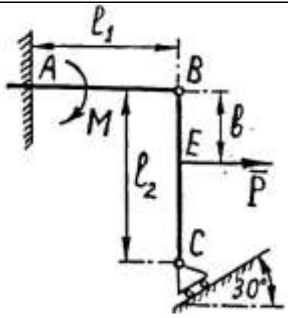
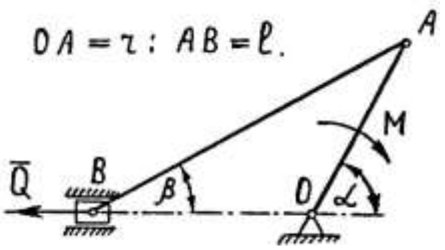
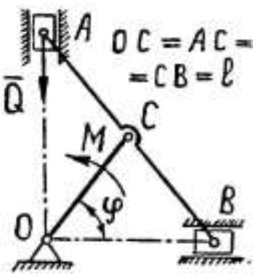
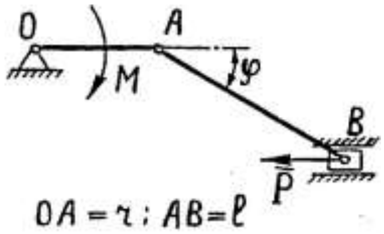
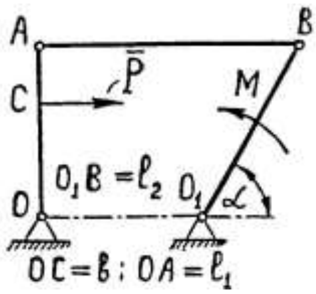
ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

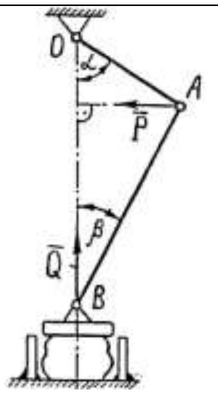
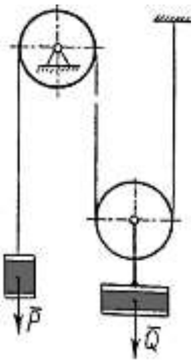
Механизмы и составные конструкции, показанные на рис. Д4.1 — Д4.20, находятся в состоянии равновесия.

Д4.1. 	Дано значение силы ***P***. Найти значение момента *M*.
Д4.2. 	• Найти вертикальную составляющую реакции шарнира В составной конструкции.
Д4.3. 	Дано значение силы ***Q***. Найти значение момента *M*.
Д4.4.	Определить реактивный момент заделки *A* составной конструкции.

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Д4.5.

</td><td>Определить натяжение нити AC, связывающей вершины A иC шарнирного ромба OABC.</td></tr>
<tr><td>Д4.6.

</td><td>Дано значение момента M. Найти значение силы Q.</td></tr>
<tr><td>Д4.7.

</td><td>Найти значение момента M.</td></tr>
<tr><td>Д4.8.

</td><td>Дано значение момента M. Найти значение силы P.</td></tr>
<tr><td>Д4.9.</td><td>Определить значение момента M.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Д4.10.

</td><td>Определить значение силы Q</td></tr>
<tr><td>Д4.11.

</td><td>Определить значение силы P.</td></tr>
<tr><td>Д4.12.

</td><td>Определить значение силы P.</td></tr>
<tr><td>Д4.13.

</td><td>Определить значение силы Q.</td></tr>
<tr><td>Д4.14.</td><td>Найти реактивный момент заделки A составной конструкции.</td></tr>
</table>

	
Д4.15. 	Определить значение момента ***M***.
Д4.16. 	Определить значение силы ***Q***.
Д4.17. 	Определить значение момента ***M***.
Д4.18. 	Дано значение момента ***M***. Найти значение силы ***P***.
Д4.19.	Дано значение силы ***Q***. Найти значение силы ***P***.

	
Д4.20. 	Дано значение силы ***P***. Найти значение силы ***Q***.

Приложение
(Образец титульного листа)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»
(МГУПС (МИИТ))

РОССИЙСКАЯ ОТКРЫТАЯ АКАДЕМИЯ ТРАНСПОРТА
(РОАТ)

Кафедра «**Теоретическая и прикладная механика**»

«ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Курсовая работа

по дисциплине

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

1011-п/ВГ-1809.ТМ.КР.00.00.00.РР

____
(отметка о зачете)

Рецензент ________________ (Фамилия, И.О.)

Студент ________________ (Фамилия, И.О.)

____________________ (подпись)

____________________ (подпись)

____________________ (дата)

____________________ (дата)

Москва 2012 г.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»
(МГУПС (МИИТ))

Одобрено кафедрой
«Теоретическая и прикладная
механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к выполнению курсовой работы

«ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

для студентов 2 курса специальности

190300.65 «ПОДВИЖНОЙ СОСТАВ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ»

специализаций:

«Локомотивы», «Вагоны», «Электрический транспорт железных дорог», «Технология производства и ремонта подвижного состава», «Высокоскоростной наземный транспорт»

Москва 2012

Составители:

Капранов И.В.- профессор, канд.техн.наук.,

Дубровин В.С. - доцент, канд.техн.наук,

Шумейко Г.С. - доцент, канд.техн.наук.

Оглавление

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Задача 1 (рис.1, рис.2)

Найти реакции связей изогнутой балки АВС, находящейся под действием плоской системы сил . Вычисление реакций выполнить при *а = 1,2 м, b = 2,4 м, l = 1,8 м, α = 30°, P₁ = 8 кН, P₁ = 6 кН, М = 8 кНм.*

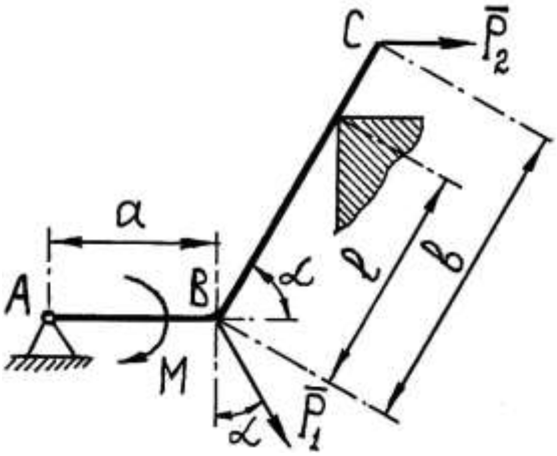


рис.1

Решение

Освободим балку от связей и приложим к ней реакции связей. На рис.2 $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А. $\vec{R}_Д$ – реакция выступа стены ($\vec{R}_Д \perp BC$).

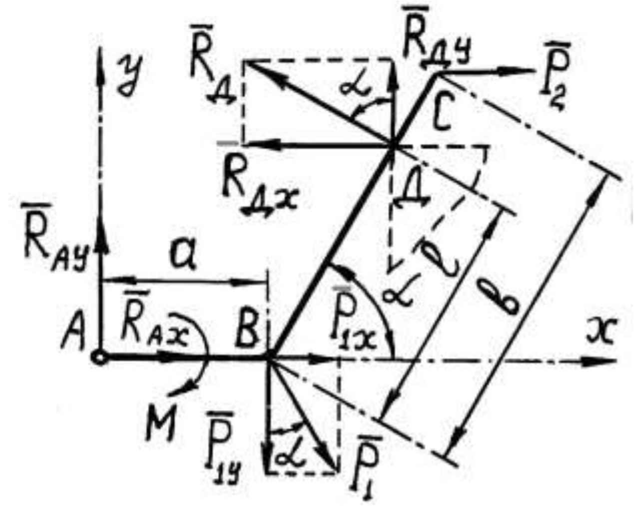


рис.2

Разложим силы $\vec{P}_1$ и $\vec{R}_Д$ на составляющие вдоль осей координат

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_{1x} + \vec{P}_{1y}; \qquad \vec{R}_Д = \vec{R}_{Дx} + \vec{R}_{Дy}.$$

Условия равновесия балки имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} + P_1 \sin\alpha - R_Д \sin 2\alpha + P_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} - P_1 \cos\alpha + R_Д \cos 2\alpha = 0;$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \qquad -P_2 b \sin 2\alpha + (R_Д \sin 2\alpha) l \sin 2\alpha + (R_Д \cos 2\alpha)(a + l\cos 2\alpha) -$$

$$-(P_1 \cos\alpha) a - M = 0$$

После решения составленной системы уравнений получаем

$$R_{Ax} = -1{,}04 кН, \qquad R_{Ay} = 1{,}27 кН, \qquad R_Д = 10{,}34 кН.$$

Задача 2 (рис.3, рис.4)

Определить реакции изогнутой балки ABC, находящейся под действием плоской системы сил . Вычисление реакций выполнить при l = 1 м, α = 60°, P = 20 кН, M = 25 кНм (момент пары сил), q = 3 кН/м (интенсивность равномерно распределенной нагрузки).

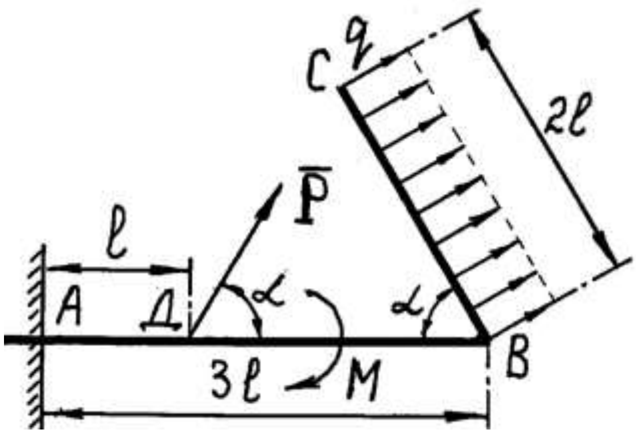


рис.3

Решение

Освободим балку от связей и приложим к ней реакции связей. На рис. 4 $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции заделки вдоль осей координат, m_A – момент заделки (момент пары сил).

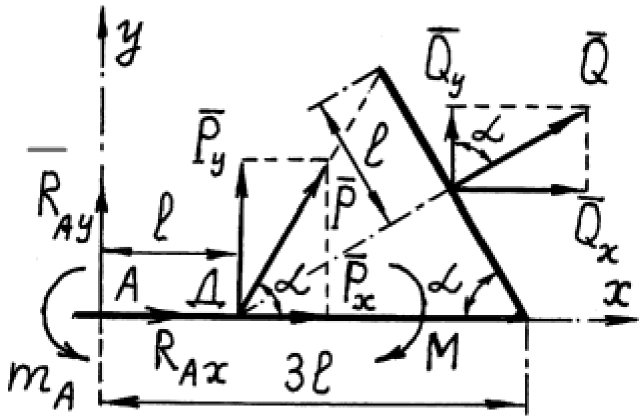


рис.4

Заменим равномерно-распределенную нагрузку на участке BC равнодействующей силой $\vec{Q}$, причем $Q = q \times 2l = 6кН$.

Разложим силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ на составляющие вдоль осей координат

$$\vec{Q} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y; \qquad \vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y.$$

Составим уравнения равновесия балки

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} + P\cos\alpha + Q\sin\alpha = 0;$$

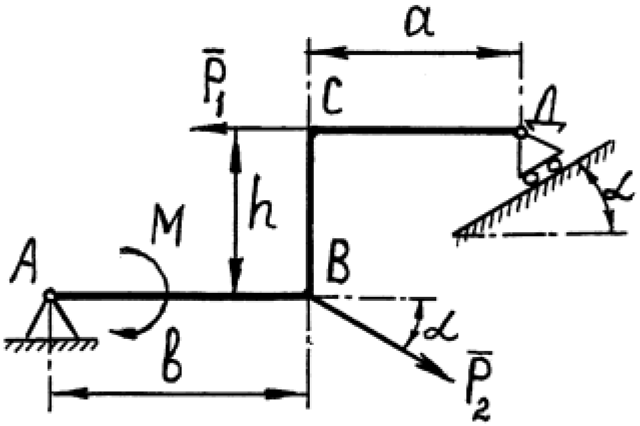
$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} + P\sin\alpha + Q\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_Д(F_k) = 0; \qquad m_A - M - R_{Ay}l = 0.$$

Из этой системы уравнений находим

$$R_{Ax} = 15{,}2кН, \qquad R_{Ay} = -20{,}32кН, \qquad m_A = 4{,}68кНм.$$

Задача 3 (рис.5, рис.6)



К изогнутой балке АВСД приложены силы $P_1 = 5$ *кН*, $P_2 = 4$ *кН* и пара сил с моментом $M = 8$ *кНм* . Размеры $a = 1{,}5$ *м*, $в = 1{,}8$ *м*, $h = 1{,}2$ *м*, $\alpha = 30^o$. Определить реакции балки.

рис.5

Решение (рис.6)

Освободим балку от связей, приложим к ней реакции связей. На рис.6 $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А, $\vec{R}_Д$ – реакция подвижного шарнира Д. Заметим, что реакция $\vec{R}_Д$ направлена перпендикулярно плоскости, по которой могут перемещаться катки тележки шарнира Д.

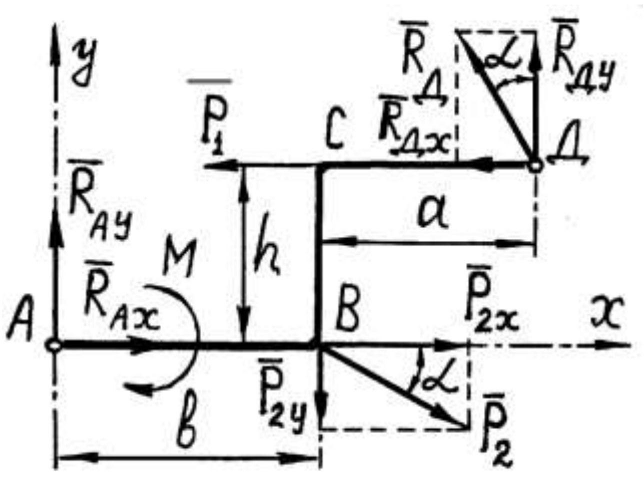


рис.6

Разложим силы $\vec{P}_1$ и $\vec{R}_Д$ на составляющие вдоль осей координат:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_{1x} + \vec{P}_{1y}; \qquad \vec{R}_Д = \vec{R}_{Дx} + \vec{R}_{Дy}.$$

Составим уравнения равновесия балки:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} - P_1 + P_2\cos\alpha - R_Д \sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} - P_2 \sin\alpha + R_Д \cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \qquad (R_Д \cos\alpha)(a+b) + (R_Д \sin\alpha)h - (P_2 \sin\alpha)b + P_1 h - M = 0.$$

Решаем эту систему уравнений и находим неизвестные величины:

$$R_{Ax} = 2{,}34 кН, \qquad R_{Ay} = 0{,}6 кН, \qquad R_Д = 1{,}62 кН.$$

Задача 4 (рис.7, рис.8)

Определить реакции связей плиты АВСД, находящейся под действием плоской системы сил. Невесомый стержень СЕ образует угол α с горизонталью. Вычисление реакций выполнить при заданных размерах *a = 1,6 м,* b *= 1,2 м,* h *= 1,2 м, α = 60°, P_1 = 15 кН, P_2 = 10 кН, М = 8кНм..*

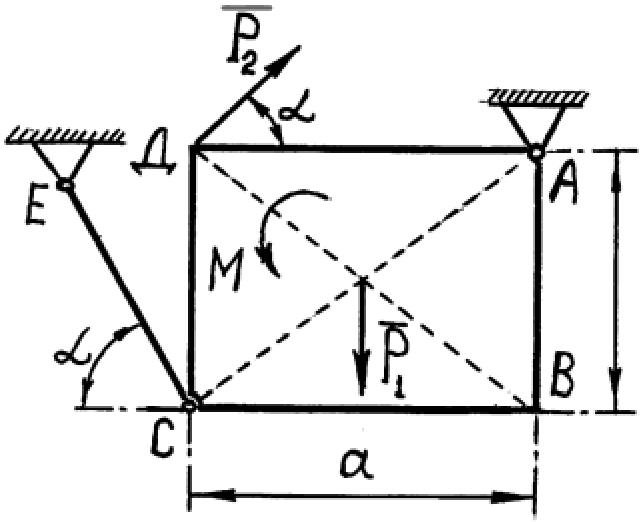


рис.7

Решение (рис.8)

Освободим плиту от связей, приложим к ней реакции связей. На схеме показаны: $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А, $\vec{R}_C$ – реакция подвижного шарнира С, направленная вдоль стержня СЕ. Силу $\vec{P}_2$ разложим на составляющие

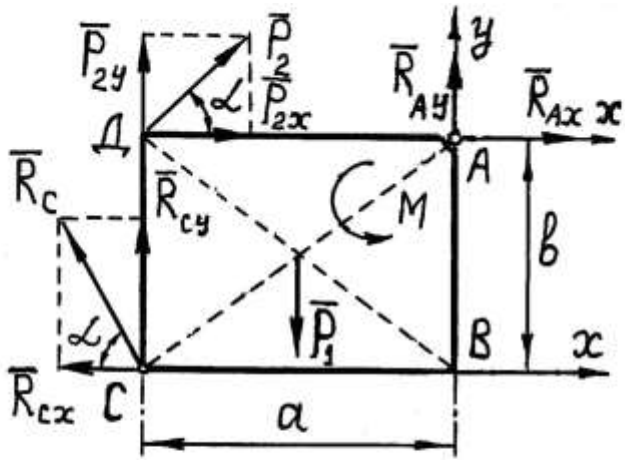


рис.8

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_{2x} + \vec{P}_{2y}.$$

Уравнения равновесия плиты имеют вид

$\sum F_{kx} = 0;$ $\qquad R_{Ax} + P_2 \cos 45^o - R_C \cos 60^o = 0;$

$\sum F_{ky} = 0;$ $\qquad R_{Ay} + P_2 \sin 45^o + R_C \sin 60^o = 0;$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \qquad -(R_C \sin 60^o)a - (R_C \cos 60^o)b - (P_2 \sin 45^o)a + P_1 a/2 + M = 0$$

Из решения этой системы уравнений находим

$$R_{Ax} = -0{,}6 кН, \qquad R_{Ay} = -18{,}26 кН, \qquad R_Д = 12{,}92 кН.$$

РАВНОВЕСИЕ ФЕРМЫ

Задача 5 (рис.9, рис.10, рис.11, рис.12)

К узлам фермы приложены внешние силы P и F. Определить методом Риттера усилия в стержнях 6,7,8, а методом вырезания узлов определить усилия в стержнях 10,11 .

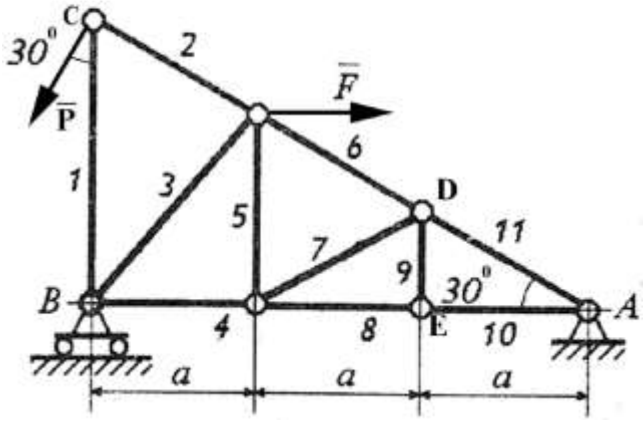


рис.9

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Шарнирные соединения стержней фермы называются ее узлами. Ферма будет плоской, если все ее стержни лежат в одной плоскости. Стержни фермы работают на растяжение или сжатие. Ферма считается статически определимой, если число ее узлов n и число ее стержней k удовлетворяют условию: k = 2n-3. В нашем случае ферма статически определима: число стержней k =11, число узлов n = 7; Условие k = 2n-3 выполнено: k = 2 7-3=11. Стержни без номеров не относятся к фермам, а являются стержневыми связями (опорами).

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях. Опорные реакции можно найти, с помощью аналитических уравнений равновесия плоской системы сил, рассматривая ферму в целом как твердое тело.

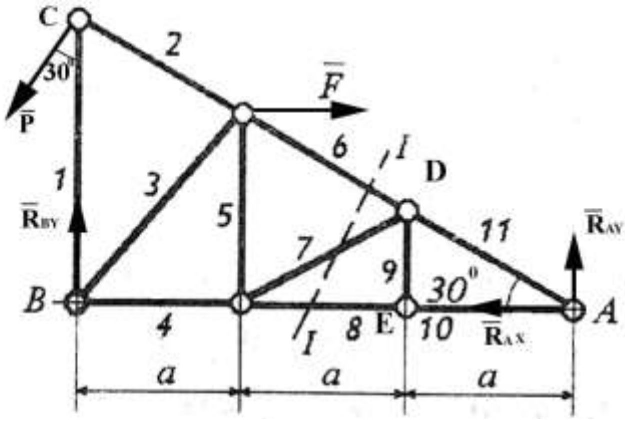


рис.10

Освободим ферму от связей и приложим к ней реакции связей. На рис.10 $\vec{R}_{By}$, $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ –реакции неподвижной опоры А и подвижной опоры В.

Уравнения равновесия фермы имеют вид:

$\sum F_{kx} = 0; \qquad -R_{Ax} - P\ sшш30^o + F = 0;$

$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} - P\ \cos 30^o + R_{By} = 0;$

$\sum m_B(F_k) = 0; \qquad -(R_{Ay})3a + (P\ \sin 30^o)(3a)(tg30^o) - F2a(tg30^o) = 0$

Из этой системы уравнений находим: $R_{Ax} = 60кН, \qquad R_{Ay} = 28{,}85кН, R_{By} = 23{,}1кН.$

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод сечений (метод Риттера). Суть метода состоит в том, что ферму мысленно разрезаем на две части (сечение 1-1) так, чтобы в сечении оказалось не более трех стержней, в которых требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части фермы на оставшуюся ее часть заменяем соответствующими реакциями стержней, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считаем стержни растянутыми. Отбросим левую часть фермы (относительно сечения 1-1), а ее действие на правую часть заменим силами реакций стержней 6,7 и 8, численно равными усилиям S_6 , S_7 и S_8 в соответствующих стержнях.

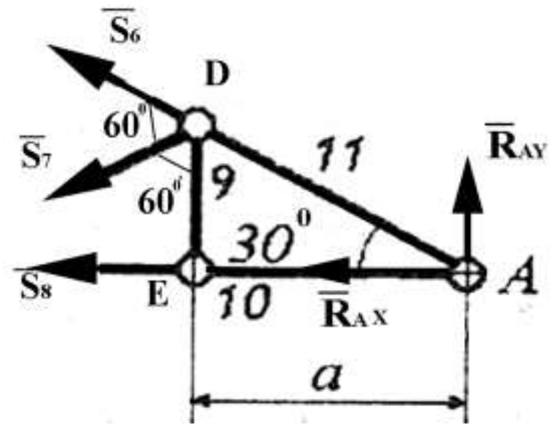


рис.11

Уравнений равновесия правой части фермы имеют вид

$$\sum m_A(F_k) = 0; \qquad -(S_7 \cos 60^o)a - (S_7 \sin 60^o)a(tg30^o) = 0\,,$$

$$\sum m_E(F_k) = 0; \qquad +(R_{Ay})a + (S_6 \cos 30^o)a(tg30^o) - (S_7 \cos 30^o)a(tg30^o) = 0\,,$$

$$\sum m_D(F_k) = 0; \qquad +(R_{Ay})a - (R_{Ax})a(tg30^o) - (S_8)a(tg30^o) = 0\,.$$

Эта система уравнений позволяет определить каждую реакцию независимо от реакций других стержней, а именно S_7 =0, S_6 =-43,3кН, S_8 =-10кН.

Определение внутренних усилий в стержнях можно производить методом вырезания узлов. Согласно этому методу, мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним внешние силы и реакции стержней и составляют уравнения равновесия сил, приложенных к узлу. Нужно рассматривать тот узел, в котором сходятся не более двух стержней с неизвестными усилиями. Вырежем узел А и определим усилия в стержнях 10 и 11 т.е. S_{10} и S_{11} рис.12.

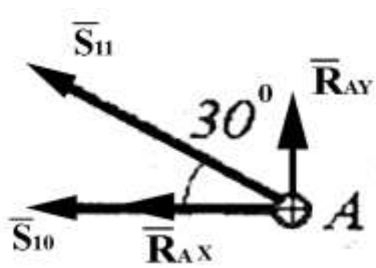


рис.12

С помощью двух уравнений равновесия плоской системы сходящихся сил

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad - R_{Ax} - S_{11} \cos 30^o - S_{10} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} - S_{11} \sin 30^o = 0;$$

находим усилия в стержнях S_{10} =-110кН, S_{11} =-57,7кН.

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Задача 6 (рис.13-16)

Определить реакции связей в точках А и В составной плоской конструкции, состоящей из двух твердых тел: балки АС и изогнутой балки CDB, соединенных шарниром С, на которые действует сосредоточенные, распределенные силы и момент, как показано на схеме.

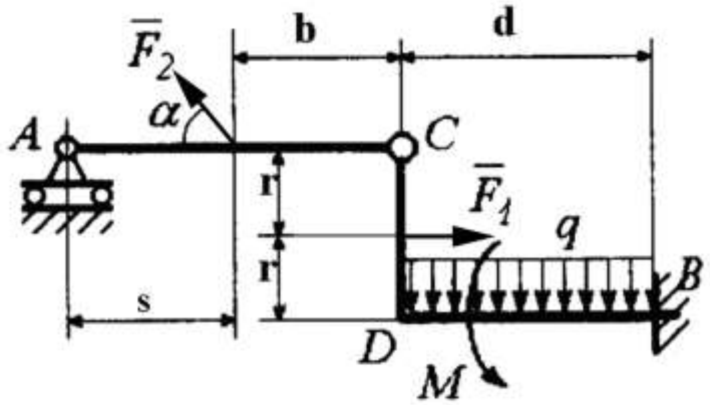


рис.13

Составная конструкция - это система тел, каким-либо образом связанных между собой. В задаче рассматриваются конструкции, составленные из двух частей, соединенных внутренним шарниром С. Все силы, действующие на точки данной системы тел, можно разделить на внешние и внутренние. Силы взаимодействия между отдельными телами составной конструкции называются внутренними по отношению к рассматриваемой системе тел. Если рассматривать равновесие составной конструкции в целом, то внутренние силы, согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, для внутренних сил главный вектор и главный момент относительно любого центра равны нулю. Расчленяя составную конструкцию на отдельные тела и рассматривая их равновесие, можно записать для каждого тела по три уравнения равновесия. В данном случае силы, с которыми действует отброшенное тело на оставшееся, по отношению к этому оставшемуся телу являются внешними.

Отбрасываем опоры *A* и *B* и заменяем их действие на конструкцию реакциями R_A., X_B , Y_B , M_B . Заменяем равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q равнодействующей силой Q, где Q=q d. Силу F_2 раскладываем на две составляющих силы F_{2X} и F_{2Y} вдоль координатных осей x, y. Тогда: $F_{2X} = F_2 \cos\alpha$; $F_{2Y} = F_2 \sin\alpha$.

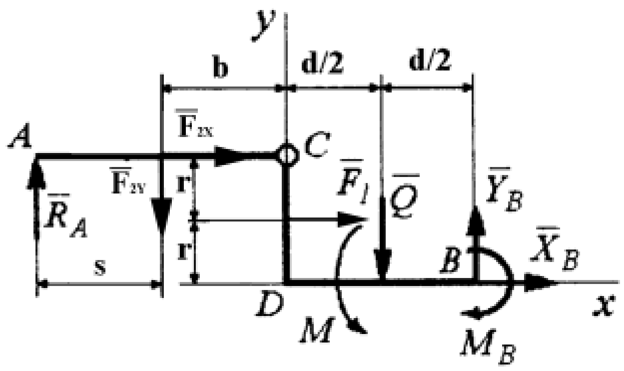
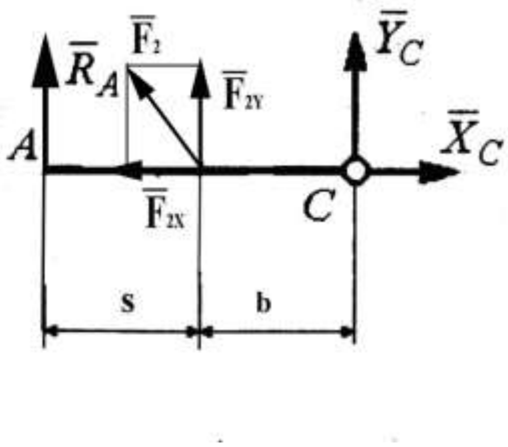


рис.14

Разделим конструкцию на две части по шарниру C. В сечении C, где имеется шарнир, две части конструкции взаимодействуют между собой. Силы взаимодействия раскладываем на две составляющие X_C и Y_C вдоль координатных осей x, y. Получаем две конструкции AC и CDB, как показано на рис15 и рис.16.



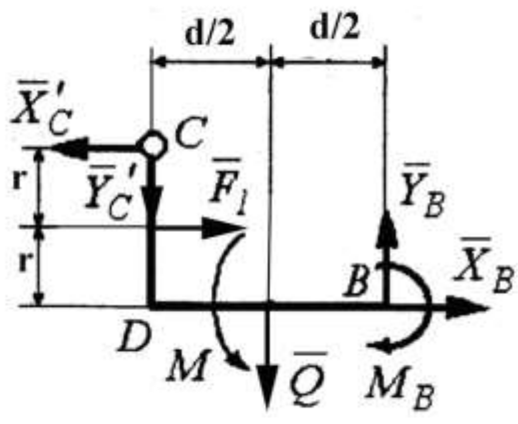


рис.15 рис.16

На основании аксиомы о равенстве действия и противодействия для внутренних сил в шарнире C можно записать: $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$.

Составим уравнения равновесия для каждой из частей конструкции левая часть (AC),

$$\sum m_A(F_k)=0; \qquad (F_{2Y})s+(Y_C)(s+b)=0\ ,$$

$$\sum m_C(F_k)=0; \qquad -(R_A)(s+b)-(F_{2Y})(b)=0\ ,$$

$$\sum F_{kx}=0; \qquad -F_{2X}+X_C=0;$$

Правая часть (CDB)

$$\sum F_{kx}=0; \qquad -X'_C+F_l+X_B=0;$$

$$\sum F_{ky}=0; \qquad -Y'_C+Y_B-Q\ =0;$$

$$\sum m_B(F_k)=0; \qquad -(M_B)+Y'_C(d)+(X'_C)2r-F_1r+M+Q(d/2)=0$$

Решая совместно уравнения равновесия конструкции находим неизвестные реакции R_A., X_B , Y_B , M_B

ЦЕНТР МАСС ТЕЛА

Задача 7 (рис.17, рис.18)

Найти положение центра тяжести пластинки представленной на рис17. Размеры даны в сантиметрах.

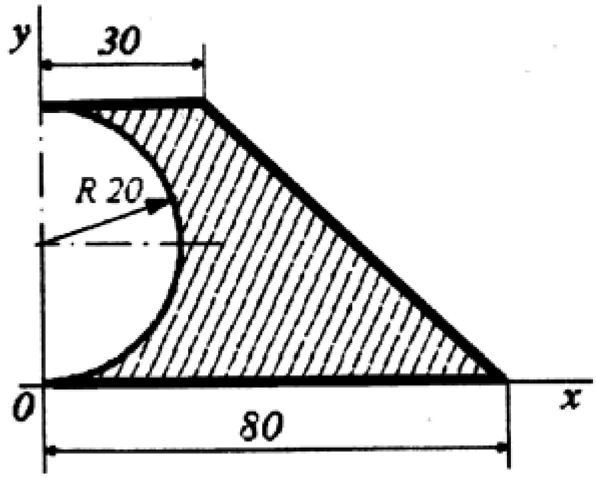


рис.17

Разделим пластинку на фигуры рис.18 , центры тяжести которых известны – площади этих фигур и координаты их центров тяжести:

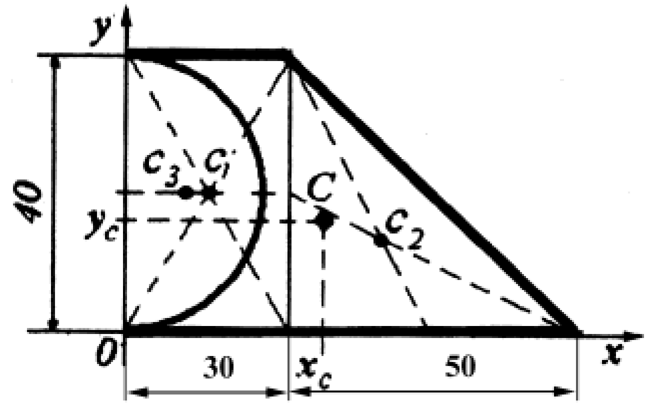


рис.18

-прямоугольник со сторонами 30 и 40, $S_1 = 30 \cdot 40 = 1200 см^2$; $x_1 = 15 см$; $y_1 = 20 см$;

прямоугольный треугольник с основанием 50см и высотой 40см, $S_2 = 0.5 \cdot 50 \cdot 40 = 1000 см^2$; $x_2 = 30 + 50/3 = 46.7 см$; $y_2 = 40/3 = 13.3 см$;

половина круга окружности радиуса R=20см, $S_3 = 0.5 \cdot \pi \cdot R^2 = 0.5 \cdot \pi \cdot 20^2 = 628 см^2$; $x_3 = 4 \cdot R/3 \cdot \pi = 8.5$см; $y_3 = 20$см.

Координаты центра тяжести пластинки определяются по формулам (площадь половины круга считаем отрицательной)

$$x_C = \frac{1}{S}\sum S_k x_k = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 + S_2 - S_3} = 38 см,$$

$$y_C = \frac{1}{S}\sum S_k y_k = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 + S_2 - S_3} = 15.8 см,$$

где S - площадь всей пластины; $\mathbf{S_K}$- площади ее частей.

ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Задача 8 (рис.19, рис.20)

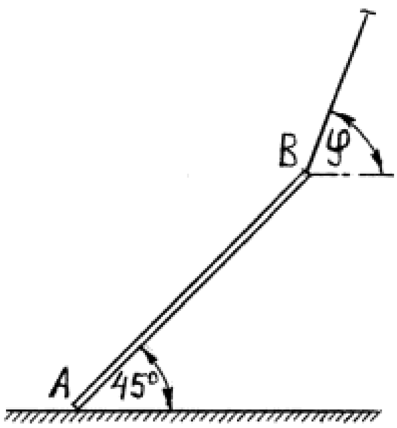


рис.19

Однородный брус опирается в точке А на негладкий горизонтальный пол и удерживается в точке В веревкой. Коэффициент трения бруса о пол равен f. При каком угле φ наклона веревки к горизонту брус начнет скользить по полу? Угол α, образуемый брусом и полом, равен 45°.

Решение (рис.20)

Освободим брус от связей и приложим к нему реакции связей. На рис.20 T_B – реакции веревки в точке В, N_A– реакция пола, F_A– сила трения бруса о пол. Учитывая, что сила трения бруса о пол связана с реакцией пола соотношением- $F_A = N_A f$, составим уравнения равновесия бруса.

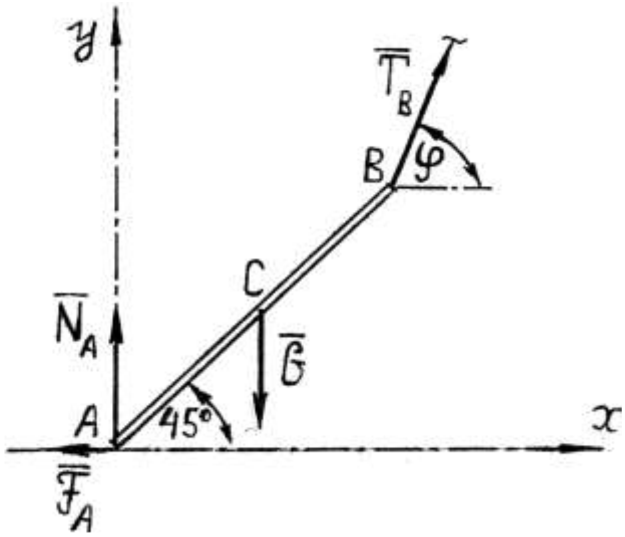


рис.20

Условия равновесия бруса имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad T_B \cos\varphi - F_A = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad T_B \sin\varphi - G + N_A = 0;$$

$$\sum m_B(F_k) = 0; \qquad -N_A l \cos 45 - F_A l \sin 45 + (G)\frac{l}{2}\cos 45 = 0,$$

где *l*- длина стержня АВ

После подстановки в первое уравнения соотношения $F_A = N_A f$ и преобразований, получаем:

$$T_B \cos\varphi - N_A f = 0;$$

$$T_B \sin\varphi - G + N_A = 0$$

$$N_A + fN_A tg45 = \frac{G}{2}, (tg45 = 1).$$

$$N_A = \frac{G}{2(1+f)},$$

или

$$T_B \cos\varphi = N_A f$$

$$T_B \sin\varphi = G - N_A$$

$$tg\varphi = \frac{G - N_A}{fN_A} = \frac{G - (\frac{G}{2(1+f)})}{f(\frac{G}{2(1+f)})} = (2 + \frac{1}{f}),$$

откуда

$$\varphi = arctg(2 + \frac{1}{f}).$$

Задача 9 (рис.21)

Цилиндрический каток радиуса г = 0.3 см и весом G = 3 кН приводится в равномерное движение постоянной силой Q, которая образует с горизонталью угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения скольжения между катком и дорогой f = 0,3. Определить силу Q и нормальную реакцию плоскости N.

Решение (рис.21)

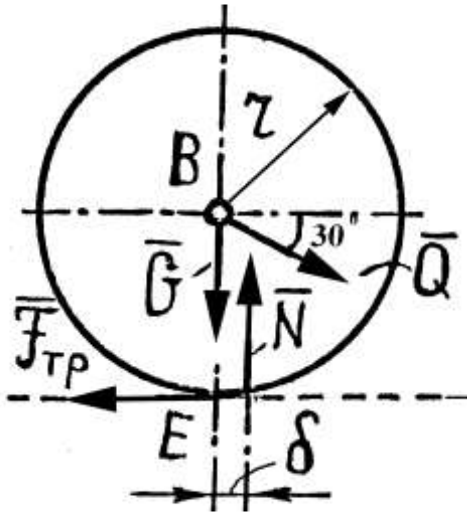


рис.21

Рассмотрим равновесие катка. Освободим каток от связей, приложим к нему реакции связей. На каток действуют силы:

G, Q (сила тяжести катка и сила Q),

а также N, $F_{тр}$ (нормальная реакция плоскости и сила трения качения).

Уравнения равновесия катка имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad Q\cos\alpha - F_{TP} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -Q\sin\alpha - G + N = 0;$$

$$\sum m_E(F_k) = 0; \qquad -(Q\cos\alpha)\cdot r + (N)\delta = 0.$$

Из этой системы уравнений находим силу Q и нормальную реакцию плоскости N:

$$F_{TP} = Q\cos\alpha;$$

$$N = G + Q\sin\alpha; \qquad N = \frac{(Q\cos\alpha)\cdot r}{\delta}.$$

откуда

$$G + Q\sin\alpha = \frac{(Q\cos\alpha)\cdot r}{\delta}. \qquad Q = \frac{G\cdot\delta}{r\cdot\cos\alpha - \delta\cdot\sin\alpha}.$$

Подставляем численные значения величин в эти уравнения и определяем числовые значения Q=58.3H, N=3029H.

Вычислим силу трения качения и максимальное значение силы трения скольжения:

$$F_{TP} = Q\cos\alpha = 58.3\cdot 0.866 = 50.48H;$$

$$F_{TP}^{\max} = f \cdot N = 0.2 \cdot 3029 = 605.8H.$$

Сила трения качения $F_{тр}$ меньше максимального значения силы трения скольжения $F^{max}_{тр}$. Каток катится без скольжения.

Вычислим коэффициент трения скольжения, соответствующий качению катка со скольжением:

$$F_{TP} = F_{TP}^{\max} \quad \text{или} \quad Q\cos\alpha = f \cdot N.$$

$$f = \frac{Q}{N}\cos\alpha = \frac{50.48}{3029} = 0.017.$$

Этот коэффициент трения скольжения, соответствует качению стального катка по льду

РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Задача 10 (рис.22, рис.23)

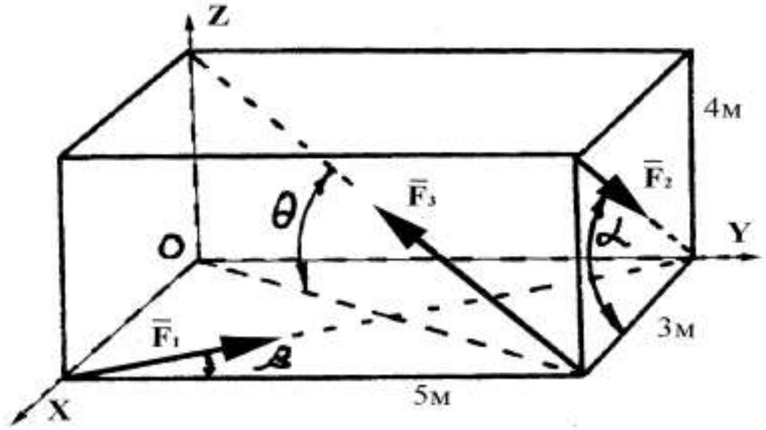


рис.22

Определить модули главного вектора и главного момента системы сил, изображенной на рисунке, если F_1 = 6 кН, F_2 = 4 кН, F_3 =3 кН. Силы приложены в вершинах прямоугольного параллелепипеда со сторонами 5, 3 и 4 м.

Обозначим углы α, β, θ , как показано на рисунке 22. В ходе решения понадобятся значения синусов и косинусов этих углов, которые определим ниже.

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} \quad ,\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}} \quad ,\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}} \quad ,\cos\theta = \frac{\sqrt{5^2+3^2}}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}}.$$

Находим проекции главного вектора на оси координат

$$R_x = \sum F_{kx}; \qquad R_x = -F_1\sin\beta - F_3\cos\theta\sin\beta - F_2\cos\alpha;$$

$$R_y = \sum F_{ky}; \qquad R_y = F_1\cos\beta - F_3\cos\theta\cos\beta;$$

$$R_z = \sum F_{kz}; \qquad R_z = F_3 \sin\theta - F_2 \sin\alpha.$$

Определяем значения проекций главного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,.$$

Подставляем численные значения величин в эти уравнения и определяем числовые значения проекций главного вектора, которые равны: R_x = -6.8 кН; R_y = 3 кН; R_z = -1.5 кН; R = 7.6кН.

Вычислим проекции главного момента M_0 на оси координат рис.23.

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на перпендикулярную оси плоскость, относительно точки пересечения оси и плоскости. Момент будет равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или линия действия силы пересекает ось.

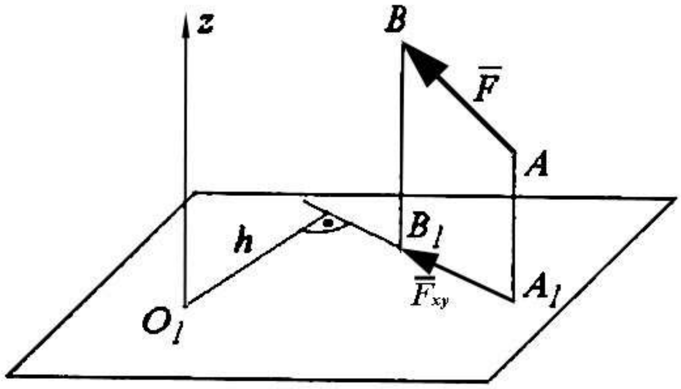


рис.23

Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила F, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус - по ходу часовой стрелки.

Проекции главного момента M_0 на оси координат и величина этого момента определяются по формулам

$$M_x = \sum m_{kx}; \qquad M_x = 5 \cdot F_3 \sin\theta - 5 \cdot F_2 \sin\alpha;$$

$$M_y = \sum m_{ky}; \qquad M_y = -3 \cdot F_3 \sin\theta;$$

$$M_z = \sum m_{kz}; \qquad M_z = 3 \cdot F_1 \cos\beta + 5 \cdot F_2 \cos\alpha.$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

После подстановки численных значений, получим M_x = -7.5 кНм; M_y = -5.1 кНм; M_z = 27.4 кНм; M_0 = 28.9 кНм.

Задача 11 (рис.24, рис.25)

Брус прямоугольного сечения жестко заделан одним концом в вертикальную стену и нагружен на другом конце силой Р и парой сил с моментом М, рис.24. Определить составляющие реакции заделки. Весом бруса пренебречь.

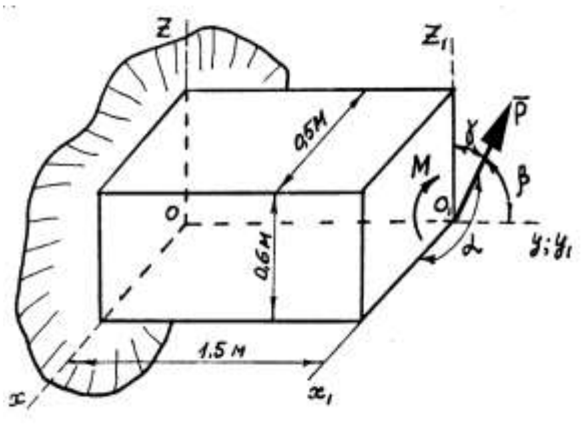


рис.24

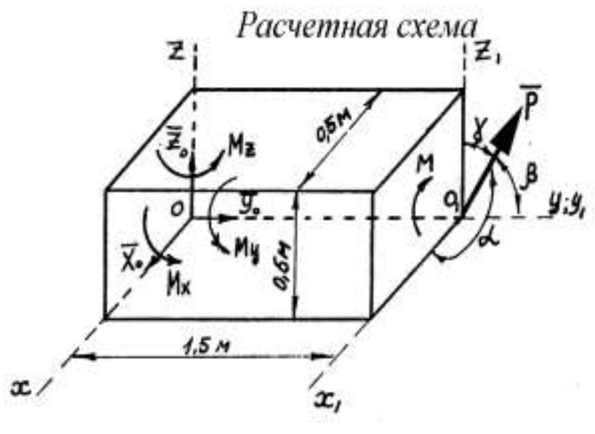


рис.25

При действии на брус заданной силы Р и пары сил с моментом М в сечении бруса, совпадающем со стеной, возникнут силы, действующие со стороны стенки на брус. Эти силы после их приведения к центру 0 будут состоять из силы R_0 (главного вектора) и пары сил с моментом M_O. Силу R_0 разложим на составляющие X_0, $У_0$, Z_0; пару сил с моментом M_O разложим на составляющие пары с моментами M_x, $M_У$, и M_z (рис.25). Брус под действием сил, показанных на рис.25 , будет находится в равновесии. При определении моментов силы Р относительно осей Х,У и Z- сначала разложим силу Р на составляющие, параллельные координатным осям, а затем воспользуемся теоремой Вариньона. При составлении уравнений моментов учтем свойства пары сил: сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любой оси равна проекции на эту ось вектора, изображающего момент пары; сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

Составим уравнения равновесия бруса:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad X_0 + P\cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad Y_0 - P\cos\beta = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad Z_0 - P\cos\gamma = 0;$$

$$\sum m_{kx} = 0; \qquad M_x + 1.5 \cdot P\cos\gamma = 0;$$

$$\sum m_{ky} = 0; \qquad M_y - M = 0;$$

$$\sum m_{kz} = 0; \qquad M_z - 1.5 \cdot P\cos\alpha = 0.$$

Для заданных исходных данных: Р = 100 Н; М = 200 Нм; $\alpha = \gamma = 60°$; $\beta = 45°$ получаем следующие значения реакций заделки: X_0 = -50 Н; Y_0 = 70.7 Н; Z_0 = -50 Н; R_0 = 100Н, M_x = -75 Нм; M_y = 200 Нм; M_z = 75 Нм; M_0 = 226.4 Нм.

Задача 12 (рис.26, рис.27)

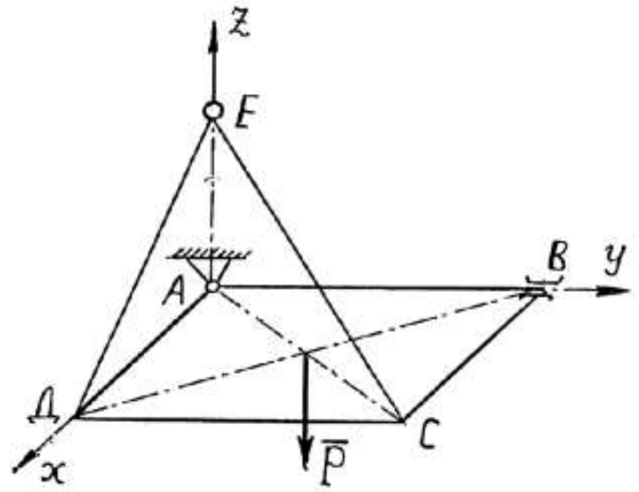


рис.26

Однородная квадратная пластина АВСД весом Р=200 Н прикреплена одним концом к вертикальной стене при помощи сферического шарнира А и петли В. Пластина удерживается в горизонтальном положении канатом СЕД, пропущенным через гладкое колечко Е, скрепленное со стенкой. Часть каната СЕ составляет с плоскостью пластины угол α=30°. Определить реакции связей.

Решение (рис.27)

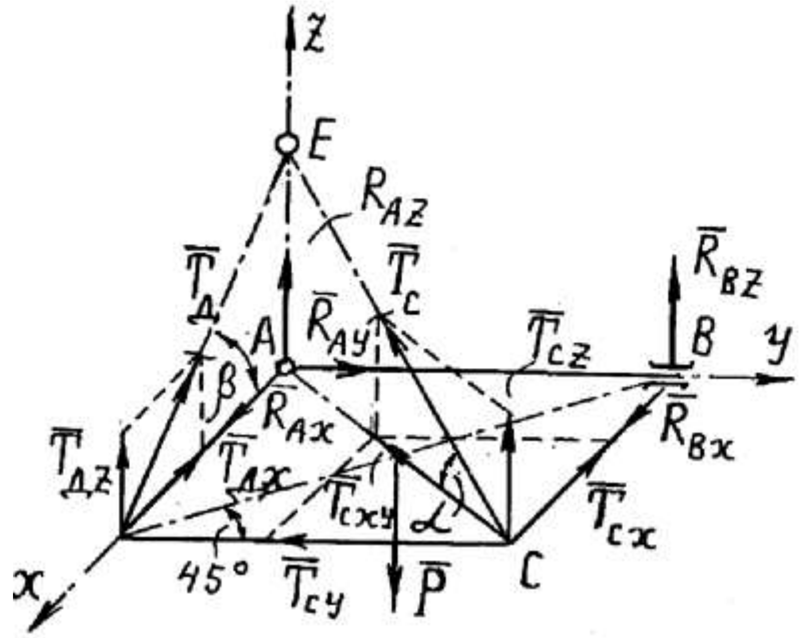


рис.27

Рассмотрим равновесие пластины. Освободим ее от связей, приложим к ней реакции связей R_{AX} , R_{AY} , R_{AZ} , R_{BX} , R_{BZ} (с Разложим силы $\overline{T}_C$ и $\overline{T}_Д$ на составляющие вдоль осей координат:

$$\overline{T}_C = \overline{T}_{Cx} + \overline{T}_{Cy} + \overline{T}_{Cz}; \qquad \overline{T}_Д = \overline{T}_{Дx} + \overline{T}_{Дy} + \overline{T}_{Дz}..$$

Из геометрических соотношений вытекает:

$$AC^2 = ДC^2 + AД^2 = 2a^2; \quad AE = ACtg30^0 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \; ; \quad ДE^2 = AE^2 + AД^2$$

$$\sin\beta = \frac{AE}{ДE} = 0.2\sqrt{10} \; ; \quad \cos\beta = \frac{AД}{ДE} = 0.2\sqrt{15} \; ,$$

где ***a***-сторона квадратной пластины

Условия равновесия пластины имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} + R_{BX} - T_{CX} + T_{ДX} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} - T_{CY} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad R_{AZ} + R_{BZ} + T_{ДZ} + T_{CZ} - P = 0;$$

$$\sum m_X(F_k) = 0; \qquad -P\,{}^{a}\!/_{2} + T_{CZ}a + R_{BZ}a = 0$$

$$\sum m_Y(F_k) = 0; \qquad P\,{}^{a}\!/_{2} - +T_{CZ}a + T_{ДZ}a = 0$$

$$\sum m_Z(F_k) = 0; \qquad -T_{CY}a + T_{CX}a - T_{BX}a = 0 = 0$$

После решения составленной системы уравнений, получаем

R_{AX} =122,5Н; R_{AY} =54,1Н; R_{AZ} =44,1Н, R_{BX} =0; R_{BZ} =55,9Н; Т=88,3Н.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Задача 13 (рис.28)

Даны уравнения движения точки

x = 4 cos 2t;   *y = 3 + 2 sin 2t*;   *x, y* – в см, *t* – в сек.

Найти уравнение траектории точки и установить направление ее движения по траектории.

Решение

Исключим параметр *t* из уравнений движения точки

$$\cos 2t = \frac{x}{4}; \qquad \sin 2t = \frac{y-3}{2}; \qquad \frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1 .$$

Уравнение траектории точки представляют собой уравнение эллипса.

При $2t_0 = 0$, $2t_1 = \frac{1}{2}\pi$, $2t_2 = \pi$, $2t_3 = \frac{3}{2}\pi$ и $2t_4 = 2\pi$ соответственно получаем точки M_0 (4,3), M_1 (0,5), M_2 (-4,3), M_3 (0,1) и M_4 (4,3).

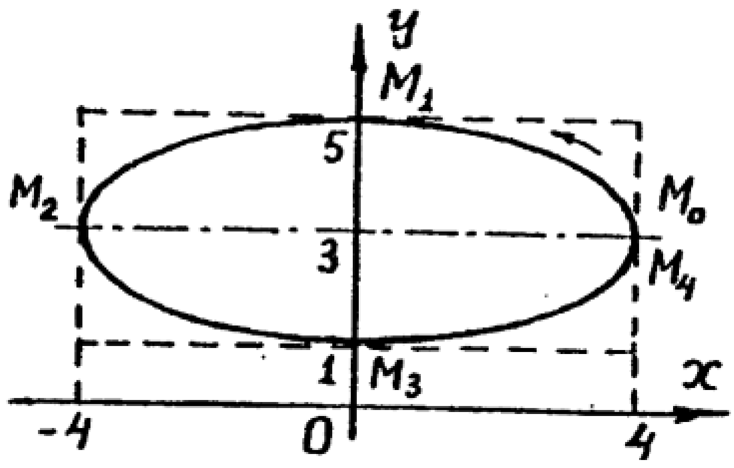


рис.28

Точка движется по эллипсу из начального положения M_0 (4,3) против часовой стрелки. Через промежуток времени $T = t_4 = \pi$ [с] точка приходит в начальное положение.

Задача 14 (рис.29)

Найти уравнения движения и траекторию точки обода колеса локомотива, движущегося по горизонтальному участку железнодорожного пути со скоростью V = 72 км/ч. Колеса локомотива имеют радиус R = 0,5 м и катятся по рельсам без скольжения.

Решение (рис.29)

Считая, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ точка М обода колеса соприкасалась с точкой М рельса, примем точку О за начало координат Oxy

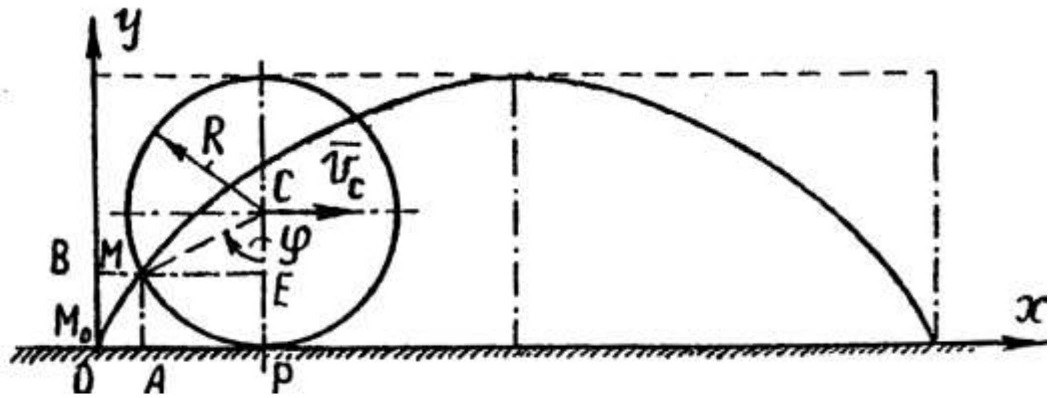


рис.29

Изобразим колесо локомотива и построим координаты точки М (x, y). Условие качения колеса без скольжения имеет вид

$$OP = MP \text{ или } V_C t = R\varphi,$$

$$\text{откуда } \varphi = \frac{V_C}{R} t = \omega t \text{, где } \omega = \frac{V_C}{R}; \; V_C = V.$$

Выразим координаты точки М через угол φ (параметр, зависящий от времени)

$$x = x_A = OA = OP - AP = MP - AP = R\varphi - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi);$$

$$y = y_A = OB = PE = CP - CE = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi).$$

Окончательно имеем

$$x = R(\omega t - \sin\omega t); \quad y = R(1 - \cos\omega t).$$

При вычислении получаем

$$x = 0{,}5(40t - \sin 40t)\,[\text{м}]; \quad y = 0{,}5(1 - \cos 40t)\,[\text{м}].$$

Полученные уравнения и есть искомые уравнения движения точки обода колеса локомотива. Эти же уравнения представляют собой уравнения траектории этой же точки в параметрической форме. Точка обода колеса локомотива описывает криволинейную траекторию, называемую циклоидой.

Задача 15 (рис.30)

Даны уравнения движения точки

$$x = 3t; \quad y = 9t^2 - 4; \quad x, y \text{ – в см, } t \text{ – в с.}$$

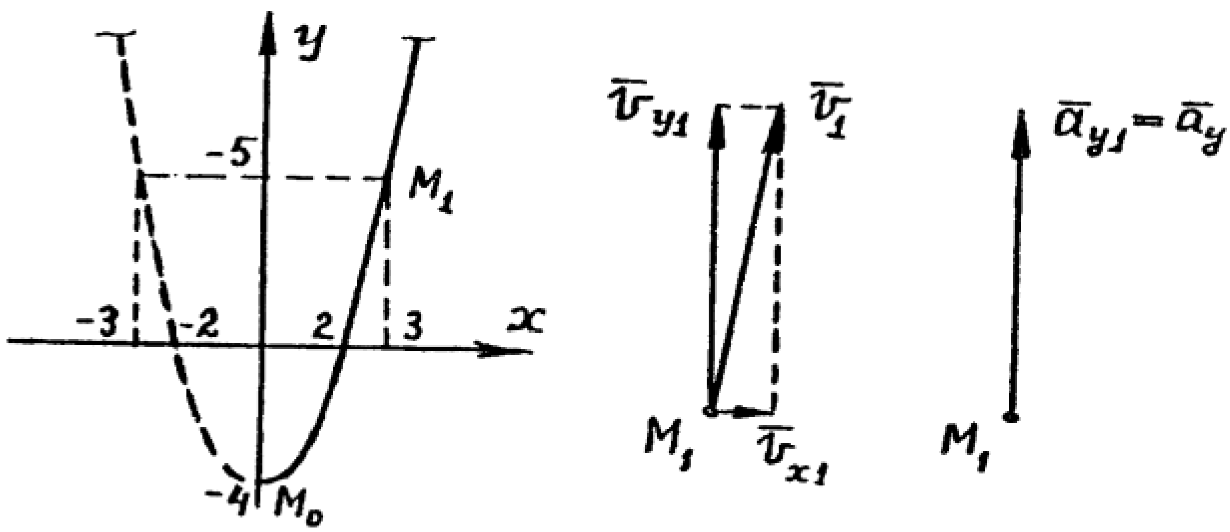
Найти уравнение траектории точки и для момента времени t_1 = 1с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение (рис.30)

Уравнения движения точки можно рассматривать как параметрические уравнения ее траектории. Чтобы получить уравнения траектории точки в координатной форме, исключим время t из уравнений ее движения

$$t = \frac{x}{3}; \quad y = 9\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 4; \quad y = x^2 - 4.$$

Траекторией точки является парабола.



(рис.30)

При $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$с соответственно получаем точки M_0 (0,- 4) и M_1 (3, 5).

Скорость и ускорение точки

$$V_x = \dot{x} = 3 \ [\text{см/с}] \qquad\qquad a_x = \ddot{x} = 0$$

$$V_y = \dot{y} = 18t \ [\text{см/с}] \qquad\qquad a_y = \ddot{y} = 18 \ [\text{см/с}]$$

Заметим, что V_x , a_x и a_y не зависят от времени t.

При $t_1 = 1$с получаем

$V_{x1} = 3$ [см/с]; $V_{y1} = V_y(t_1) = 18$ [см/с]

$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = 18{,}25$ [см/с]

$a_{x1} = 0$; $a_{y1} = 18$ [см/с] ; $a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = 18$ [см/с] .

Касательное и нормальное ускорения точки при $t_1 = 1$с

$$a_{\tau 1} = \left| \frac{a_{x1}V_{x1} + a_{y1}V_{y1}}{V_1} \right| = 17{,}75 \ [\text{см/с}^2]$$

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = 2{,}99 \ [\text{см/с}^2].$$

На рис.30 показано положение точки М в заданный момент времени ($t_1 = 1$с), а также выполнено построение векторов скорости и ускорения точки. Вектор $\overline{V}_1$ построен по составляющим V_{x1} и V_{y1} ; этот вектор совпадает по направлению с направлением касательной к траектории. Вектор $\overline{a}_1$ построен по составляющим $\overline{a}_{x1}$ и $\overline{a}_{y1}$.

Радиус кривизны траектории при $t_1 = 1$с

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = 111{,}4 \ [\text{см}].$$

Расчеты показывают, что радиус кривизны траектории в точке M_0 (0,- 4) при $t_0 = 0$, $\rho_0 = 0{,}5$ [см].

Задача 16

Локомотив движется со скоростью 54 км/ч. При торможении он приобретает ускорение 0,5 м/с^2. Найти, на каком расстоянии от пункта остановки надо начать торможение и сколько времени оно будет продолжаться.

Решение

Локомотив, принятый за точку, совершает равнозамедленное движение в соответствии с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} V &= V_0 - at; \\ s &= s_0 + V_0 t - \frac{at^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

Используя условия задачи, получим

$$\left.\begin{aligned} 0 &= V_0 - aT \\ S &= V_0 T - \frac{aT^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

где V_0 = 54 км/ч = 15 м/с; a = 0,5 м/с^2 ; s_0 = 0.

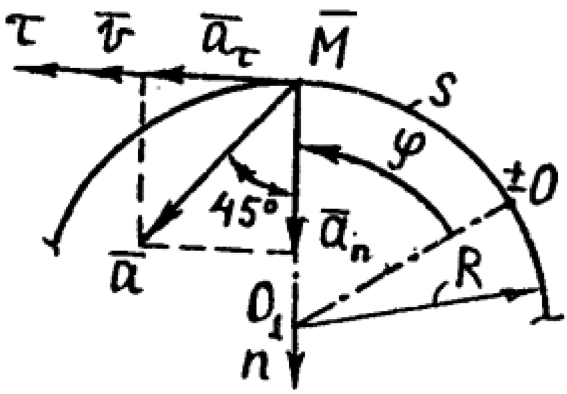
Из составленной системы уравнений находим время остановки и путь остановки локомотива

$$T = \frac{V_0}{a} = 30\ [\text{с}];\quad S = V_0 T - \frac{aT^2}{2} = \frac{V_0^2}{2a} = 225\ [\text{м}].$$

Задача 17 (рис.31)

Точка движется по окружности радиуса $\boldsymbol{R}$ = 6м согласно уравнению $s = \frac{1}{2}t^3$[м]. Найти скорость точки в тот момент времени, когда ее касательное ускорение равно нормальному ускорению.

Решение (рис.31)



(рис.31)

Скорость, касательное и нормальное ускорение точки

$$V = \dot{s} = \frac{3}{2}t^2\,[\text{м/с}];\quad a_\tau = \ddot{s} = 3t\,[\text{м/с}^2];\quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{9t^4}{4R}\,[\text{м/с}^2]$$

В момент времени $t = T$ касательное ускорение равно нормальному ускорению.

$$3t = \frac{9t^4}{4R},\ \text{откуда}\ t = T = \sqrt[3]{\frac{4}{3}R} = \sqrt{8} = 2\,[\text{с}].$$

Скорость, касательное и нормальное ускорение точки при $t = T = 2$с.

$$V = V(T) = \frac{3}{2}T^2 = 6\,[\text{м/с}^2]\quad a_\tau = a_\tau(T) = a_n(T) = 6\,[\text{м/с}^2]$$

Вычислим дополнительно расстояние s и угол φ в этот же момент времени

$$s = s(T) = \frac{1}{2}T^3 = 4\,[\text{м}]\quad \varphi = \varphi(t) = \frac{s(T)}{R} = \frac{2}{3}\,[\text{рад}].$$

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Задача 18

Маховик, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, приобрел угловую скорость n = 1200 об/мин, совершив при этом 400 оборотов. Определить, за какое время маховик совершил эти 400 оборотов и с каким угловым ускорением он вращался.

Для равноускоренного вращательного движения маховика имеем зависимости

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \\ &\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

По условию задачи имеем (φ_0 = 0; ω_0 = 0)

$$\omega = \varepsilon\, T; \quad \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot T^2$$

где T – время, в течение которого маховик совершил 400 оборотов, φ – угол поворота маховика при $t = T$.

Из составленной системы уравнений получаем

$$\varepsilon = \frac{\omega}{T}; \quad \varphi = \frac{\varepsilon \cdot T^2}{2} = \frac{\omega T}{2}; \quad T = \frac{2\varphi}{\omega}.$$

Угол поворота и угловая скорость маховика при $t = T$ и N = 400 оборотов

$$\varphi = 2\pi N = 800\pi \ [\text{рад}] \quad \omega = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \, [\text{с}^{-1}].$$

Вычислим время T и угловое ускорение ε маховика

$$T = \frac{2\varphi}{\omega} = 40 \ [\text{с}]; \quad \varepsilon = \frac{\omega}{T} = \pi \, [\text{с}^{-2}].$$

Задача 19 (рис.32)

Касательное ускорение точки М обода маховика равно $a_\tau = 6\sqrt{3}$ [м/с^2] и образует с полным ускорением угол 30°. Найти полное ускорение точки М, а также угловую скорость и угловое ускорение маховика, если его радиус равен 0,5 [м].

Решение (рис.32)

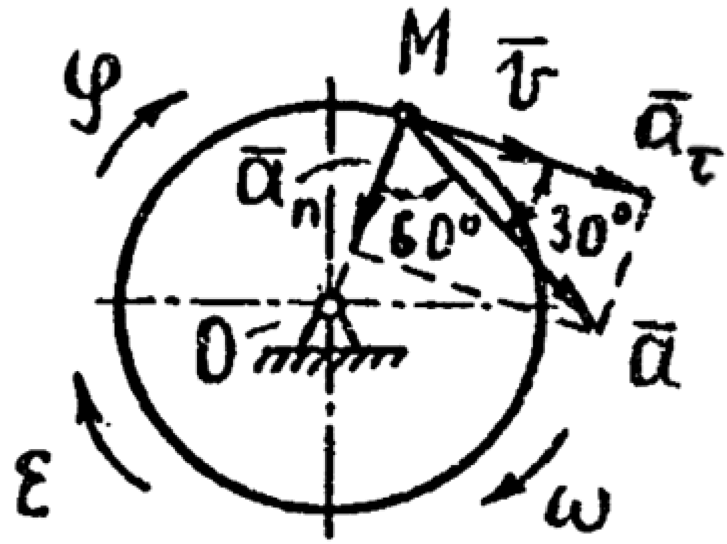


рис.32

Полное и нормальное ускорение точки М обода маховика

$$a = \frac{a_\tau}{\cos 30°} = \frac{6\sqrt{3}}{0{,}5\sqrt{3}} = 12\ [\text{м/с}^2] \quad a_n = a \sin 30° = 12 \cdot 0{,}5 = 6\ [\text{м/с}^2]$$

Угловая скорость и угловое ускорение маховика при r = 0,5 [м]

$$\omega^2 = \frac{a_n}{r} = \frac{6}{0{,}5} = 12\,[1/\text{с}^2]; \quad \omega = 3{,}46\,[1/\text{с}]; \quad \varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{6\sqrt{3}}{0{,}5} = 20{,}76\,[1/\text{с}^2]$$

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Задача 20 (рис.33)

Колесо радиуса R = 0,6 [м] катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость его центра C постоянна и равна V_C = 12 [м/с].

Найти угловую скорость колеса и скорости концов M_1, M_2, M_3, M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса.

Решение (рис.33)

Колесо совершает плоско – параллельное движение. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке M_1 контакта горизонтальной плоскости, то есть

$$V_{M1} = 0.$$

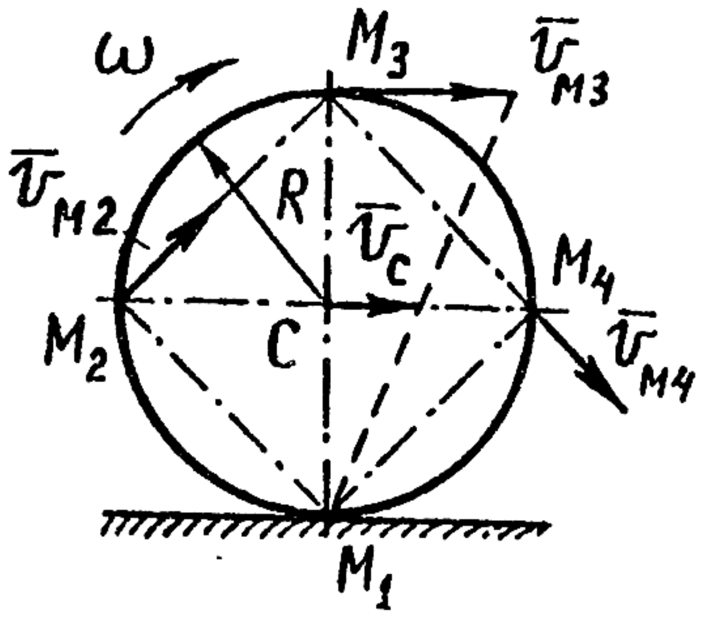


рис.33

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CM_1} = \frac{V_C}{R} = \frac{12}{0{,}6} = 20 \ [1/\text{с}] .$$

Находим скорости точек M_2 , M_3 и M_4

$$V_{M2} = \omega \cdot M_2 M_1 = \frac{V_C}{R} R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 16{,}92\,[\text{м/с}]$$

$$V_{M3} = \omega \cdot M_3M_1 = \frac{V_C}{R} 2r = 2V_C = 24 \text{ [м/с]}$$

$$V_{M4} = \omega \cdot M_4M_1 = \frac{V_C}{R} R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 16{,}92 \text{ [м/с]}$$

$$\overline{V}_{M2} \perp M_2M_1; \quad \overline{V}_{M3} \perp M_3M_1; \quad \overline{V}_{M4} \perp M_4M_1.$$

Задача 21 (рис.34)

Ведущее колесо автомобиля радиуса R = 0,5 [м] катится со скольжением (с буксованием) по прямолинейному участку шоссе; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 4 [м/с]. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке Р на расстоянии h = 0,3 [м] от плоскости качения. Найти угловую скорость колеса и скорости точек А и В его вертикального диаметра.

Решение рис.34

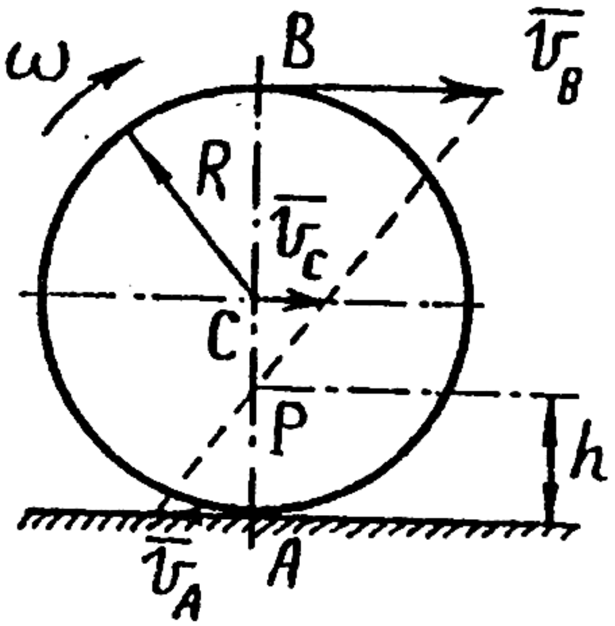


рис.34

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R-h} = \frac{4}{0{,}5-0{,}3} = 20 \text{ [1/с]}$$

Находим скорости точек А и В

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot h = 20 \cdot 0{,}3 = 6 \text{ [м/с]}$$

$$V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (2R-h) = 20 \cdot 0{,}7 = 14 \text{ [м/с]};$$

$$\bar{V}_A \perp AP\,; \quad \bar{V}_B \perp BP\,.$$

Задача 22 (рис.35)

Ведомое колесо автомобиля радиуса R = 0,5[м] катится со скольжением (с юзом) по прямолинейному участку шоссе; скорость его центра C постоянна и равна V_C = 9 [м/с]. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке P на расстоянии h = 0,4 [м] от плоскости качения. Найти угловую скорость колеса и скорости точек A и B его вертикального диаметра.

Решение рис.35

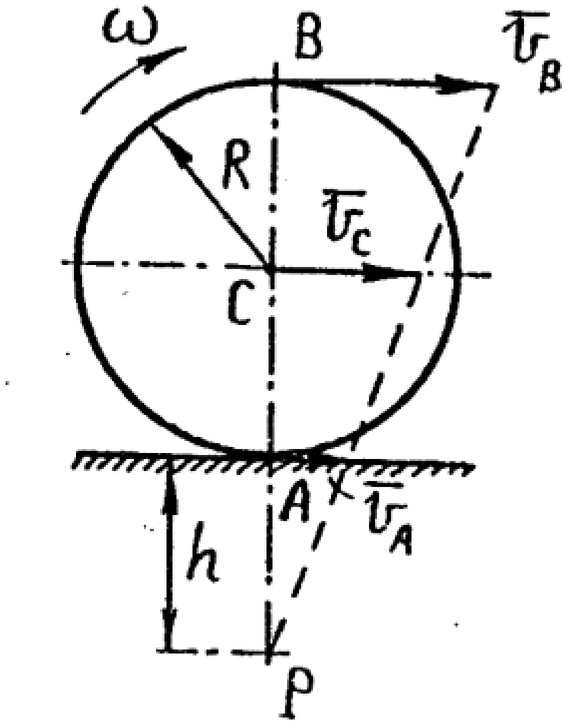


рис.35

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R+h} = \frac{9}{0{,}5+0{,}4} = 10 \ [1/\text{c}]$$

Находим скорости точек A и B

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot h = 10 \cdot 0{,}4 = 4 \ [\text{м/с}]$$

$$V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (R+h) = 10 \cdot 1{,}4 = 14\,[\text{м/с}];$$

$$\bar{V}_A \perp AP\,; \quad \bar{V}_B \perp BP\,.$$

Задача 23 (рис.36, рис.37)

Для заданного положения механизма, найти скорости точек А, В, С, Д и угловые скорости звена АВ и колеса с ребордой, катящегося без скольжения. Дана угловая скорость кривошипа ОА и размеры: $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, ОА = 0,3 м, АВ = 0,4 м, R = 0,15 м, r = 0,1 м.

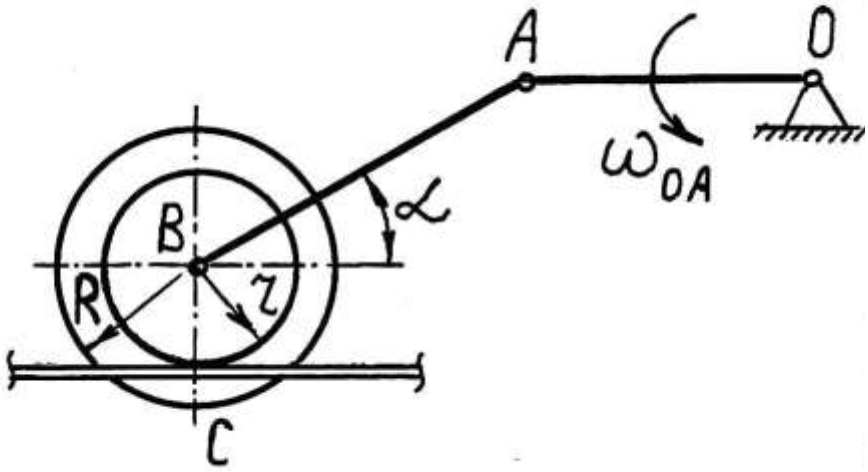


рис.36

Решение рис.37

Кривошип ОА совершает вращательное движение, звено АВ и колесо – плоско-параллельное движение.

Находим скорости точки А звена ОА $v_A = \omega_{OA} OA = 2 \times 0{,}3 = 0{,}6 мс^{-1}$.

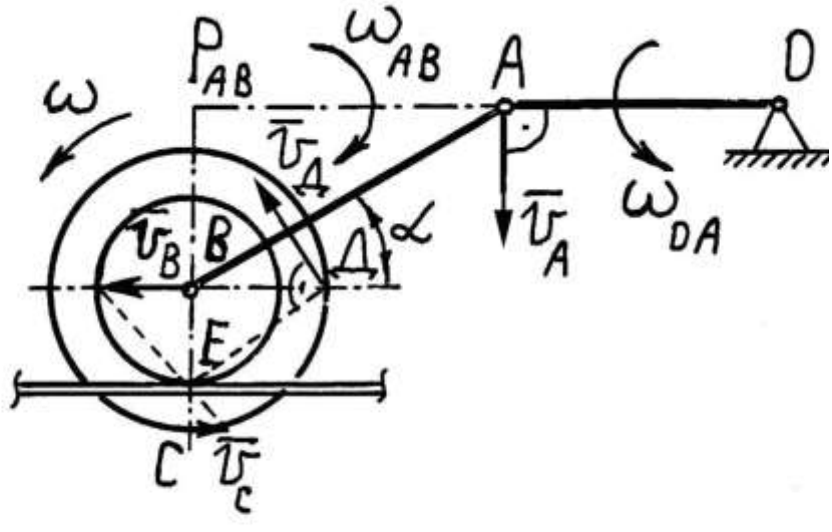


рис.37

Зная направление скоростей точек A и B звена AB, определяем положение его мгновенного центра скоростей – точку P_{AB}. ($\vec{v}_A \perp OA$; вектор $\vec{v}_B$ направлен по горизонтали).

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_{AB}}{AP_{AB}\cos 30^o} = \frac{0{,}6}{0{,}4 \times 0{,}866} = 1{,}732 c^{-1},$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB}(AB \sin 30^o) = 1{,}732(0{,}4 \times 0{,}5) = 0{,}346 мс^{-1}.$$

Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке P.

Угловая скорость колеса и скорости точек C и Д:

$$\omega = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_B}{r} = \frac{0{,}346}{0{,}1} = 3{,}46 c^{-1};$$

$$v_C = \omega CP = \omega(R - r) = 3{,}46(0{,}15 - 0{,}1) = 0{,}173 мс^{-1};$$

$$v_Д = \omega ДP = \omega\sqrt{R^2 + r^2} = 3{,}46\sqrt{0{,}15^2 + 0{,}1^2} = 0{,}634 мс^{-1}.$$

Задача 24 (рис.38,рис.39)

Для заданного положения механизма, найти скорости точек A, B, C, Д и угловые скорости звена AB и звена O_1B. Дана угловая скорость звена OA и размеры: ω_{OA} = 3 $с^{-1}$, OA = 0,3 м, AB = 0,6 м, AC = 0, 4 м , AД = 0,2 м, O_1B= 0,25 м.

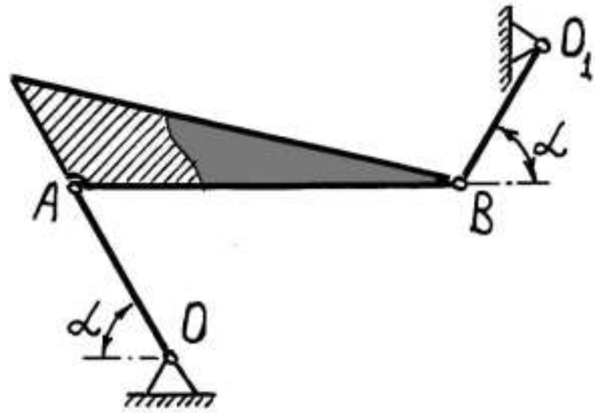


рис.38

Решение рис.39

Звено ОА совершает вращательное движение, звено АВ – плоско-параллельное движение.

Определяем скорость точки А :

$$v_A = \omega_{OA} OA = 3 \times 0{,}3 = 0{,}9 мс^{-1}.$$

Для точек А и В звена АВ известны направления скоростей $-\vec{v}_A \perp OA$ и $\vec{v}_B \perp O_1B$. Мгновенный центр скоростей этого звена находится в точке P_{AB}.

Угловая скорость звена АВ и скорости точек В, С и Д:

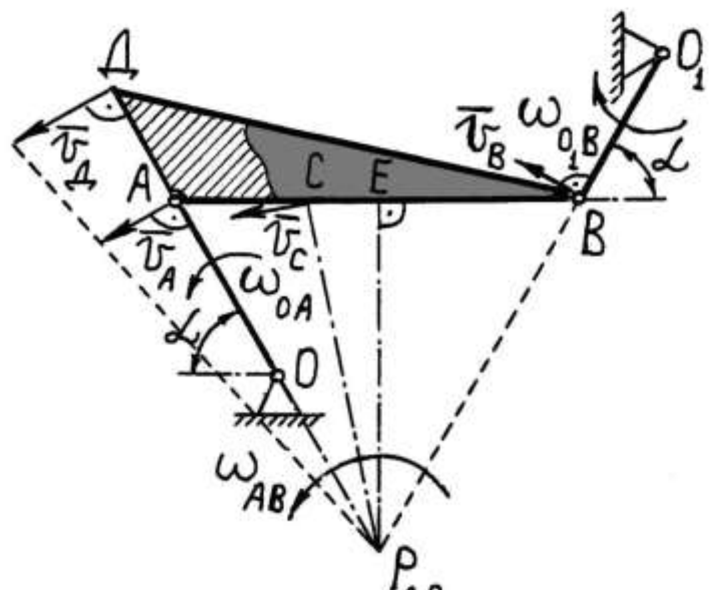


рис.39

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{0,9}{0,6} = 1,5c^{-1}, \text{ AP}_{\text{AB}} = \text{AB};$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = 1,5 \times 0,6 = 0,9мс^{-1}; \text{ BP}_{\text{AB}} = \text{AB}.$$

$$EP_{AB} = FEtg\,60^o = 0,3 \times 1,732 = 0,5196м;$$

$$CE = AE - AC = 0,3 - 0,2 = 0,1м;$$

$$CP_{AB} = \sqrt{(EP_{AB})^2 + (CE)^2} = \sqrt{0,5196^2 + 0,1^2} = 0,528м;$$

$$v_C = \omega_{AB} CP_{AB} = 0,15 \times 0,528 = 0,792мс^{-1}, \quad \vec{v}_C \perp CP_{AB};$$

$$AP_{AB} = \frac{AE}{\sin 30^o} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6м;$$

$$ДP_{AB} = AP_{AB} + AД = 0,6 + 0,2 = 0,8м;$$

$$v_Д = \omega_{AB} ДP_{AB} = 3 \times 0,8 = 2,40мс^{-1}, \quad \vec{v}_Д \perp ДP_{AB}$$

Угловая скорость звена O_1B:

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1P} = \frac{0,9}{0,25} = 3,6c^{-1}.$$

Задача 25 (рис.40)

Две параллельные рейки движутся в одну сторону со скоростями V_1 = 1,8 [м/с] и V_2 = 0,6 [м/с]. Между рейками зажат диск радиуса r = 0,3 [м], катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость диска и скорость его центра С.

Решение рис.40

Скорости точек А и В диска (этими точками диск касается реек) $V_A = V_1$; $V_B = V_2$

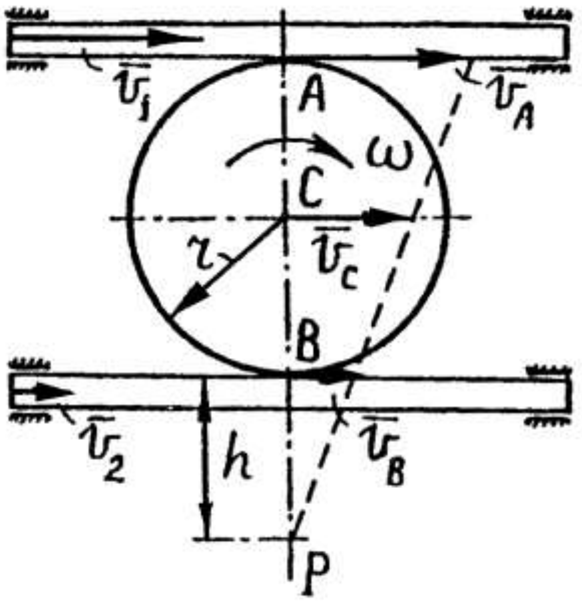


рис.40

Мгновенный центр скоростей диска лежит на прямой AB в некоторой точке P, причем

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \text{ или } \frac{V_A}{2r+h} = \frac{V_B}{h}.$$

Отсюда находим

$$h = BP = \frac{V_B \cdot 2r}{V_A - V_B} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{1{,}8 - 0{,}6} = 0{,}3\,[\text{м}]$$

Угловая скорость диска и скорость его центра

$$\omega = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B}{h} = \frac{0{,}6}{0{,}3} = 2\,[1/\text{с}]$$

$$V_C = \omega \cdot CP = \omega(r+h) = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2\,[\text{м/с}]$$

Задача 26 (рис.41, рис.42)

Найти угловую скорость шатуна AB и скорости точек B и C кривошипно-шатунного механизма. Дана угловая скорость кривошипа OA и размеры: $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, OA = AB = 0,35 м, AC = 0,18 м.

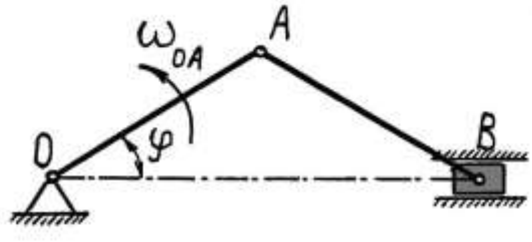


рис.41

Решение рис.42

Кривошип ОА совершает вращательное движение, шатун АВ – плоско-параллельное движение.

Находим скорость точки А звена ОА :

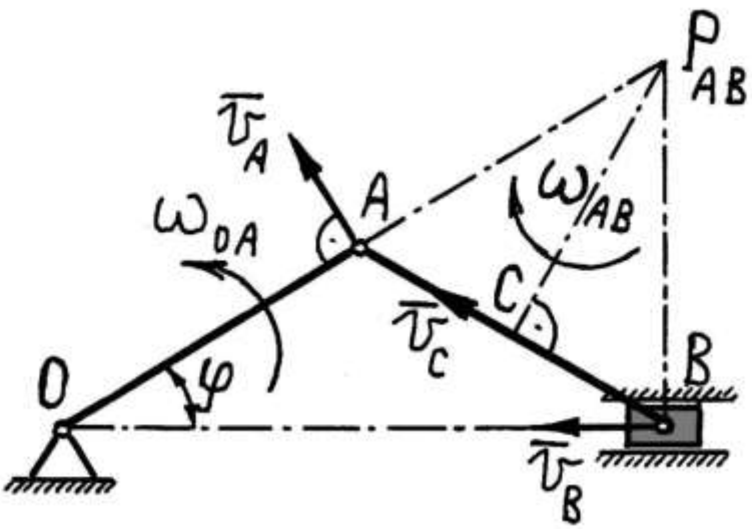


рис.42

$$v_A = \omega_{OA} OA = 2 \times 0{,}36 = 0{,}72 мс^{-1}, \quad \vec{v}_A \perp OA.$$

Скорость точки В направлена по горизонтали. Зная направление скоростей точек А и В шатуна АВ, определяем положение его мгновенного центра скоростей – точку P_{AB}.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{0{,}72}{0{,}36} = 2c^{-1}, \quad AP_{AB} = AB.$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = 2 \times 0{,}36) = 0{,}72 мс^{-1}, \ BP_{AB} = AB.$$

$$v_C = \omega_{AB} CP_{AB} = \omega_{AB}(BP_{AB} \sin 60^o) = 2(0{,}36 \times 0{,}866) = 0{,}52 мс^{-1},$$

$$\vec{v}_C \perp CP_{AB}.$$

Задача 27 (рис.43, рис.44)

В шарнирном четырехзвеннике OABC ведущий кривошип OA = $10\sqrt{3}$ [см] равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω = 4 [сек $^{-1}$] и при помощи шатуна AB = 20 [см] приводит во вращательное движение кривошип BC вокруг оси C. Определить скорости точек A и B, а также угловые скорости шатуна AB и кривошипа BC.

Решение рис.43

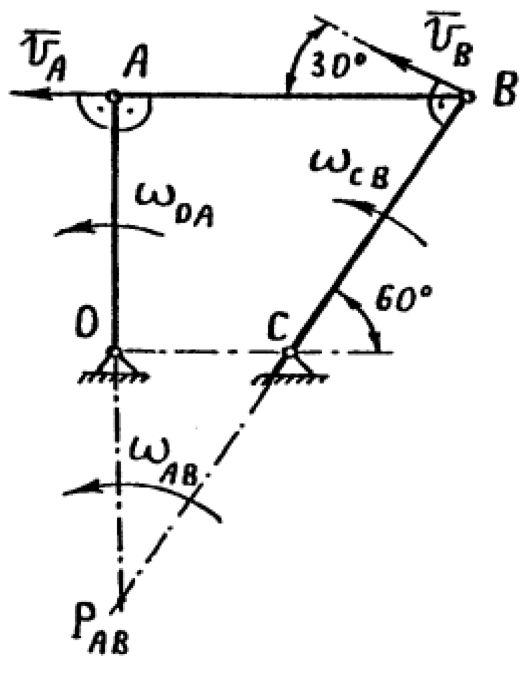


рис.43

Скорость точки A кривошипа OA

$$V_A = \omega_{OA} OA = 4 \cdot 10\sqrt{3} = 69{,}2 \text{ [см/с]};\quad \overline{V}_A \perp OA$$

Взяв точку A за полюс, составим векторное уравнение

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA},$$

где $\overline{V}_B \perp CB$ и $\overline{V}_{BA} \perp BA$.

Графическое решение этого уравнения дано на рис.44 (план скоростей).

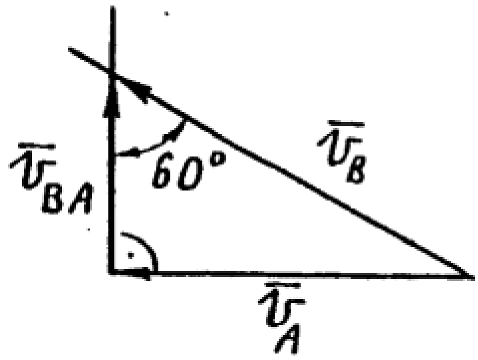


рис.44

С помощью плана скоростей получаем

$$V_B = \frac{V_A}{\cos 30°} = 80\,[\text{см/с}]; \quad V_{BA} = V_B \sin 30° = 40\,[\text{см/с}].$$

Угловая скорость шатуна АВ

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{BA} = 2 \ [\text{с}^{-1}].$$

Скорость точки В можно найти с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на соединяющую их прямую

$$Пр_{AB}\bar{V}_B = Пр_{AB}\bar{V}_A; \quad V_B = \frac{V_A}{\cos 30°} = 80\,[\text{см/с}].$$

В заключении найдем скорость точки В с помощью мгновенного центра скоростей P_{AB} шатуна АВ. Зная направления скоростей точек А и В ($\bar{V}_A \perp OA$ и $\bar{V}_B \perp CB$) находим положение точки P_{AB}.

Угловая скорость шатуна АВ $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{AB \cdot tg 60°} = 2\,[\text{с}^{-1}].$

Скорость точки В и угловая скорость кривошипа СВ

$$V_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB}\frac{AB}{\sin 30°} = 80\,[\text{см/с}]; \ \omega_{CB} = \frac{V_B}{CB} = \frac{V_B \sin 60°}{OA} = 4\,[\text{с}^{-1}].$$

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Задача 28 (рис.45)

В кривошипно – кулисном механизме с поступательно движущейся кулисой BC кривошип OA (расположенный позади кулисы) длины l = 0,4 [м] вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi$ [1/с]. Концом A, соединенным шарнирно с ползуном, он сообщает кулисе возвратно – поступательное движение. Определить скорость кулисы в тот момент, когда кривошип OA образует с осью кулисы угол 30˚.

Решение рис.45

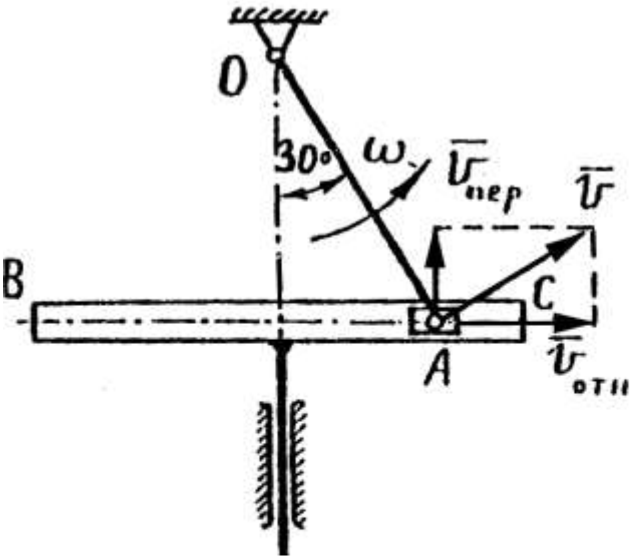


рис.45

Рассмотрим движение точки (ползуна) A. Абсолютным движением этой точки является движение по окружности радиуса OA вокруг точки O.

Движение точки A вдоль кулисы BC, считая кулису неподвижной, является относительным движением. Движение точки A вместе с кулисой представляет собой переносное движение.

Абсолютная скорость точки A $\bar{V} = \bar{V}_{ОТН} + \bar{V}_{ПЕР}$,

где $V = \omega \cdot OA = 2\pi \cdot 0{,}4 = 2{,}51$ [м/с].

Далее находим $V_{КУЛ} = V_{ПЕР} = V\sin 30^\circ = 2{,}51 \cdot 0{,}5 = 1{,}25$[м/с].

Задача 29 (рис.46)

В кулисном механизме при качании кривошипа ОС вокруг оси О, ползун А, перемещаясь вдоль кривошипа ОС, приводит в движение стержень АВ, движущийся в вертикальных направляющих К; расстояние ОК=l. Определить скорость движения ползуна А относительно кривошипа ОС в функции от его угловой скорости ω и угла поворота φ.

Решение рис.46

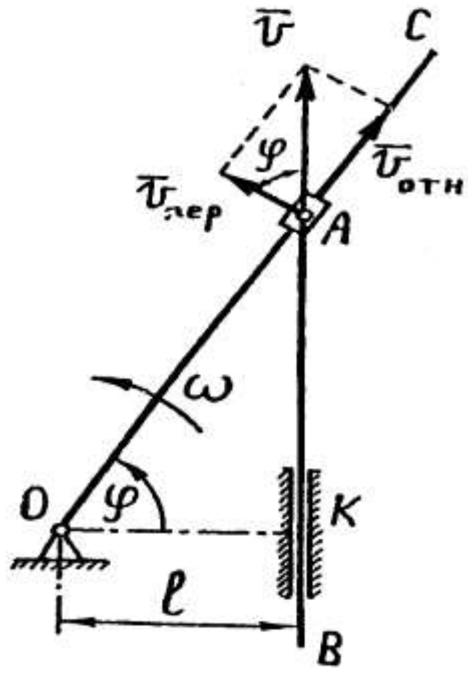


рис.46

Рассмотрим движение точки (ползуна А). Абсолютным движением этой точки является прямолинейное движение по вертикали.

Движение точки А вдоль кривошипа ОС, считая кривошип неподвижным, является относительным. Движение точки А вместе с кривошипом во вращательном движении вокруг оси О является переносным.

Абсолютная скорость точки А $\overline{V} = \overline{V}_{ОТН} + \overline{V}_{ПЕР}$,

причем $V_{ПЕР} = \omega \cdot OA = \omega \dfrac{l}{\cos\varphi}$;

$$V_{OTH} = Vtg\varphi = \omega \frac{l}{\cos\varphi} \cdot tg\varphi .$$

Задача 30 (рис.47)

Вдоль прорези диска радиусом R = 10 [см] движется ползун М, расстояние которого от центра диска изменяется по закону ОМ = x = (10t – 3t^2) [см]. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω = 2 [1/с]. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна при t_1 = 4 [с].

Решение рис.47

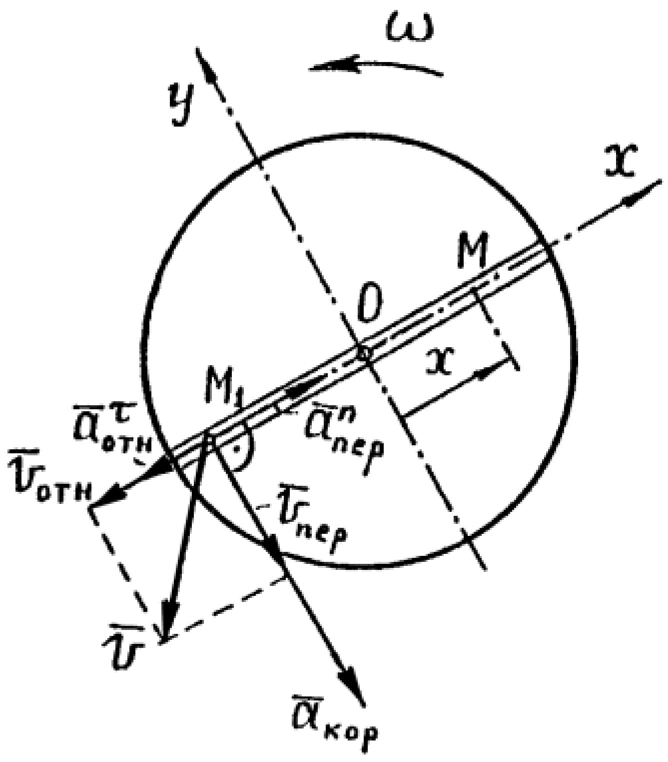


рис.47

Движение точки (ползуна М) по прорези диска, считая диск неподвижным, является относительным. Движение точки М вместе с диском во вращательном движении является переносным.

Находим положение точки М на диске при t_1 = 4[с].

$$OM_1 = x_1 = x(t_1) = 10t_1 - 3t_1^2 = -8 \text{[см]}.$$

Определяем абсолютную скорость точки М

$$\overline{V} = \overline{V}_{ОТН} + \overline{V}_{ПЕР}.$$

$$V_{ПЕР}(t_1) = \omega \cdot |OM_1| = 2 \cdot 8 = 16 \text{ [см/с]};$$

$$V_{ОТН} = \dot{x} = 10 - 6t; \quad V_{ОТН}(t_1) = 10 - 6t_1 = -14 \text{ [см/с]}.$$

$$\overline{V}_{ОТН} \perp \overline{V}_{ПЕР}; \quad V = \sqrt{V_{ОТН}^2 + V_{ПЕР}^2} = 21{,}26 \text{ [см/с]}.$$

Найдем абсолютное ускорение точки М

$$\overline{a} = \overline{a}_{ОТН}^{\tau} + \overline{a}_{ОТН}^{n} + \overline{a}_{ПЕР}^{\tau} + \overline{a}_{ПЕР}^{n} + \overline{a}_{КОР};$$

$$a_{ОТН}^{\tau} = \ddot{x} = -6 \text{ [см/с}^2\text{]}; \quad a_{ОТН}^{n} = \frac{V_{ОТН}^2}{\rho} = 0 \quad (\rho = \infty)$$

$$a_{ПЕР}^{\tau} = \varepsilon |OM_1| = 0; \quad \varepsilon = 0 \ \ (\omega = const);$$

$$a_{ПЕР}^{n} = \omega^2 |OM_1| = 2^2 \cdot 8 = 32 \text{ [см/с}^2\text{]}.$$

Ускорение Кориолиса

$$\overline{a}_{КОР} = 2\overline{\omega} \times \overline{V}_{ОТН}$$

$$a_{КОР} = 2\omega \cdot V_{ОТН} \sin\left(\overline{\omega}, \hat{}\, \overline{V}_{ОТН}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 14 \sin 90° = 56 \text{ [см/с}^2\text{]}.$$

Построим систему координат Oxy. Вычислим проекции абсолютного ускорения точки М на эти оси координат в заданный момент времени t_1

$$a_x = a_{ОТН/x}^{\tau} + a_{ПЕР/x}^{n} = -6 + 32 = 26 \text{ [см/с}^2\text{]} \quad a_y = a_{КОР/y} = -56 \text{ [см/с}^2\text{]}.$$

Абсолютное ускорение точки М

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 61{,}74 \text{ [см/с}^2\text{]}.$$

Задача 31 (рис.48, рис.49)

Кривошип ОА и кулиса O_1B вращаются вокруг горизонтальных осей O и O_1. Ползун А шарнирно скреплен с кривошипом ОА и скользит в прорези кулисы O_1B. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = 4$ c^{-1}.

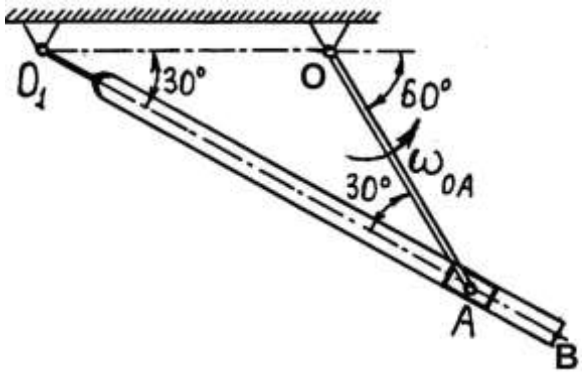


рис.48

Определить угловую скорость кулисы в указанном положении, если OA = 0,2 м.

Решение рис.49

Абсолютное движение точки A – движение по окружности с центром в точке O. Разложим это движение на два движения.

Движение точки A ползуна кривошипа вдоль прорези кулисы, считая кулису неподвижной, является относительным.

Движение точки A ползуна кривошипа вместе с кулисой представляет собой переносное движение (как будто ползун A жестко связан с кулисой).

Абсолютная скорость точки A

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \qquad \vec{v} \perp OA, \qquad \vec{v}_{пер} \perp O_1B.$$

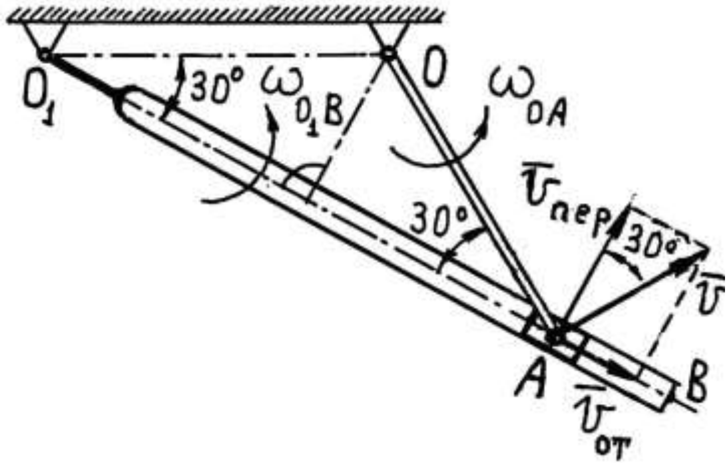


рис.49

Найдем абсолютную и переносную скорости точки A:

$$v = \omega_{OA} OA = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8 мс^{-1},$$

$$v_{пер} = v\cos 30^o = 0{,}4\sqrt{3} = 0{,}693 мс^{-1}.$$

Угловая скорость кулисы

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_{пер}}{O_1A} = \frac{v_{пер}}{2OAcos\,30^o} = \frac{v\cos 30^o}{2OA\cos 30^o} = \frac{v}{2OA} = 2c^{-1}.$$

Найдем относительную скорость точки А:

$$v_{отн} = v\sin 30^o = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4 мс^{-1}$$

Задача 32 (рис.50)

Точка М равномерно движется по образующей кругового конуса с осью ОА от вершины к основанию с относительной скоростью $\overline{V}_{OTH}$; угол $\angle MOA = \alpha$. В момент $t_0 = 0$ расстояние $OM_0 = b$. Конус равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М.

Решение рис.50

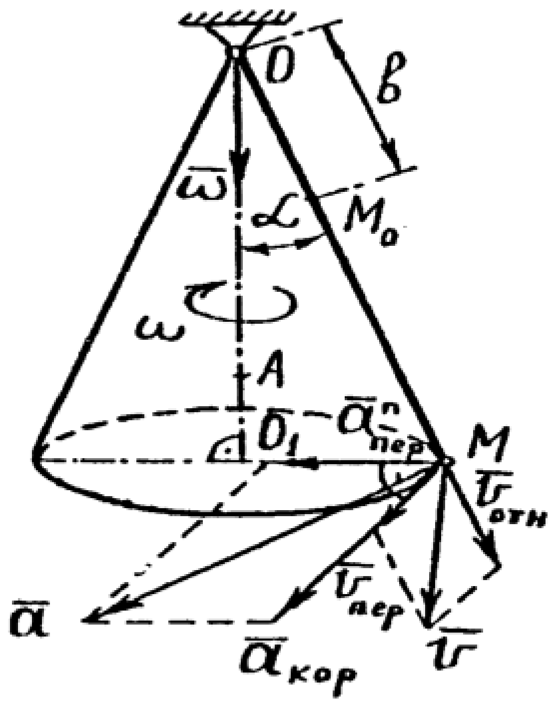


рис.50

Движение точки М по образующей конуса, считая конус неподвижным, является относительным. Движение точки М вместе с конусом во вращательном движении является переносным.

Находим положение точки М на конце в момент времени t

$$S = OM = b + V_{отн}t; \quad OM_0 = b;$$

$$O'M = OM \cdot sin\alpha = (b + V_{отн}t)\, sin\alpha.$$

Абсолютная скорость точки М

$$\bar{V} = \bar{V}_{OTH} + \bar{V}_{ПЕР}.$$

$V_{отн}$ – известно по условию задачи;

$$V_{пер} = \omega\, O'M = \omega\, (b + V_{отн}\, t)\, sin\alpha. \quad V = \sqrt{V_{OTH}^2 + V_{ПЕР}^2}; \quad \bar{V}_{OTH} \perp \bar{V}_{ПЕР}.$$

Абсолютное ускорение точки М

$$\bar{a} = \bar{a}_{OTH}^{\tau} + \bar{a}_{OTH}^{n} + \bar{a}_{ПЕР}^{\tau} + \bar{a}_{ПЕР}^{n} + \bar{a}_{КОР};$$

$$a_{OTH}^{\tau} = \frac{dV_{OTH}}{dt} = 0 \quad (V_{отн} = const); \quad a_{OTH}^{n} = \frac{V_{OTH}^2}{\rho} = 0 \quad (\rho = \infty);$$

$$a_{ПЕР}^{\tau} = \varepsilon \cdot O'M = 0; \quad \varepsilon = 0 \ \ (\omega = const);$$

$$a_{ПЕР}^{n} = \omega^2 O'M = \omega^2 (b + V_{OTH} t) \sin\alpha.$$

Ускорение Кориолиса

$$\bar{a}_{КОР} = 2\bar{\omega} \times \bar{V}_{ОТН},$$

где $a_{КОР} = 2\omega \cdot V_{ОТН} \sin\left(\bar{\omega}, ^\wedge \bar{V}_{ОТН}\right) = 2\omega \cdot V_{ОТН} \sin\alpha$.

$$a = \sqrt{(a^n_{ПЕР})^2 + a^2_{КОР}}\ ;\quad \bar{a}^n_{ПЕР} \perp \bar{a}_{КОР}.$$

Задача 33 (рис.51)

Магистраль южных железных дорог к северу от Мелитополя идет прямо по меридиану. Тепловоз движется со скоростью $V = 90$ [км/ч] на север; широта места $\varphi = 47^\circ$.Найти кориолисово ускорение тепловоза.

Решение рис.51

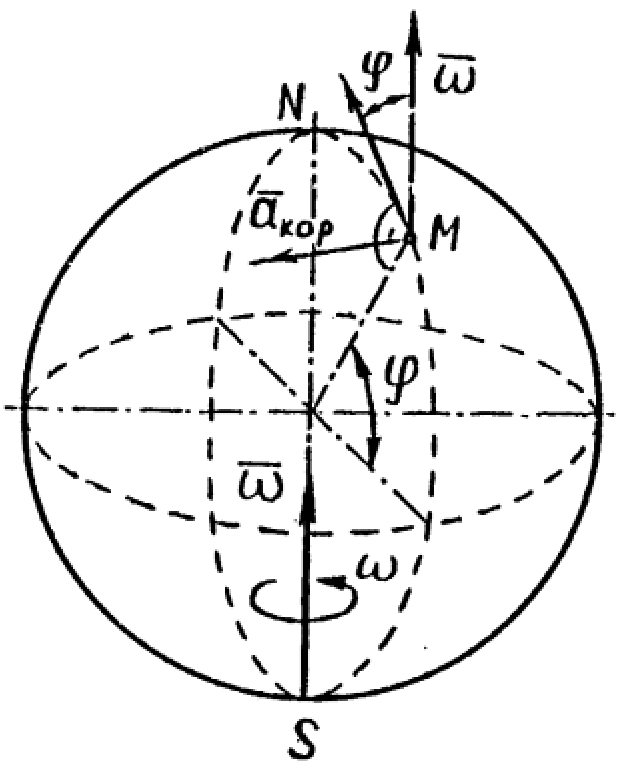


рис.51

Точка (тепловоз) М совершает сложное движение. Движение точки М по поверхности Земли (по меридиану), считая Землю неподвижной, является относительным. Движение точки М во вращательном движении вместе с Землей вокруг ее оси NS является переносным.

Относительная скорость точки М

$$V_{отн} = 90\ [км/ч] = 25\ [м/с] = 2500\ [см/с].$$

Угловая скорость вращения Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0{,}727 \cdot 10^{-4}\ [\text{с}^{-1}].$$

Ускорение Кориолиса точки М (тепловоза)

$$\overline{a}_{КОР} = 2\overline{\omega}_{ПЕР} \times \overline{V}_{ОТН}; \quad \overline{\omega}_{ПЕР} = \overline{\omega}.$$

$$a_{КОР} = 2\omega \cdot V_{ОТН} \sin\left(\overline{\omega}, {}^{\wedge}\overline{V}_{ПЕР}\right) = 2\omega V_{ОТН} \sin\varphi = 2 \cdot 0{,}727 \cdot 10^{-4} \cdot 2500 \cdot 0{,}7314 = 0{,}266$$

$$a_{кор} = 0{,}266[\text{см/с}^2];$$

$$sin\varphi = sin47^\circ = 0{,}7314.$$

Задача 34 (рис.52,рис.53)

Платформа с установленным на ней электромотором движется по горизонтальному участку пути со скоростью $v = v_{пл} = 8мс^{-1}$. Ротор электромотора радиусом R = 0,1 м вращается с угловой скоростью ω = 80с$^{-1}$. Определить скорость точки М ротора в указанном положении.

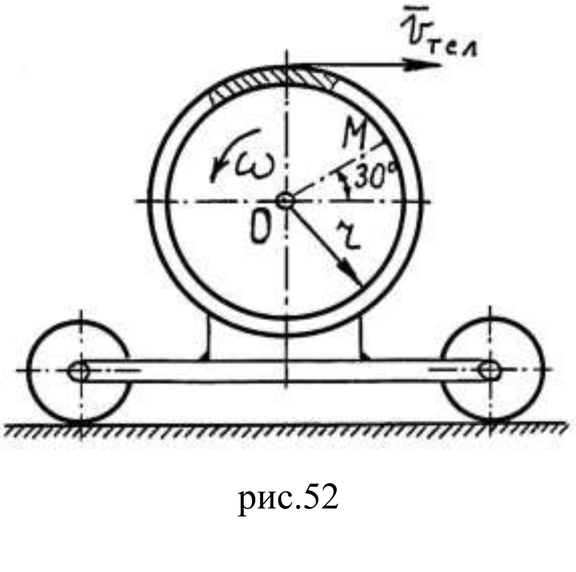


рис.52

Решение рис.53

Точка М ротора электромотора совершает сложное движение. Движение точки М по окружности радиуса R, считая платформу неподвижной, является относительным. Движение точки М вместе с платформой (как будто точка М соединена с платформой), является переносным.

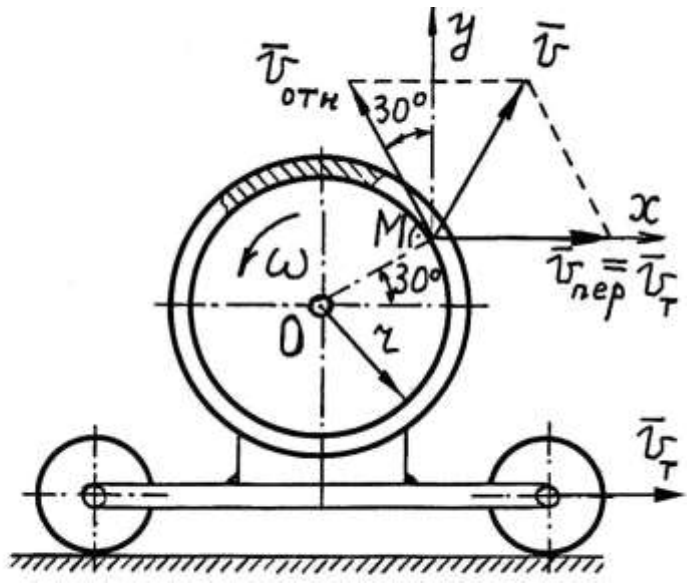


рис.53

$$v_{отн} = \omega R = 80 \cdot 0{,}1 = 8мс^{-1}, \quad \vec{v}_{отн} \perp OM \ ;$$

$$v_{пер} = v_{пл} = 8мс^{-1}.$$

Абсолютная скорость точки М:

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}.$$

При проектировании этой формулы на оси координат, получаем:

$$v_x = v_{пер} - v_{отн} \sin 30^o = 8 - 8 \times 0{,}5 = 4мс^{-1};$$

$$v_y = v_{отн} \cos 30^o = 8 \times 0{,}866 = 6{,}93мс^{-1}.$$

Остается найти величину абсолютной скорости точки М:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - \sqrt{4^2 + 6{,}93^2} = 8мс^{-1}.$$

Задача 35 (рис.54, рис.55)

Пассажирский поезд движется по горизонтальному участку пути со скоростью $v = 54км/ч$. Отвесно падающий дождь оставляет на оконных стеклах вагона полосы под углом $\alpha = 60^0$ к вертикали . Найти скорость падения дождевых капель.

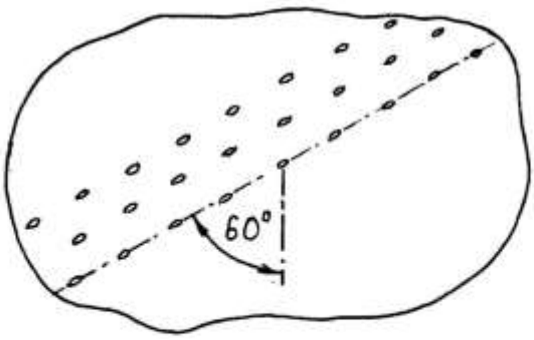


рис.54

Решение рис.54

Найдем составные части сложного движения точки М (капли дождя).

Абсолютным движением капли дождя является вертикальное падение (без учета ветра).

Движение капли дождя по оконному стеклу вагона, считая вагон неподвижным, является относительным. Движение капли дождя вместе с оконным стеклом является переносным.

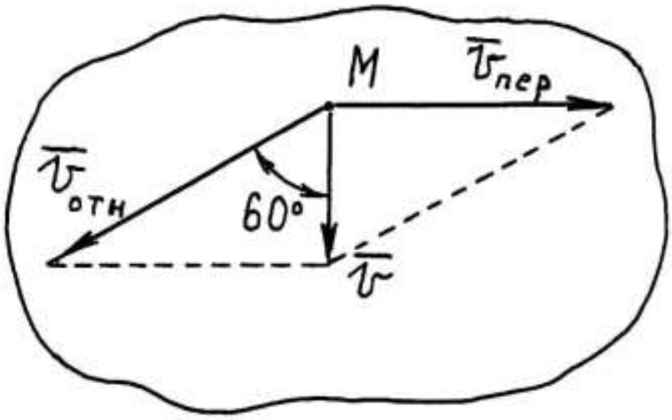


рис.55

Переносная скорость капли дождя равна скорости поезда:

$$v_{пер} = v = 54 км/ч = 15 м/с .$$

Абсолютная скорость этой капли :

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер},$$

причем

$$v = v_{пер} tg 30^o = 15 \times 0{,}577 = 8{,}66 мс^{-1};$$

$$v_{отн} = \frac{v}{\sin 30^o} = \frac{8{,}66}{0{,}5} = 17{,}32 мс^{-1}.$$

ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача 36 (рис. 56)

Точка массы m движется в плоскости Oxy согласно уравнениям:

$$x = a\sin\omega t; \qquad y = b\cos\omega t.$$

Найти силу, действующую на точку.

Решение (рис. 56)

Найдем траекторию точки. Исключив время t из уравнений ее движения. Получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Траекторией точки M является эллипс с полуосями a и b .

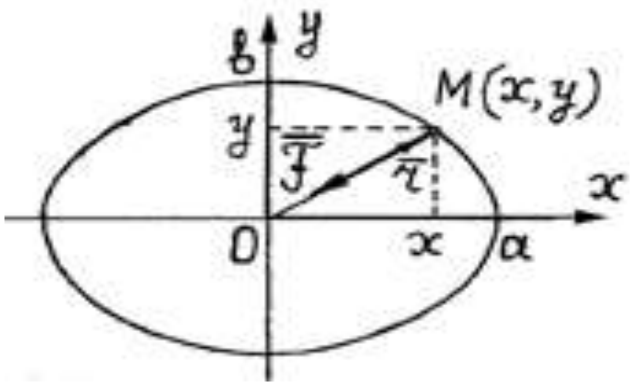


Рисунок 56

При t=0 $x_0 = 0$ и $y_0 = b$. Точка движется по эллипсу по часовой стрелке.

Проекции приложенной к точке силы $\vec{F}$ на оси координат:

$$F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mb\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2 y.$$

Проекции радиус-вектора $\vec{r}$ точки M на оси координат и длина этого вектора равны:

$$r_x = x; \qquad r_y = y; \qquad \vec{r} = \vec{r}(x, y);$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Далее получаем:

$$F_x = -m\omega^2 r_x; \qquad F_y = -m\omega^2 r_y; \qquad F = m\omega^2 r;$$
$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}.$$

Сила $\vec{F}$ направлена к точке О и её величина пропорциональна расстоянию от начала координат до точки приложения этой силы.

Задача 37 (рис. 57.и (рис. 58)

Груз М массы m = 0,102 кг, подвешенный на нити длиной ОМ= l = 0,3 м в точке О, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол α = 60° .

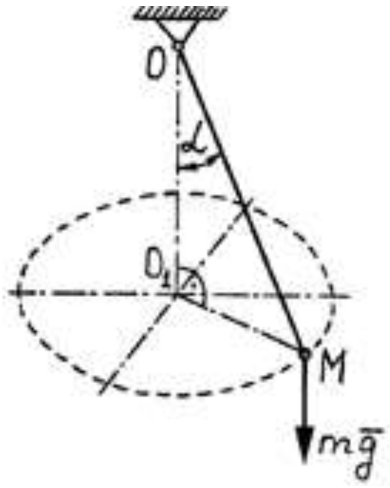


Рисунок 57

Определить скорость v груза и натяжение Т нити.

Решение (рис. 58)

Будем считать груз материальной точкой. Приложим к точке М силу тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{T}$.

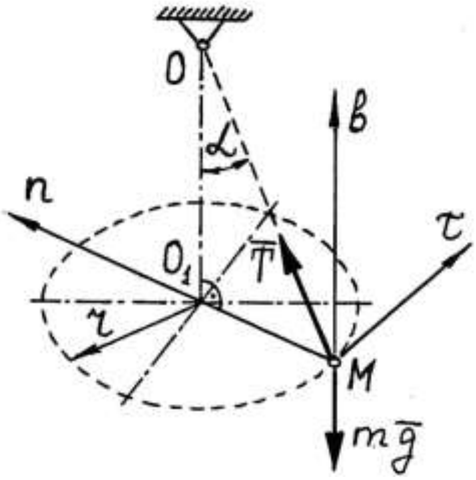


Рисунок 58

Построим подвижную естественную систему координат Mτnb.

Суммы проекций приложенных к точке сил на указанные оси :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l\sin\alpha}; \qquad a_b = 0.$$

Составим дифференциальные уравнения движения точки в подвижной естественной системе координат:

$$m\frac{dv}{dt} = 0; \qquad m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = T\sin\alpha; \qquad 0 = T\cos\alpha - mg.$$

Из системы уравнений находим:

$$v = const; \qquad T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \qquad v = \sqrt{gl\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

С учетом исходных данных получаем:

$$T = 2H; \qquad v = 2{,}1мс^{-1}.$$

Задача 38 (рис. 59)

Тело спускается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент тело имело скорость $\mathbf{V}_0$. Найти уравнение движения тела, если коэффициент трения равен $\mathbf{f}$.

Решение. (рис. 59)

Примем тело за материальную точку **M** . Начало координат поместим в начальное положение материальной точки. Ось X направим вдоль наклонной плоскости в сторону движения точки, а ось Y – перпендикулярно плоскости.

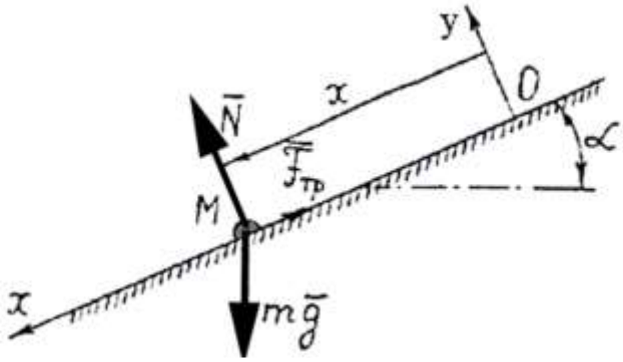


Рисунок 59

Приложим к точке силу тяжести mg, нормальную реакцию плоскости N и силу трения $F_{тр}$. Составляем уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = mg\,sin\,\alpha - F_{тр}$$
$$m\ddot{y} = N - mg\,cos\,\alpha$$

Поскольку движение точки происходит только вдоль оси X, то $\ddot{y} = 0$ и из второго уравнения следует, что $N = mg\,cos\,\alpha$.

Сила трения не обеспечивает точке состояние покоя (точка движется), сила трения имеет предельное значение $F_{тр} = fN = fmg\,cos\,\alpha$.

Итак, уравнение движения точки имеет вид

$$m \cdot \ddot{x} = mg\,sin\,\alpha - fmg\,cos\,\alpha = mg(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha)$$

Правая часть уравнения движения является постоянной величиной, учитывая, что $F_0 = mg(sin\alpha - f\,cos\,\alpha)$ и $x_0 = 0$, после интегрирования получим

$$x = \frac{g(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha)}{2}t^2 + V_0 t.$$

Задача 39 (рис. 60)

Материальная точка массой $\boldsymbol{m}$ движется прямолинейно под действием силы $\boldsymbol{F = F_0\,cos\,\omega t}$ ($\boldsymbol{F_0}$ и $\boldsymbol{\omega}$ - постоянные величины). Пренебрегая весом, определить скорость и положение точки в момент времени $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, если она в начальный момент находилась в начале координат и ее скорость была равна V_0.

Решение. **(рис. 60)**

Точка движется прямолинейно, поэтому достаточно одной оси координат. Направим ось X вдоль траектории точки. Изобразим точку в промежуточном положении на ее траектории. Приложим к точке силу F (вес точки и реакции связей отсутствуют).

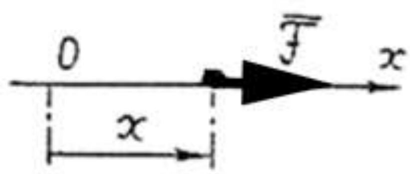


Рисунок 60

Составим уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = F_0 \cos \omega t$$

Скорость точки :

$$V = \dot{x} = \frac{1}{m}\int F_0 \cos \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega}\sin \omega t + C_1.$$

Подставляя начальные условия $t = 0;\ V = V_0$ с учетом того, что $\sin 0 = 0$, получим $C_1 = V_0$.

Закон движения точки:

$$x = \int V(t)dt = \int\left(\frac{F_0}{m\omega}\sin \omega t + V_0\right)dt = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos \omega t + V_0 t + C_2.$$

Подставляя начальные условия $t = 0;\ x = 0$ с учетом того, что $\cos 0 = 1$, получим $C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}$.

Находим для момента времени $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

$$- V = \frac{F_0}{m\omega}\sin \omega \frac{\pi}{2\omega} + V_0 = \frac{F_0}{m\omega}\sin \frac{\pi}{2} + V_0 = \frac{F_0}{m\omega} + V_0;$$

$$-x = -\frac{F_0}{m\omega^2} cos\,\omega \frac{\pi}{2\omega} + V_0 \frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2} = V_0 \frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Задача 40 (рис. 61)

Груз массы $\boldsymbol{m}$ подвешен на нити длиной $\boldsymbol{l}$. В начальный момент времени груз отклонили в сторону (нить натянута) и сообщили ему горизонтальную скорость, перпендикулярную нити. Найти величину скорости груза и натяжение нити, если нить составляет с вертикалью постоянный угол α.

Решение. **(рис. 61)**

Будем считать груз материальной точкой. Приложим к грузу силу тяжести mg и натяжение нити N.

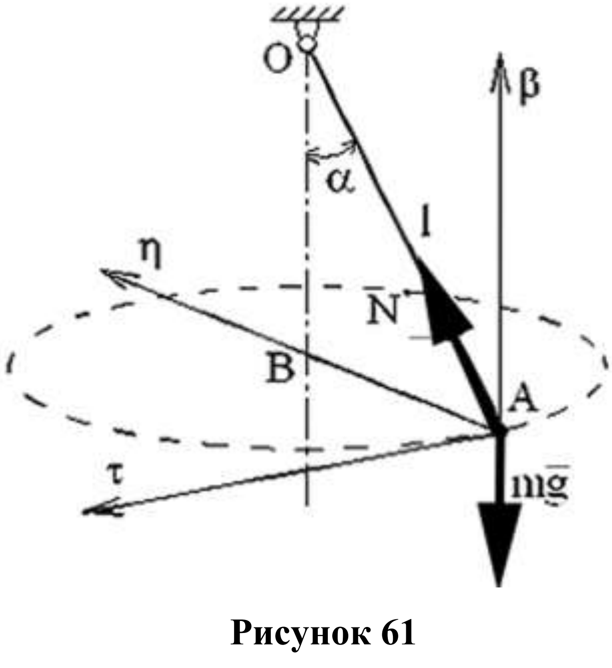


Рисунок 61

Как следует из условия задачи, при движении груза нить описывает коническую поверхность, траекторией груза является окружность с центром в точке В и радиусом АВ=$l\,sin\,\alpha$. Если известна траектория, воспользуемся естественной системой координат (τ, η, β) и уравнениями движения в естественной форме

$$\begin{cases} m\dot{V} = 0 \\ m \cdot \dfrac{V^2}{l\,sin\,\alpha} = N\,sin\,\alpha \\ 0 = N\,cos\,\alpha - mg \end{cases}$$

Из первой формулы следует, что скорость движения груза будет постоянной по величине, т.е. будет сохранять начальное значение. Из третьей формулы можем выразить натяжение нити

$$N = \frac{mg}{cos\,\alpha}$$

Подставив полученное выражение силы натяжения во вторую формулу, получим

$$m \cdot \frac{V^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha,$$

Откуда скорость $V = \sqrt{\dfrac{lg\,sin^2\,\alpha}{cos\,\alpha}}$.

Задача 41. (рис. 62)

При движении поезда массы $\mathbf{m}$ по участку пути однородного профиля сила сопротивления движению изменяется по закону $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{aV}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{a}$ - постоянные величины; $\mathbf{V}$ - переменная скорость поезда. Сила тяги локомотива изменяется по закону $\mathbf{T} = \mathbf{F}_0 - \mathbf{bV}$, где $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{b}$ - постоянные величины ($\mathbf{F}_0 > \mathbf{R}_0$). Определить закон изменения скорости и закон движения поезда.

Решение. (рис. 62)

Примем поезд за материальную точку. Направим координату X по направлению движения Начало координат совпадает с начальным положением поезда.

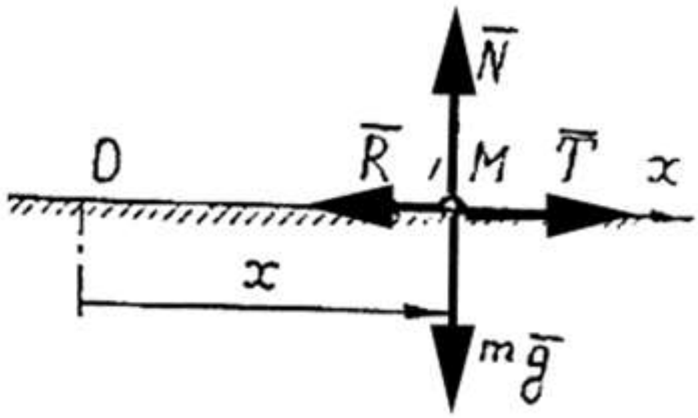


Рисунок 62

Изобразим точку в промежуточный момент времени на ее траектории. К точке приложены сила тяжести mg, движущая сила T, сила сопротивления R и нормальная реакция плоскости N.

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\frac{dV}{dt} = (F_0 - bV) - (R_0 + aV).$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{(b+a)V}{m} - \frac{F_0 - R_0}{m}.$$

решение этого уравнения имеет вид

$$V = C_1 e^{-qt} + \frac{p}{q}, ãäå$$

$$q = \frac{a+b}{m}, p = \frac{F_0 - R_0}{m}$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из начальных условий: при $t = 0;\ V = 0,\ C_1 = \dfrac{F_0 - R_0}{b+a}$.

Закон изменения скорости $V = \dfrac{p}{q}(1 - e^{-qt}) = \dfrac{F_0 - R_0}{b+a}\left(1 - e^{-(\frac{a+b}{m})t}\right)$

Установившееся значение скорости (значение скорости через достаточно большой промежуток времени) $V_{óñò} = \lim\limits_{t \to \infty} V = \dfrac{p}{q} = \dfrac{F_0 - R_0}{b + a}$.

Подставляя зависимости $V=dx/dt$, получим дифференциальное уравнение

$$dx = \frac{p}{q}(1 - e^{-qt})dt..$$

После интегрирования которого с учетом начального условия ($t = 0$; $x = \chi_0 = 0$), находим закон движения точки

$$x = \frac{p}{q}\left(t - \frac{1}{q}\left(1 - e^{-qt}\right)\right).$$

Задача 42. (рис. 63)

Горизонтальная трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг вертикальной оси Az. В трубке находится тяжелый шарик M. Найти движение шарика относительно трубки, если в начальный момент шарик находился на расстоянии $AM_0 = \boldsymbol{b}$ от оси вращения, а его относительная скорость была равна нулю.

Решение. (рис. 63)

Введем подвижную ось Ax, совпадающую с осью трубки *AB.* Примем шарик за материальную точку. Движение шарика вдоль трубки при условии, что трубка неподвижна, является относительным; вращательное движение шарика вместе с трубкой вокруг оси Az является переносным. Учитываем, что в рассматриваемый момент времени шарик находится на расстоянии x от оси вращения.

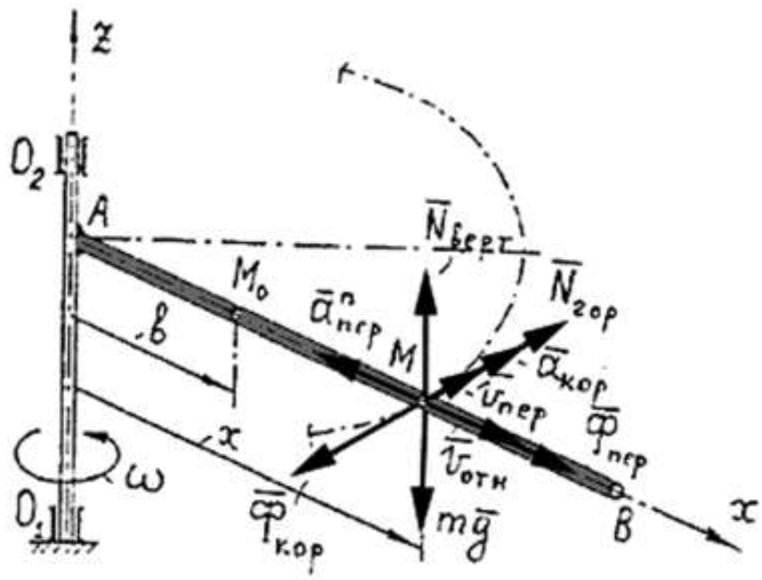


Рисунок 63

На шарик действуют силы: вес mg и реакции стенок трубки $N_{верт}$ и $N_{гор}$.

Составим уравнение относительного движения шарика

$$m \cdot \tilde{a}_{îòí} = \overline{mg} + \overline{N}_{âåðò} + \overline{N}_{ãîð} + m \cdot \tilde{a}^{\tau}_{ïåð} + m \cdot \tilde{a}^{\eta}_{ïåð} + m \cdot \tilde{a}_{êîð} .$$

Поскольку вращение трубки происходит с постоянной скоростью, следовательно, угловое ускорение $\varepsilon = 0$ и поэтому $a^{\tau}_{пер} = x \cdot \varepsilon = 0$.

Заметим, что

$$a_{отн} = \ddot{x}; \quad a^{\eta}_{пер} = \omega^2 x;$$

$$a_{кор} = 2\omega V_{отн} \sin(\overline{\omega} \wedge \overline{V}_{от}) = 2\omega\dot{x} \sin 90^\circ = 2\omega\dot{x} .$$

Спроектировав уравнение на ось А**x**, получим

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x; \text{ или } \qquad \ddot{x} - \omega^2 x = 0 .$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} .$$

Относительная скорость точки

$$\dot{x} = \omega(C_1 e^{\omega t} - C_2 e^{-\omega t}).$$

Подставив в полученные выражения начальные условия $t = 0$; $x = b$; $\dot{x} = 0$, получим систему уравнений для нахождения констант интегрирования

$$\begin{aligned} b &= C_1 + C_2 \\ 0 &= \omega(C_1 - C_2) \end{aligned}.$$

Откуда $C_1 = C_2 = \dfrac{b}{2}$.

Закон относительного движения шарика

$$x = \frac{b}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Задача 43 (рис. 64)

. Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса **r** , чтобы оно, катясь без проскальзывания, поднялось на высоту **h** по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом ? Коэффициент трения качения равен δ . Колесо считать однородным диском. Определить также ускорение оси колеса.

Решение. (рис. 64)

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии.

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n_A} A_k^e .$$

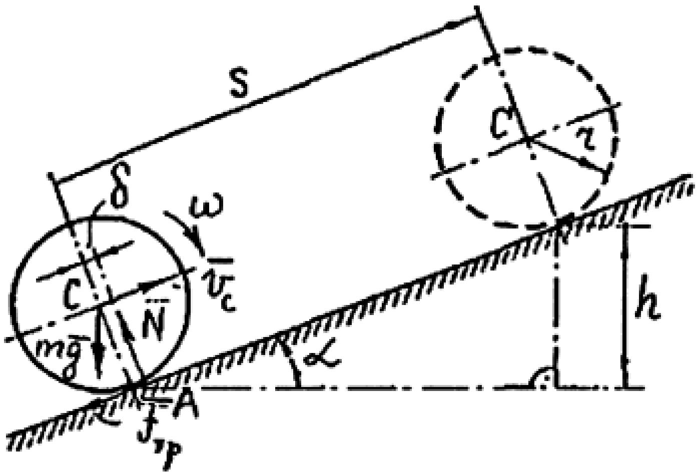


Рисунок 64

Кинетическая энергия колеса в начальном положении

$$T_0 = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2} = \frac{3mV_c^2}{4} .$$

Собственный момент инерции колеса равен $J_c = \frac{1}{2}mr^2$ и его угловая скорость $\omega = \frac{V_c}{r}$,

На колесо действуют силы: тяжести mg, нормальная реакция плоскости $N = mg\cos\alpha$, трение скольжения $F_{тр}$ и момент трения качения $M_{тр} = N\delta$.

Работа активных сил, приложенных к колесу, с учетом того, что угол поворота колеса равен $\varphi = \frac{s}{r}$,

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_k^e = -mgs\sin\alpha - (N\delta)\varphi = -mgs\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right).$$

На основании указанной теоремы имеем:

$$\frac{3}{4}mV_c^{\ 2} - \frac{3}{4}mV_0^{\ 2} = -mgs\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right).$$

В верхнем положении колесо остановится, следовательно, $V_c = 0$ и перемещение оси колеса составит $s = \dfrac{h}{sin\alpha}$. Скорость оси колеса в начальном положении

$$V_{\tilde{N}0} = \sqrt{\frac{4}{3}gh\left(1 + \frac{\delta}{r}ctg\alpha\right)}.$$

Дифференцируя по времени это выражение, получим

$$2\frac{3\cdot}{4}V_c\frac{dV_c}{dt} = -g\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right)\frac{ds}{dt}.$$

Ускорение оси колеса (учитываем, что $V_c = \dfrac{ds}{dt}$)

$$a_c = \frac{dV_c}{dt} = -\frac{2g}{3}\left(sin\alpha + \frac{\delta}{r}cos\alpha\right).$$

Задача 44 (рис. 65)

Вагонетка для обслуживания пути двигалась по горизонтальному участку пути под действием двигателя. Масса корпуса вагонетки **M**=5000кг, масса каждой из двух колесных пар **m**=600кг, коэффициент трения качения **δ**=0.003м. Колесные пары представляют собой однородные диски радиуса **r**=0.3м. Какой путь пройдет вагонетка до остановки после выключения двигателя, если в момент выключения ее скорость была $\mathbf{V_0}$=36км/ч?

Решение. (рис. 65)

Конструкция состоит из трех тел: корпуса и двух колесных пар. Корпус движется поступательно, колесные пары – плоскопараллельно. Используем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n_A} A_k^e .$$

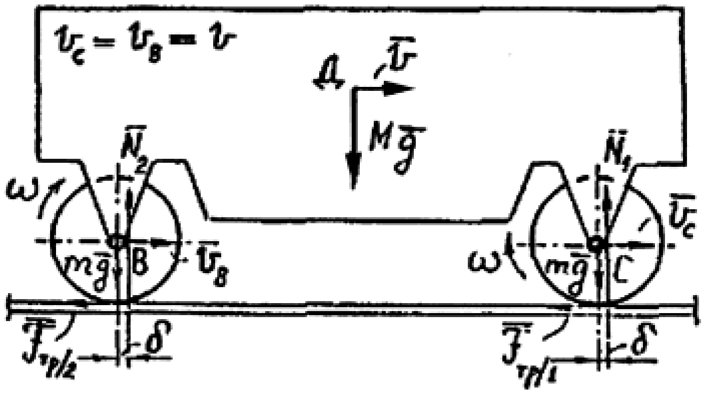


Рисунок 65

Собственный момент инерции каждой колесной пары $J_c = \frac{1}{2} m r^2$, угловая скорость колес $\omega = \frac{V}{r}$ (V – скорость корпуса вагонетки), кинетическая энергия системы может быть выражена

$$T = \frac{MV^2}{2} + 2\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}\right) = \frac{MV^2}{2} + 2\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{mr^2}{2 \cdot 2}\left(\frac{V}{r}\right)^2\right) = \frac{M + 3m}{2} V^2.$$

На рассматриваемую систему действуют силы: тяжести Mg и mg, нормальные реакции колесных пар $N_1 = N_2 = N = \frac{Mg + 2mg}{2}$ (в силу симметричности конструкции), моменты трения $M_{тр1} = M_{тр2} = N_1 \delta = N_2 \delta = N\delta$, а также трения скольжения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Работа сил, приложенных к колесу, с учетом того, что угол поворота колеса может быть выражен $\varphi = \frac{s}{r}$ (s – перемещение вагонетки), а также формулы

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_k^e = -(N_1 \delta)\varphi - (N_2 \delta)\varphi = -2 \frac{M + 2m}{2} \frac{g\delta s}{r} .$$

или

$$\frac{M+3m}{2}V^2-\frac{M+3m}{2}V_0^{\,2}=-\frac{(M+2m)g\delta s}{r}.$$

Поскольку в конце рассматриваемого промежутка времени вагонетка остановится, следовательно, $V=0$. Поэтому после преобразований получим величину пройденного пути

$$s=\frac{(M+3m)rV_0^{\,2}}{2(M+2m)g\delta}=\frac{(5000+3\cdot 600)\cdot 0.3\cdot\left(36\cdot\dfrac{1000}{3600}\right)^2}{2\cdot(5000+2\cdot 600)\cdot 9.81\cdot 0.03}\approx 55.9\text{ì}\ .$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Задача 45 (рис. 66)

По призме **E** массой $m \ = 7$кг могут двигаться тележки **A** и **B** массами $m_1 = 1$кг и $m_2 = 2$кг соответственно . Тележки связаны тросом. В начальный момент времени система находилась в состоянии покоя, а затем тележка **A** начинает двигаться относительно призмы вправо под действием внутренних сил. Пренебрегая потерями на трение, определить перемещение призмы **E** для момента времени $\mathbf{t}_1 = 0.5$с, если закон относительного движения тележек $\mathbf{s} = 2\mathbf{t}^2$ м.

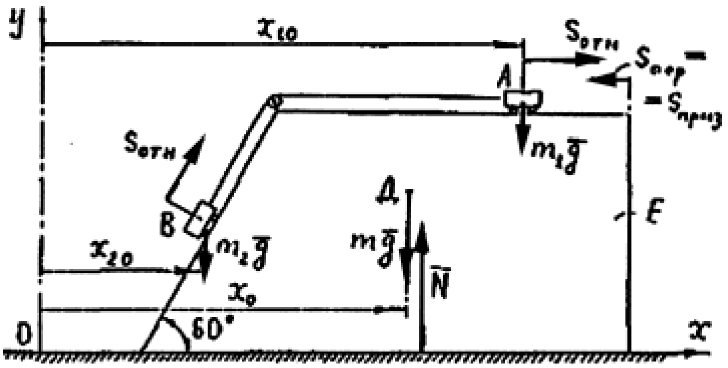


Рисунок 66

Решение. (рис. 66)

Система состоит из трех подвижных тел и все тела двигаются поступательно. На систему тел действуют внешние силы: тяжести $m_E g$, $m_A g$ и $m_B g$, а также результирующая нормальной реакции поверхности N. Для решения используем теорему об изменении количества движения системы:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n_F} \overline{F}_{kx}^{\,e};$$

$$\sum_{i=1}^{n_F} \overline{F}_{kx}^{e} = 0; Q_x = const = 0$$

По условию задачи (все внешние силы вертикальны, вначале система неподвижна, призма Е перемещается по горизонтальной плоскости).

$Q_x = M\dot{x}_c = 0; \dot{x}_c = const = x_{cv}$ Выполняется закон сохранения проекции центра масс системы на ось Ох:

$$\tilde{o}_c = \frac{\sum_{k=1}^{3} m_k \tilde{o}_k}{\sum_{k=1}^{3} m_k} = \tilde{o}_{co}; \qquad \sum_{k=1}^{3} m_k \tilde{o}_k = \sum_{k=1}^{3} m_k \tilde{o}_{kv}$$

С помощью этой зависимости составим выражение:

$$m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m\ x_0 =$$
$$= m_1(x_{10} + s_{\hat{i}\grave{o}\acute{i}} - s_{\ddot{i}\mathring{a}\eth}) + m_2(x_{10} + s_{\hat{i}\grave{o}\acute{i}}\ \cos 60^\circ - s_{\ddot{i}\mathring{a}\eth}) + m(x_0 - s_{\ddot{i}\mathring{a}\eth}),$$

где $\boldsymbol{s_{отн}} = \boldsymbol{2t^2}$ –закон относительного движения тележки;

$\boldsymbol{s_{призм}} = \boldsymbol{s_{пер}}$ –переносное перемещение тележки (перемещение призмы)

Окончательно найдем

$$s_{\ddot{i}\eth\grave{e}\c{c}} = \frac{m_1 + m_2 \cos 60^\circ}{m_1 + m_2 + m} s_{\hat{i}\grave{o}\acute{i}} \text{ м.}$$

При $m = 7$кг, $m_1 = 1$кг и $m_2 = 2$кг, и $\mathbf{t_1 = 0.5}$с получим

$$s_{\ddot{i}\eth\grave{e}\c{c}} = \frac{1 + 2\cdot 0.5}{7 + 1 + 2} 2t^2 \bigg|_{t=0.5} = 0.1 \text{ м.}$$

Задача 46 (рис. 67)

Механизм шарнирного параллелограмма состоит из двух кривошипов *O_1A* и *O_2B,* а также шатуна *AB*, имеющих массу **m** и длину **l** каждый. Кривошипы вращаются с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Определить сумму горизонтальных составляющих реакций шарниров O_1 и O_2 в функции угла φ.

Решение. **(рис. 67)**

Система состоит из трех подвижных тел, два из которых двигаются вращательно, а одно – поступательно. На систему тел действуют внешние силы: тяжести mg, а также составляющие реакций неподвижных шарниров X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}, Y_{O2}.

По теореме о движении центра масс системы в проекции на ось X

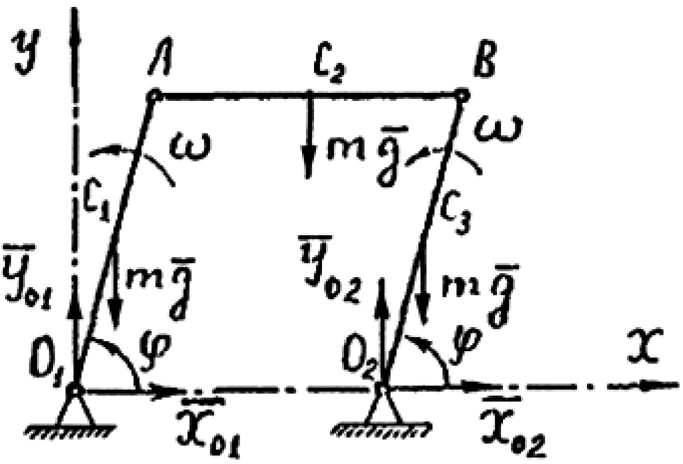


Рисунок 67

$$M \cdot \tilde{o}_c = \sum_{i=1}^{n_F} F_{k\tilde{o}}^{e} ,$$

где M=3m и $F_{kx} = X_{01} + X_{02}$.

Горизонтальная координата центра масс равна:

$$\tilde{o}_c = \frac{\sum_{k=1}^{3} m_k \tilde{o}_k}{3m} =$$

$$= \frac{m\dfrac{l}{2}\cos\varphi + m\left(l\cos\varphi + \dfrac{l}{2}\right) + m\left(l\cos\varphi + l - \dfrac{l}{2}\cos\varphi\right)}{3m} = \frac{l}{3}\left(2\cos\varphi + \frac{3}{2}\right).$$

Дифференцируя это выражение по времени t, с учетом $\varphi = \omega t$, получим

$$\dot{x}_C = \frac{2l}{3}(-sin\varphi)\dot{\varphi} = -\frac{2l\omega}{3}sin\varphi$$

$$\ddot{x}_C = -\frac{2l}{3}cos\,\varphi\dot{\varphi} = -\frac{2l\omega^2}{3}cos\,\varphi$$

Сумма горизонтальных составляющих реакций шарниров равна:

$$\tilde{O}_{\hat{\imath}\,1} + \tilde{O}_{\hat{\imath}\,2} = 3m\left(-\frac{2l\omega^2}{3}\cos\varphi\right) = -2ml\omega^2\cos\varphi\,.$$

Задача 47 (рис. 68)

Тонкий однородный стержень ОА массы ***m*** и длины ***l*** может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси О. В начальный момент стержень отведен в горизонтальное положение и отпущен без начальной скорости. Определить реакцию оси О при повороте стержня *OA* на угол $\varphi = 30°$.

Решение. (рис. 68)

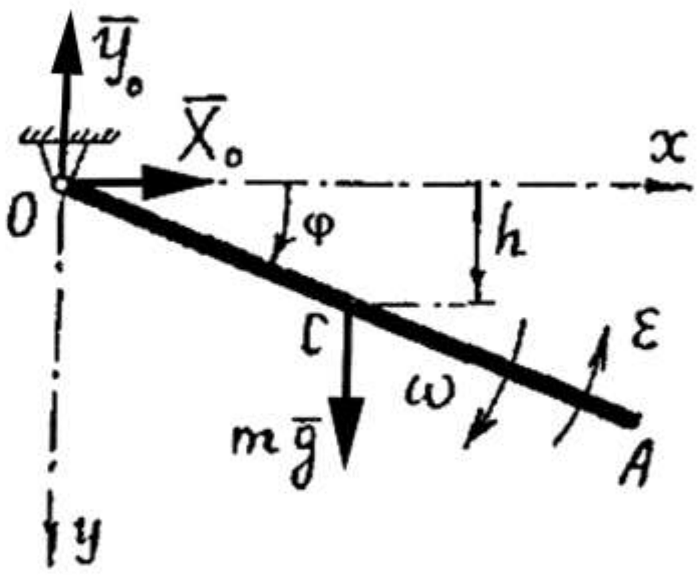


Рисунок 68

К стержню приложена сила тяжести mg, а также составляющая реакции шарнира О вдоль осей координат $\tilde{O}_{\hat{\imath}}$, $Y_{\hat{\imath}}$.

Используем теорему о движении центра масс в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} m \cdot \tilde{o}_c = \sum F^e_{k\,x} \\ m \cdot \ddot{y}_c = \sum F^e_{k\,y} \end{cases} \qquad \begin{cases} m \cdot \tilde{o}_c = X_O \\ m \cdot \ddot{y}_c = -Y_O + mg \end{cases}$$

Составляющие реакции оси О определяются по формулам:

$$\begin{cases} X_O = m \cdot \tilde{o}_c \\ Y_O = mg - m \cdot \ddot{y}_c . \end{cases}$$

Координаты центра масс стержня

$$x_c = \frac{l}{2} cos\varphi \text{ и } y_c = \frac{l}{2} sin\varphi .$$

При дифференцировании получим

$$\dot{x}_c = -\frac{l}{2} sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{y}_c = \frac{l}{2} \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x}_c = -\frac{l}{2} cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{l}{2} sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \qquad \ddot{y}_c = -\frac{l}{2} sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{l}{2} cos\varphi \cdot \ddot{\varphi} .$$

При $\varphi = 30°$, sinφ=0,5;. cosφ=0,5√3;

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 = \frac{3g \sin\varphi}{l} = 1.5 \frac{g}{l}, \ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{3g \cos\varphi}{2l} = 0.75\sqrt{3} \frac{g}{l}$$

Приходим к окончательному результату

$$\begin{aligned} X_O &= m \cdot \tilde{o}_c = -0.974mg \\ Y_O &= mg - m \cdot \ddot{y}_c = 0.8125mg \end{aligned} .$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Задача 48

Тонкий однородный стержень массы **m** и длиной ОА$=\boldsymbol{l}$ может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O. В начальный момент времени стержень отведен в горизонтальное положение и отпущен без начальной скорости. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня, когда он повернется на угол α.

Решение.

По теореме об изменении кинетического момента системы составим дифференциальное уравнение вращательного движения стержня вокруг оси О.

$$J\frac{d\omega}{dt} = mg\frac{l}{2}\cos\varphi .$$

Учитывая, что момент инерции стержня равен:

$$J = \frac{ml^2}{3},$$

получим

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g\cos\varphi}{2l}$$

Воспользуемся подстановкой, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{3g\cos\varphi}{2l} .$$

Разделим переменные и проинтегрируем исходное дифференциальное уравнение вращательного движения стержня с учетом начальных условий движения (при φ=0, ω_0 =0

$$\omega d\omega = \frac{3g\cos\varphi}{2l}d\varphi$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{3g\,sin\varphi}{2l}.$$

Угловая скорость стержня

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\,sin\varphi}{l}}.$$

Задача 49 (рис. 69)

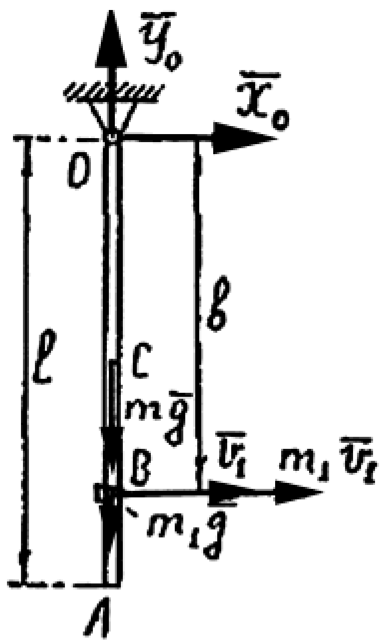


Рисунок 69

Доска *OA* массой $\mathbf{m}$ =4кг и длиной $\mathbf{l}$ =1м может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси *O*. В неподвижную доску на расстоянии $\mathbf{b}$ =0.8м от оси *O* попадает и застревает пуля массой $\mathbf{m}_1$=0.01кг, летевшая со скоростью $\mathbf{V}_1$=800м/с. Определить угловую скорость доски после попадания пули. При вычислении момента инерции доску считать однородным стержнем.

Решение. (рис. 70)

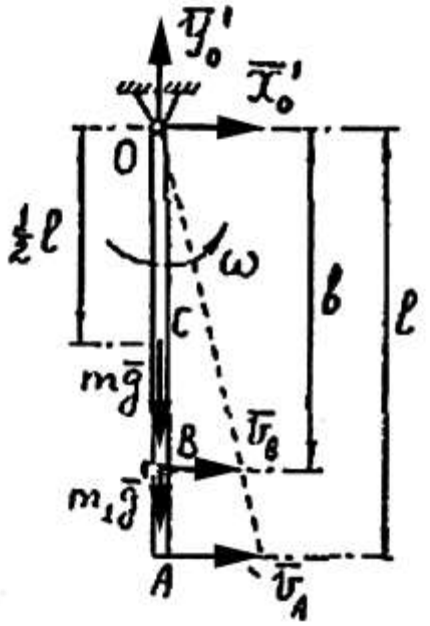


Рисунок 70

На доску действуют силы: mg, а также составляющие реакций оси X_O и Y_O (рис. 69). После попадания пули в доску действуют силы: mg, m_1g, а также составляющие реакций оси $\tilde{O}'_{\hat{I}}$ и $Y'_{\hat{I}}$ (рис. 70).

На основании теоремы об изменении кинетического момента имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(F_k^e\right); \sum m_z\left(F_k^e\right) = 0; K_z = const = K_{z0}.$$

Это уравнение называется законом сохранения кинетического момента системы относительно оси.

Тогда следует $K_{z0} = m_1V_1b$, (доска неподвижна)

$$K_z = m_1V_1b + J_z\omega = \omega(m_1b^2 + \frac{ml^2}{3}),$$ где $J_z = \frac{ml^2}{3}$ -момент инерции доски относительно оси Oz, $V = \omega b$.

С помощью равенства

$$m_1V_1b = \frac{ml^2}{3}\omega + m_1\omega b^2,$$

Определим угловую скорость доски

$$\omega = \frac{3m_1V_1b}{ml^2 + 3m_1b^2} = \frac{3 \cdot 0.01 \cdot 800 \cdot 0.8}{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0.01 \cdot 0.8^2} \approx 4.8 \text{ рад/с}.$$

Задача 50 (рис. 71)

Горизонтальная трубка длиной **l** может свободно вращаться вокруг вертикальной оси O_1O_2. Внутри трубки на расстоянии **b** от оси находится шарик массой **m**. В начальный момент трубке сообщается начальная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_0$. Момент инерции трубки относительно оси вращения $\mathbf{J_z}$. Пренебрегая потерями на трение, определить угловую скорость трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки.

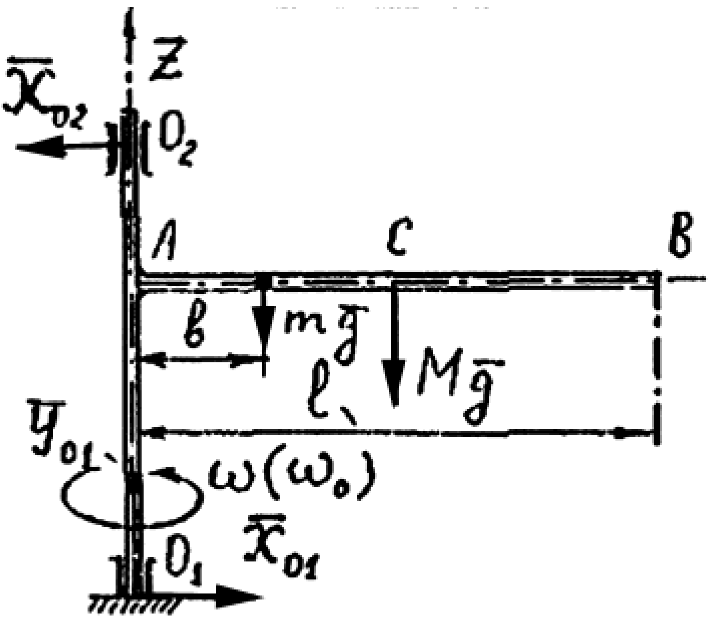


Рисунок 71

Решение. **(рис. 71)**

На систему тел действуют внешние силы: Mg, mg, а также составляющие реакций опор оси X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}.

На основании теоремы об изменении кинетического момента имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(F_k^e\right); \sum m_z\left(F_k^e\right) = 0; K_z = const = K_{z0}.$$

В данном случае выполняется закон сохранения кинетического момента системы относительно оси. Составим уравнение

$$K_{z0} = m v_b + J_z\omega_0 = (mb^2 + J_z)\omega_0,\ K_z = mvl + J_z\omega = (ml^2 + J_z)\omega,$$

где v_0 и v -скорость шарика соответственно в начальном и конечном положении во вращательном движении вместе с трубкой вокруг оси O_1O_2 (оси O_{1z}) $v_0 = \omega_0 b$, $v=\omega l$.

Угловая скорость трубки

$$J_z\omega + m\omega l^2 = J_z\omega_0 + m\omega_0 b^2.$$

$$\omega = \frac{J_z + mb^2}{J_z + ml^2}\omega_0; (\omega \angle \omega_0).$$

Задача 51 (рис. 72)

Груз массой **m** подвешен на тросе, навитом на барабан массой $\mathbf{m}_1$ с горизонтальной осью вращения. Пренебрегая потерями на трение и считая барабан сплошным однородным цилиндром, определить ускорение груза.

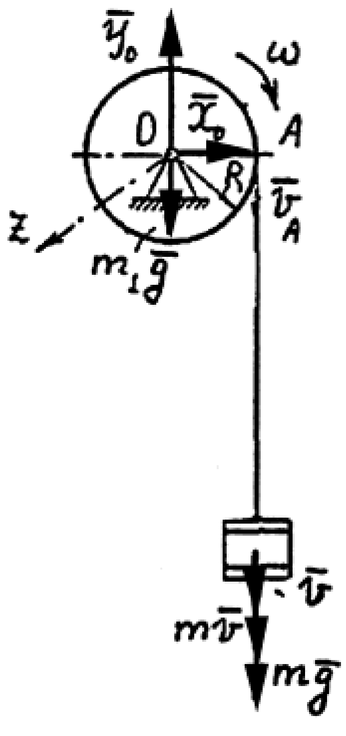


Рисунок 72

Решение. **(рис. 72)**

На систему тел действуют внешние силы: $m_1 g$, mg, а также составляющие реакций опор оси X_O, Y_O.

На основании теоремы об изменении кинетического момента имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(F_k^e\right); \sum m_z\left(F_k^e\right) = mgR.$$

Кинетический момент системы относительно оси вращения барабана:

$$K_z = J_z\omega + mVR = \left(\frac{m_1}{2} + m\right)VR\,,$$

где $\omega = \dfrac{V}{R}$, $J_z = \dfrac{1}{2}m_1R^2$ ($V -$ скорость груза; $R -$ радиус барабана).

Далее получим

$$\left(\frac{m_1}{2} + m\right)R\frac{dV}{dt} = mgR; a = \frac{dV}{dt}..$$

Ускорение груза

$$a = \frac{2mg}{m_1 + 2m}.$$

Задача 52 (рис. 73)

Через блок массой $\mathbf{m}_1 = 0.2\mathbf{m}$, имеющего горизонтальную ось вращения, переброшена веревка, к одному концу которой подвешен груз массой $\mathbf{m}$, а за другой конец ухватился человек, имеющий ту же массу $\mathbf{m}$. Пренебрегая массой веревки и считая массу блока равномерно распределенной по его ободу, определить скорость груза, если человек начнет подниматься по веревке с относительной скоростью $\mathbf{u}$.

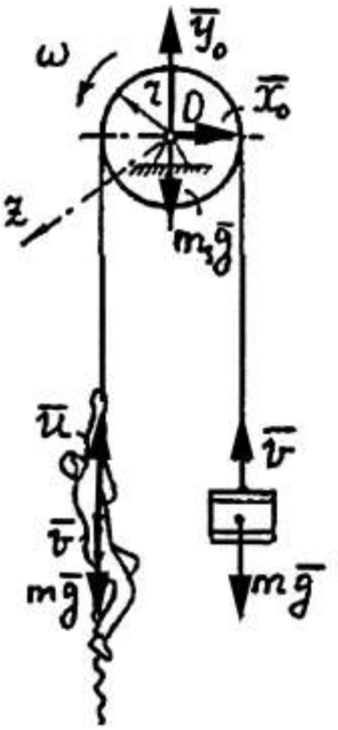


Рисунок 73

Решение. (рис. 73)

На систему тел действуют внешние силы: mg, m_1g, а также составляющие реакций опор оси X_O, Y_O.

На основании теоремы об изменении кинетического момента имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(F_k^e\right); \sum m_z\left(F_k^e\right) = mgr - mgr = 0$$

$$K_z = const = K_{z0}; K_{z0} = 0; K_z = 0. \text{(по условию задачи)}$$

В данном случае выполняется закон сохранения кинетического момента системы относительно оси. Составим уравнение

$$mvr + J_z\omega - m(u - v)r = 0;$$

где J_z=1/2 (m_1 r^2) =0,1 (m r^2).Здесь m_1 =0,2m ω= v/r-угловая скорость блока .

$$-m(u - v)r + 0.1mr^2\frac{v}{r} + mvr = 0.$$

Скорость груза

$$v = \frac{10}{21}u\,.$$

Задача 53 (рис. 74)

Через блок массой **M**, имеющий горизонтальную ось вращения, переброшен трос, к одному концу которой подвешен груз массой **m**, а другой конец прикреплен к пружине жесткостью **c**. Пренебрегая трением и массой троса определить период малых колебаний системы, считая блок однородным цилиндром.

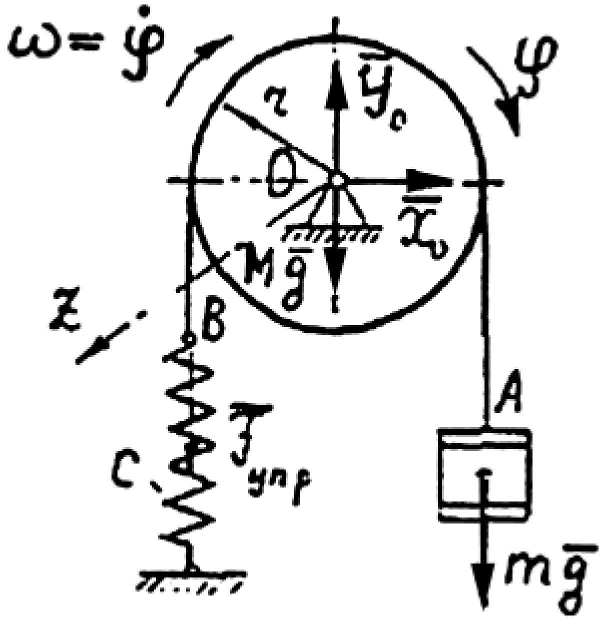


Рисунок 74

Решение. (рис. 74)

На рассматриваемую систему тел действуют внешние силы: Mg, mg, сила упругости пружины F_{np}, а также составляющие реакций опор оси X_O, Y_O.

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний диска получим с помощью теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(F_k^e\right).$$

$$\sum m_z\left(F_k^e\right) = mgr - F_{óïð}\, f = mgr - c(f_{ct} - f)r = -c\,r^2\varphi,$$

где $F_{óïð} = c(f_{ct} - f)$-упругая сила пружины; $f = r\varphi$- деформация пружины, здесь φ -угол поворота блока (малый угол).

В положении статического равновесия

$$F_{óïð}\, r = mgr \qquad \text{или} \qquad c\, f_{cò} = mg.$$

Кинетический момент системы относительно оси вращения барабана:

$$K_z = -J_z\omega - mVr = J_z^{ïð}\,\omega.$$

где $J_z = \frac{1}{2}m r^2$-момент инерции блока относительно оси вращения;

$V = r\omega$- скорость груза, ω -угловая скорость блока; $J_z^{ïð} = \left(\frac{M}{2} + m\right)r^2$ - приведенный момент инерции системы.

Таким образом, проектируя уравнение на ось вращения блока, получим учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$)

$$J_z^{ïð}\ddot{\varphi} + cr^2\varphi = 0; \qquad \ddot{\varphi} + k^2\varphi \qquad \ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Круговая частота колебаний будет равна:

$$k = \sqrt{\frac{c\,r^2}{J_z^{ïð}}} = \sqrt{\frac{2ñ}{M + 2m}}.$$

Период малых колебаний системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{M + 2m}{2c}}.$$

Задача 54 (рис. 75)

Вертикально расположенный диск имеет горизонтальную ось вращения, смещенную относительно центра масс диска на расстояние $OC = \frac{\boldsymbol{R}}{2}$. В начальный момент угол отклонения диска от равновесного положения равен φ_0, а начальная скорость равна нулю. Считая колебания диска малыми определить закон движения диска.

Решение. (рис. 75)

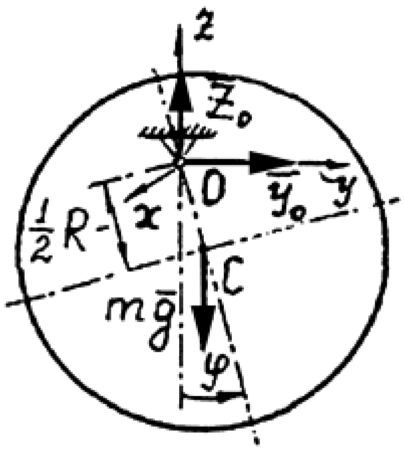


Рисунок 75

Диск является физическим маятником. Дифференциальное уравнение вращательного движения диска имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = \sum m_z\left(F_k^e\right).$$

$$\sum m_z\left(F_k^e\right) = -mg\frac{R}{2}\sin\varphi,$$

где $\sin\varphi \approx \varphi$; φ -угол поворота блока (малый угол).

$$-mg\frac{R}{2}\sin\varphi \approx -\frac{mgR\varphi}{2}.$$

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \text{ где } \quad k = \sqrt{\frac{mg\frac{R}{2}}{J_z}}.$$

Момент инерции диска относительно оси вращения:

$$J_z = J_{xc} + m \cdot OC^2 = \frac{mR^2}{2} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3mR^2}{4}.$$

Решение дифференциального уравнение вращательного движения диска ищется в виде:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

откуда $\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt,.$

Воспользуемся начальными условиями $t = 0$; $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = 0$.

Найдем постоянные интегрирования

Откуда $C_1 = \varphi_0$ и $C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} = 0.$

Уравнение движения диска

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.

Задача 55 (рис. 76), (рис. 77)

При каком минимальном значении скорости тяжелый шарик пройдет высшую точку петли радиуса **R**, не отрываясь от нее ? Петля расположена в вертикальной плоскости.

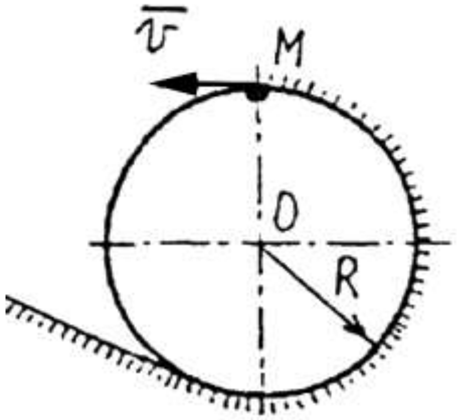


Рисунок 76

Решение (рис. 77)

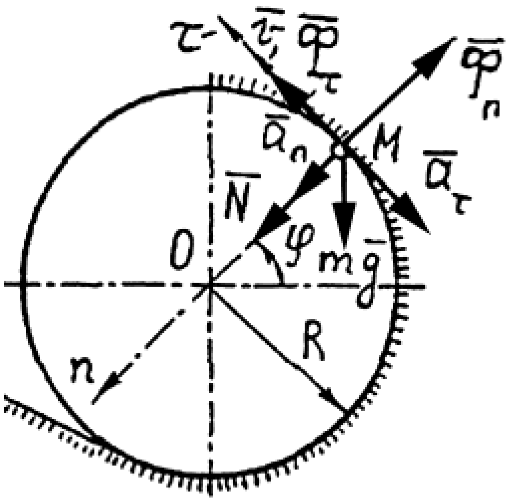


Рисунок 77

Будем считать шарик материальной точкой в промежуточном положении на его траектории. Приложим к шарику действующие силы: тяжести mg, нормальная реакция петли N и, соответственно, Φ_τ , Φ_n- касательная и нормальная силы инерции.

Согласно принципу Даламбера для точки получим уравновешенную в любой момент времени систему сил

$$(m\overline{g}, \overline{N}, \overline{\hat{O}}_{\tau}, \overline{\hat{O}}_{n}) = 0 .$$

Проектируя эту систему сил на главную нормаль Mn, получим

$$mg \sin \varphi + N - \hat{O}_n = 0,$$

где $Ф_n$ = ma_n здесь $a_n = m\dfrac{V^2}{R}$ -нормальное ускорение шарика, (V- скорость шарика).

По условию задачи при $\varphi = 90^{\circ}$ нормальная реакция в верхней точке петли $N = 0$.

$$N = \hat{O}_n - vg \sin \varphi = 0; \qquad \sin \varphi = \sin 90^{\circ} = 1; \qquad m\frac{V^2}{R} - mg = 0 .$$

Скорость шарика

$$V = \sqrt{Rg} .$$

Задача 56 (рис. 78), (рис. 79)

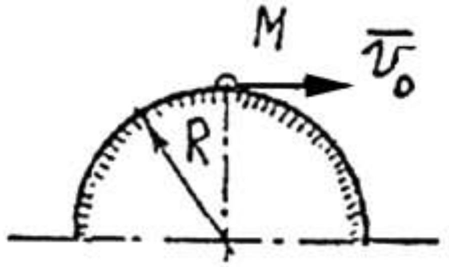


Рисунок78

Тяжелый шарик, находящийся на вершине гладкого сферического купола радиуса **R** , получает начальную горизонтальную скорость $\mathbf{V}_0$. В каком месте шарик покинет купол? При каком значении начальной скорости $\mathbf{V}_0$ шарик оторвется от купола в верхней точке?

Решение. (рис. 79)

Приложим к шарику, находящемуся в произвольном положении на куполе силы: тяжести mg, нормальной реакции N, касательную $\Phi_\tau = ma_\tau = m\dot{V}$ и нормальную $\Phi_\eta = ma_\eta = m\dfrac{V^2}{R}$ силы инерции.

Согласно принципу Даламбера для точки получим уравновешенную в любой момент времени систему сил

$$(m\overline{g}, \overline{N}, \overline{\hat{O}}_\tau, \overline{\hat{O}}_n) = 0\,.$$

Проектируя эту систему сил на главную нормаль Mn, получим

$$mg\cos\varphi - N - \hat{O}_n = 0.$$

В момент отрыва шарика от купола нормальная реакция купола будет равна нулю:

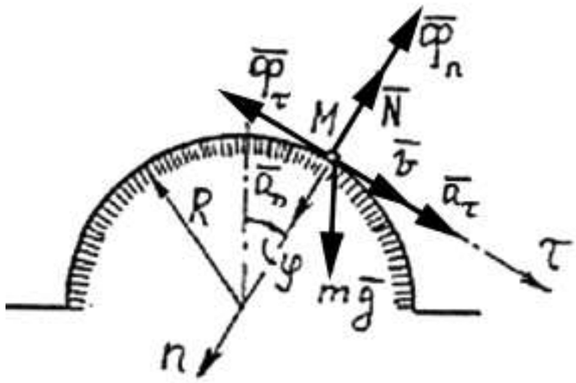


Рисунок 79

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mV^2}{R} = 0\,.$$

Отсюда

$$V^2 = Rg\,cos\,\varphi\,.$$

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e;. \qquad \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mgR(1-\cos\varphi)\,.$$

Из этого уравнения получим $V^2 = V_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi)$.

Искомое положение шарика, когда он покинет купол

$$cos\,\varphi = \frac{2}{3} + \frac{V_0^{\;2}}{3Rg}.$$

Отрыв шарика от купола произойдет при угле φ:

$$\varphi = arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{V_0^{\;2}}{3Rg}\right).$$

Шарик сойдет с купола верхней точке ($\varphi = 0$ и $cos\,\varphi = 1$),при начальной скорости:

$$V^2 = Rg\cos\varphi = gR.$$

Итак, если $V_0 = V = \sqrt{gR}$, то шарик сойдет с купола в верхней точке.

Задача 57 (рис. 80), (рис. 81)

Однородный стержень АВ длиной l и массой m, закрепленный шарнирно на валу OO_1, вращается вокруг оси Oy с постоянной угловой скоростью ω. Стержень удерживается под углом α к вертикали при помощи горизонтальной тяги ВД . Найти реакции шарниров А и В.

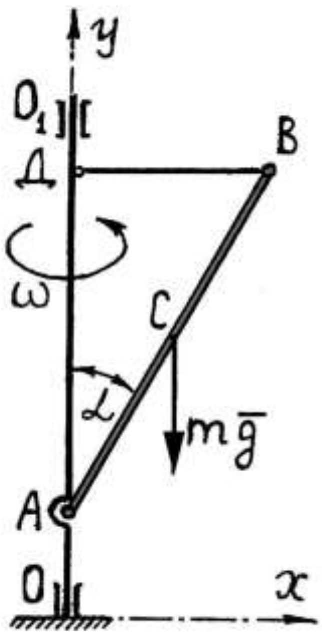


Рисунок80

Решение. (рис. 81)

Применим для решения задачи принцип Даламбера. Приложим к стержню силу тяжести $m\vec{g}$, составляющие реакции $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ шарнира А вдоль осей координат, реакцию X_B шарнира В.

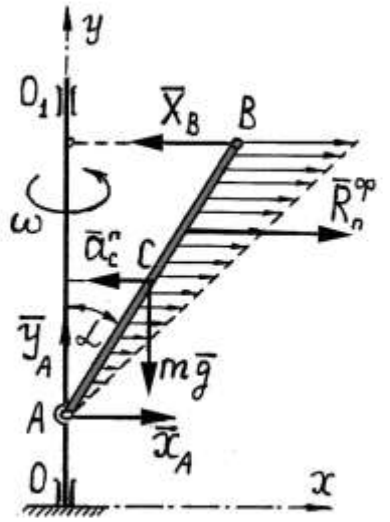


Рисунок 81

Силы инерции точек стержня заменим равнодействующей нормальной силой инерции $\vec{R}_n^{\Phi}$, приложенной в точке К, причем $R_n^{\Phi} = ma_c^n = m\omega^2 \dfrac{l}{2}\sin\alpha$;

.

Получена уравновешенная в любой момент времени система сил

$$(m\vec{g}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{R}_n^{\Phi}) \propto 0,$$

$a_c^n = \omega^2 \dfrac{l}{2}\sin\alpha$ – нормальное ускорение центра масс стержня (точки С); АС = СВ.

Условия мгновенного динамического равновесия стержня имеют вид:

$$X_A - X_B + R_n^{\Phi} = 0;$$
$$Y_A - mg = 0;$$
$$X_B l\cos\alpha - R_n^{\Phi}(\frac{2}{3}l\cos\alpha) - mg(\frac{1}{2}l\sin\alpha).$$

Из составленной системы уравнений, с учетом значения силы R_n^{Φ}, последовательно находим:

$$X_B = \frac{1}{2} mgtg\alpha + \frac{1}{3} m\omega^2 l \sin\alpha;$$

$$Y_A = mg;$$

$$X_A = \frac{1}{2} mgtg\alpha - \frac{1}{6} m\omega^2 l \sin\alpha.$$

Задача 58 (рис. 82), (рис. 83)

Однородный гладкий диск массы m и радиуса r установлен между валом OO_1 и стержнем AB, прикрепленным к нему под углом φ. Стержень и вал вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oy (рис. 27). Определить давление диска на стержень и вал.

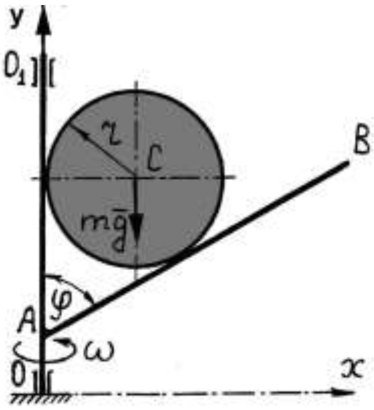


Рисунок 82

Решение. (рис. 83)

Воспользуемся принципом Даламбера.

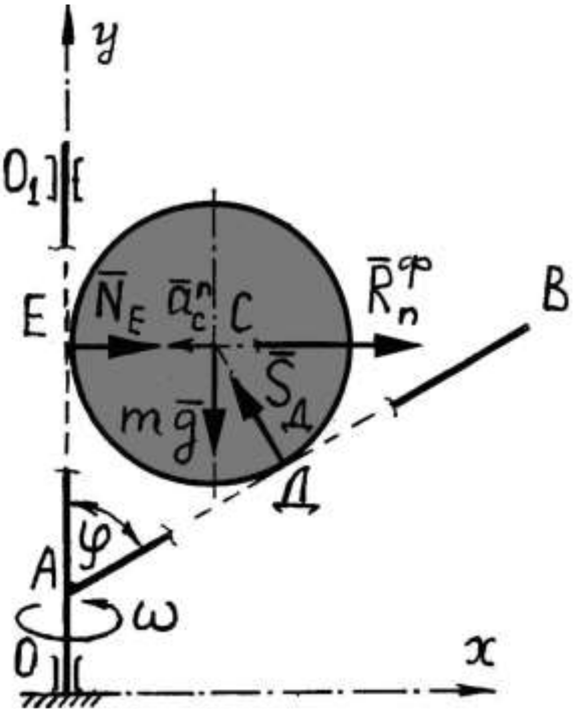


Рисунок83

Приложим к диску силу тяжести $m\vec{g}$, реакцию вала $\vec{N}_E$ и реакцию стержня $\vec{S}_Д$, а также равнодействующую нормальную силу инерции $\vec{R}_n^Ф$ всех точек диска, причем

$$R_n^Ф = ma_c^n = m\omega^2 R,$$

где $a_c^n = \omega^2 R$ – нормальное ускорение центра масс диска (точки С).

Сходящаяся система сил $(m\vec{g}, \vec{N}_E, \vec{S}_Д, \vec{R}_n^Ф)$ является уравновешенной в любой момент времени.

Составим уравнения мгновенного динамического равновесия диска (указанной выше сходящихся системы сил):

$$\sum F_{kx} + \sum Ф_{kx} = 0; \qquad N_E + R_n^Ф - S_Д \cos\varphi = 0;$$

$$\sum F_{ky} + \sum Ф_{ky} = 0; \qquad -mg + S_Д \sin\varphi = 0.$$

Из этой системы уравнений с учетом значения силы $R_n^Ф$ находим:

$$S_Д = \frac{mg}{\sin\varphi}; \qquad N_E = \frac{mg\cos\varphi}{\sin\varphi} - m\omega^2 R.$$

Давление диска на стержень и вал в точках В и Д равны соответствующим реакциям стержня и вала

$$Q_Д = S_Д; \qquad P_E = N_E.$$

Задача 59 (рис. 84), (рис. 85)

Груз массой m поднимается на тросе, навитом на барабан с горизонтальной осью вращения. Определить ускорение груза. Масса барабана равна m ; барабан считать однородным цилиндром. Трением в подшипниках вала барабана, массами вала и троса пренебречь.

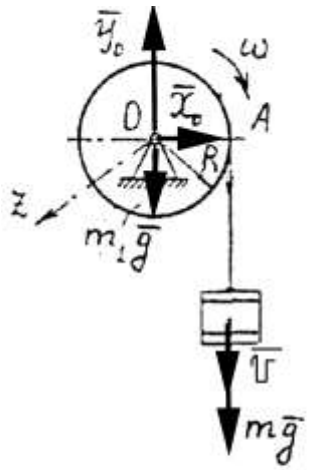


Рисунок 84

Решение. **(рис. 85)**

Для решения использзеtv общее уравнение динамики.

Принимаем, что ускорение груза равно a, а его возможное перемещение δs. Тогда угловое ускорение барабана $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, а его возможное угловое перемещение $\delta\varphi = \dfrac{\delta s}{R}$.

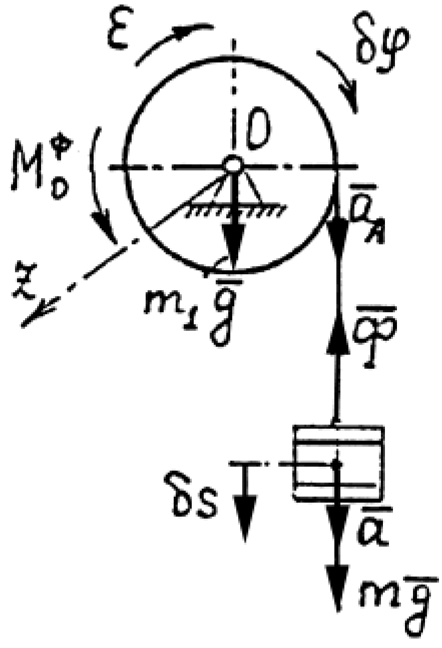


Рисунок 85

К грузу и барабану приложим силы веса mg и m_1g, силу инерции груза $\Phi = ma$ и момент сил инерции:

$$M_o^{\phi} = J\varepsilon = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R} = \frac{mRa}{2}.$$

Из общего уравнения динамики, получим

$$(mg - \Phi)\delta s - M_o^{\phi}\delta\varphi = 0$$

или после преобразований получим

$$a = \frac{2mg}{m_1 + 2m}.$$

Задача 60 (рис. 86), (рис. 87)

Три одинаковых ролика массой $\mathbf{m}_1$ и радиусом $\mathbf{r}$ каждый перемещают горизонтальную плиту массой $\mathbf{m}$. Ко всем роликам приложены равные вращающие моменты $\mathbf{M}$. Определить ускорение плиты при условии, что она движется по роликам без проскальзывания. Ролики считать сплошными однородными цилиндрами.

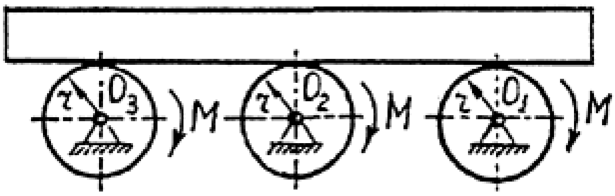


Рисунок 86)

Решение. **(рис. 87)**

Для решения будем использовать общее уравнение динамики.

Принимаем, что ускорение плиты равно a, а ее возможное перемещение δs. Тогда угловое ускорение каждого ролика $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$, а его возможное угловое перемещение $\delta\varphi = \dfrac{\delta s}{r}$.

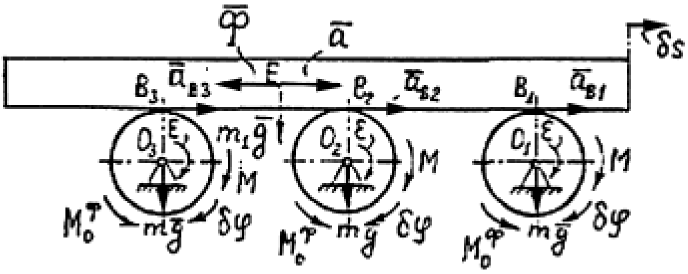


Рисунок 87

К плите и роликам приложим силы и пары сил: вес mg и $m_1 g$, вращающие моменты M, силу инерции плиты $\Phi = ma$ и моменты сил инерции роликов $M_o^\phi = J\varepsilon = \dfrac{m_1 r^2}{2}\dfrac{a}{r} = \dfrac{m_1 ra}{2}$

Для данной системы имеем общее уравнение динамики $-\Phi\delta s + 3(M - M_o^\phi)\delta\varphi = 0$, откуда $-ma\delta s + 3(M - \dfrac{m_1 ra}{2})\dfrac{\delta s}{r} = 0$.

Далее получаем $$\frac{3M}{r} = \left(m + \frac{3m_1}{2}\right)a.$$

Откуда $$a = \frac{6M}{(3m_1 + 2m)r}.$$

Задача 61 (рис. 88), (рис. 89)

Груз **A** массой $\mathbf{m}_1$, опускаясь вниз, приводит в движение цилиндрический каток *B* массой $\mathbf{m}$ и радиусом $\mathbf{R}$ при помощи нити, намотанной на каток. Определить ускорение груза, если коэффициент трения качения равен λ, а каток катится без проскальзывания. Массой блока *Д* пренебречь.

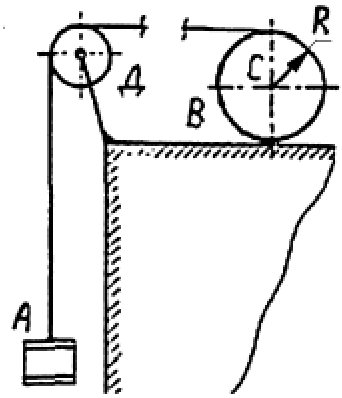


Рисунок 88

Решение. **(рис. 89)**

Для решения будем использовать общее уравнение динамики.

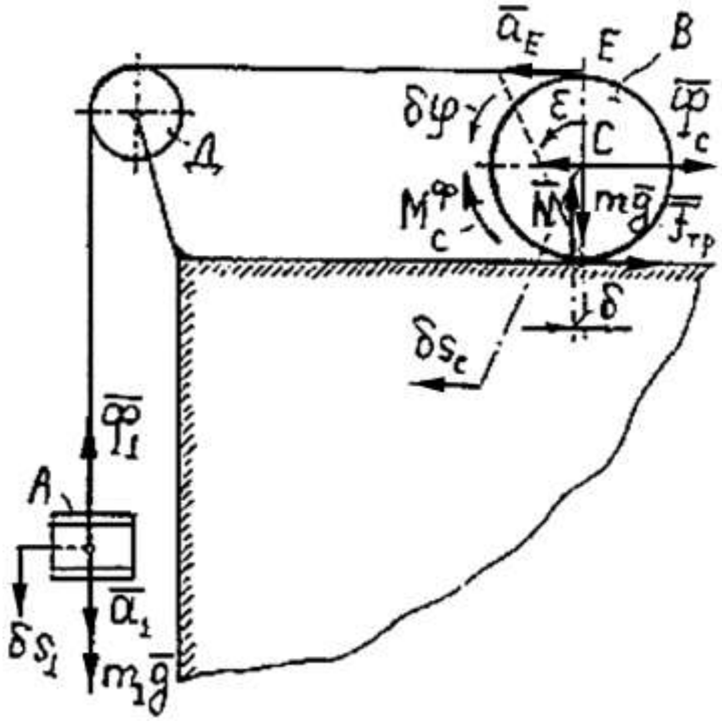


Рисунок 89

Принимаем, что ускорение груза равно a_1, а его возможное перемещение δs_1. Тогда ускорение центра масс катка $a_c = \dfrac{a_1}{2}$, его возможное перемещение $\delta s_c = \dfrac{\delta s_1}{2}$, угловое ускорение катка - $\varepsilon = \dfrac{a_1}{2R}$, а его возможное угловое перемещение $\delta\varphi = \dfrac{\delta s_1}{2R}$.

К грузу и катку приложим силы и пары сил: вес mg и $m_1 g$, нормальную реакцию поверхности $N = mg$, силу трения $F_{тр}$, момент сопротивлению качению катка $M_{\hat{e}\grave{a}\grave{o}} = \lambda N = \lambda mg$, силу инерции груза $\Phi_1 = ma_1$, силу инерции катка $\Phi_c = ma_c = \dfrac{ma_1}{2}$ и инерционный момент катка, который можно выразить $M_c^{\phi} = J_c\varepsilon = \dfrac{mR^2}{2}\dfrac{a_1}{2R} = \dfrac{mRa_1}{4}$.

Общее уравнение динамики имеет вид

$$(m_1 g - \hat{O}_1)\delta s_1 - \hat{O}_{\tilde{n}}\delta s_{\tilde{n}} - (M_{\hat{e}\grave{a}\grave{o}} + M_{\tilde{n}}^{\hat{o}})\delta\varphi = 0;$$

$$(m_1 g - m_1 a_1)\delta s_1 - \frac{ma_1}{2}\frac{\delta s_1}{2} - (\lambda mg + \frac{mRa_1}{4})\frac{\delta s_1}{2R} = 0 .$$

Преобразуя последнее уравнение, получим выражение для ускорения груза

$$m_1 g - \frac{\lambda mg}{2R} = \left(m_1 + \frac{m}{4} + \frac{m}{8}\right)a_1 .$$

$$a_1 = \frac{4(2m_1 R - \lambda m)}{R(8m_1 + 3m)}g .$$

Задача 62 (рис. 90), (рис. 91)

Постоянный вращающий момент $M_{вр}$ приложен к барабану лебедки радиуса r и массы m. К концу А троса прикреплен груз массы m_1, который поднимается по наклонной плоскости с углом α . Определить ускорение груза, пренебрегая трением между грузом и наклонной плоскостью. Барабан лебедки считать однородным круглым цилиндром.

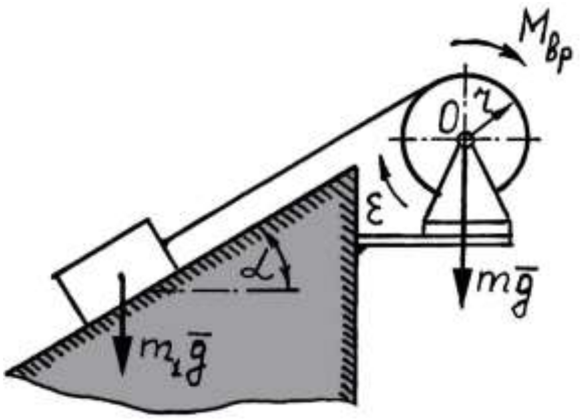


Рисунок 90

Решение. (рис. 91)

На рисунке (рис.36) $m\vec{g}$, $m_1\vec{g}$ – силы тяжести барабана лебедки и груза; $M_{вр}$ – вращающий момент; $\vec{\Phi}$ – сила инерции груза; M_o^{Φ} – момент сил инерции точек барабана; δs – возможное перемещение груза; $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение барабана.

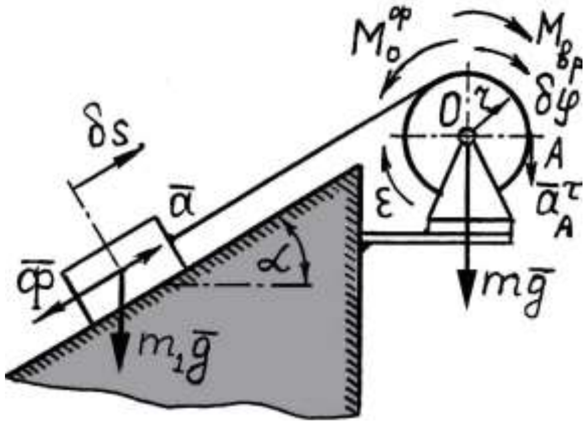


Рисунок 91

На основании общего уравнения динамики имеем

$$(M_{вр} - M_o^{\Phi})\delta\varphi - (m_1 g \sin\alpha - \Phi)\delta s = 0\,.$$

Воспользуемся зависимостями:

$\delta s = R\delta\varphi;\qquad \Phi = m_1 a;\qquad a = \varepsilon R;$

$M_o^{\Phi} = J_o\varepsilon = \dfrac{mR^2}{2}\cdot\dfrac{a}{R} = \dfrac{1}{2}maR;\qquad J_o = \dfrac{mR^2}{2},$

где a – ускорение груза; ε – угловое ускорение барабана; J_o – момент инерции барабана относительно оси вращения.

С учетом указанных выше зависимостей находим ускорение груза

$$a = \frac{M_{вр} - m_1 gR\sin\alpha}{(m_1 + \frac{1}{2}m)R}$$

Задача 63 (рис. 92), (рис. 93)

К зубчатой рейке массы m приложена сила T. Рейка приводит в движение зубчатое колесо радиуса r и массы m_1, к которому приложен момент сопротивления M_c. Определить угловое ускорение колеса, считая его однородным диском.

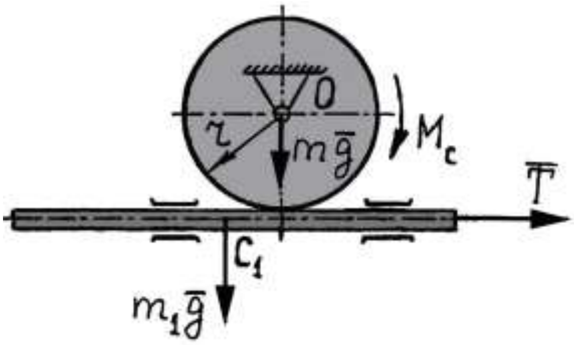


Рисунок 92

Решение. (рис. 93)

Рейка совершает поступательное движение с ускорением a, зубчатое колесо – вращательное движение с угловым ускорением ε.

Приложим к звеньям механизма силы $m\vec{g}$, $m_1\vec{g}$, $\vec{\Phi}$ и моменты M_c и M_o^{Φ}.

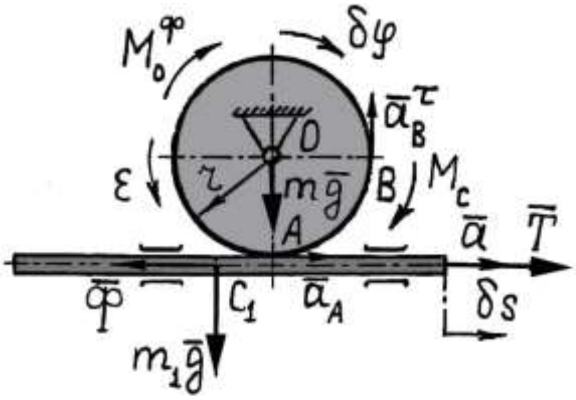


Рисунок 93

При сообщении рейке возможного поступательного перемещения δs, колесо получит возможное вращательное перемещение $\delta\varphi$.

Общее уравнение динамики имеет вид

$$(T - \Phi)\delta s - (M_c + M_o^{\Phi})\delta\varphi = 0.$$

Имеют место следующие зависимости:

$$\delta s = r\delta\varphi; \qquad a = a_A = a_B^{\tau} = \varepsilon r; \qquad \Phi = m_1 a = m_1 \varepsilon r;$$

$$M_o^{\Phi} = J_o\varepsilon = \frac{mr^2}{2}\cdot\varepsilon; \qquad J_o = \frac{mr^2}{2},$$

где a – ускорение рейки; ε – угловое ускорение колеса; J_o – момент инерции колеса относительно оси вращения

Используя указанные выше зависимости, определяем угловое ускорение колеса

$$\varepsilon = \frac{T - \dfrac{M_c}{r}}{(m_1 + \dfrac{1}{2}m)r}.$$

Задача 63 (рис.94), (рис. 95)

Центробежный регулятор вращается в установившемся режиме вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Определить угол отклонения стержней *CA* и *CB* от вертикали, принимая во внимание только массу $\mathbf{m}$ каждого из шаров *A* и *B*, а также массу $\mathbf{m}_1$ муфты *C*. Все стержни имеют одинаковую длину.

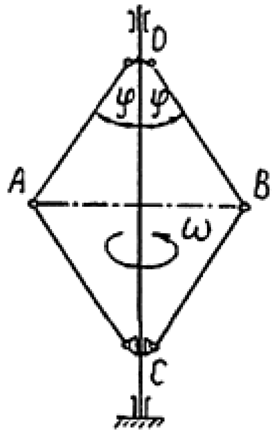


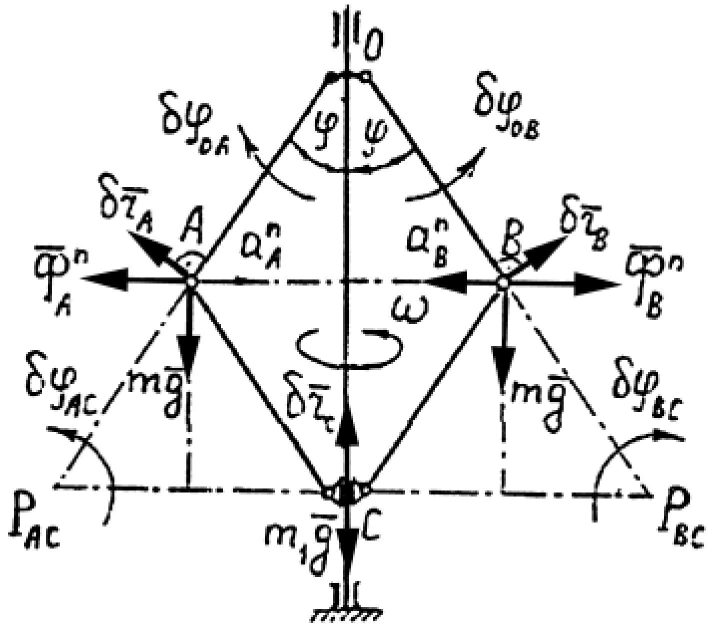
Рисунок 94

<u>Решение</u>. (рис. 95)

Для решения воспользуемся общим уравнением динамики.

Приложим к системе силы тяжести mg и m_1g, силы инерции шаров:

$$\Phi_A{}^n = \Phi_B{}^n = m\omega^2 l\, sin\varphi \ .$$



(рис. 95)

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержни OA и OB на угол $\delta\varphi_{OA} = \delta\varphi_{OB} = \delta\varphi$. При этом стержни AC и BC получат возможные перемещения $\delta\varphi_{AC} = \delta\varphi_{BC} = \delta\varphi$. Тогда точки A, B и C - возможные перемещения

$$\delta s_A = |\delta \bar{r}_A| = l\delta\varphi_{OA} = l\delta\varphi;$$

$$\delta s_B = |\delta \overline{r}_B| = l\delta\varphi_{OB} = l\delta\varphi;$$

$$\delta s_C = CP_{BC}\delta\varphi_{BC} = 2l\,sin\varphi\delta\varphi.$$

Составим общее уравнение динамики:

$$\overline{mg}\cdot\delta\overline{r}_A + \overline{\Phi}_A\cdot\delta\overline{r}_A + \overline{mg}\cdot\delta\overline{r}_B + \overline{\Phi}_B\cdot\delta\overline{r}_B + \overline{m_1 g}\cdot\delta\overline{r}_C = 0\,.$$

Выполним преобразования

$$2mg\delta s_A\cos(90^\circ+\varphi) + 2\Phi_A\delta s_A\cos\varphi + m_1 g\delta s_C\cos 180^\circ = 0$$

$$-2mgl\delta\varphi sin\varphi + 2m\omega^2 l\,sin\varphi l\delta\varphi cos\varphi - m_1 g 2l\,sin\varphi\delta\varphi = 0\,.$$

$$m\omega^2 l\cos\varphi = mg + m_1 g; \qquad \cos\varphi = \frac{m+m_1}{m\omega^2 l}g\,.$$

откуда $$\varphi = arccos\frac{m+m_1}{m\omega^2 l}g\,.$$

Задача 64 (рис. 96), (рис. 97)

Барабан лебёдки радиуса r, установленный на консольной балке, вращается с угловым ускорением ε . К барабану приложен вращающий момент $M_{вр}$.

Массы лебедки и поднимаемого груза равны m и m_1, момент инерции барабана лебедки относительно оси вращения O равен J_o. Пренебрегая массой балки и троса, найти реакцию заделки и вращающий момент $M_{вр}$.

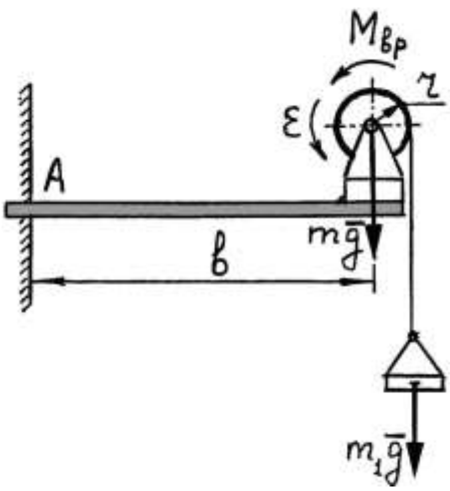


Рисунок 96

Решение. (рис. 97)

Расчетная схема для решения задачи дана ниже. На этом рисунке $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции заделки; m_A – момент заделки; $m\vec{g}$ и $m_1\vec{g}$ – силы тяжести лебёдки и груза; $\vec{\Phi}$ – сила инерции груза; $M_{вр}$ – вращающий момент; M_o^{Φ} – момент сил инерции точек барабана; δs – возможное перемещение груза; δφ – возможное угловое перемещение барабана.

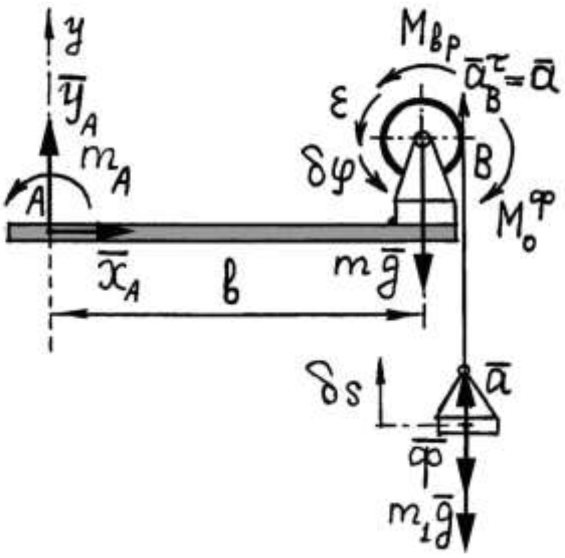


Рисунок 97

Применим к системе «лебёдка-груз» общее уравнение динамики:

$$(M_{вр} - M_o^{\Phi})\delta\varphi - (m_1 g + \Phi)\delta s = 0\,.$$

Учитывая зависимости

$\delta s = r\delta\varphi;$ $\quad a = a_A^{\tau} = \varepsilon r$ – (ускорение груза);

$\Phi = m_1 a = m_1 \varepsilon r;$ $\quad M_o^{\Phi} = J_o \varepsilon$,

получим формулу для определения вращающего момента

$$M_{вр} = (J_o + m_1 r^2)\varepsilon + m_1 g r\,.$$

Применим теперь к системе «балка-лебёдка-груз» принцип Даламбера. На основании этого принципа составляем следующие уравнения:

$$X_A = 0;$$
$$Y_A - mg - m_1 g - \Phi = 0;$$
$$-m_1 g(b + r) - mgb - \Phi(b + r) - M_o^{\Phi} + M_{вр} + m_A = 0.$$

Из этих уравнений находим реакцию и момент заделки.

Задача 65 (рис. 98), (рис. 99), (рис. 100), (рис. 101)

Три груза массы m каждый соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через блок. Два груза лежат на гладкой плоскости, а третий груз подвешен вертикально. Определить ускорения грузов и натяжение нити в сечениях bc и de .

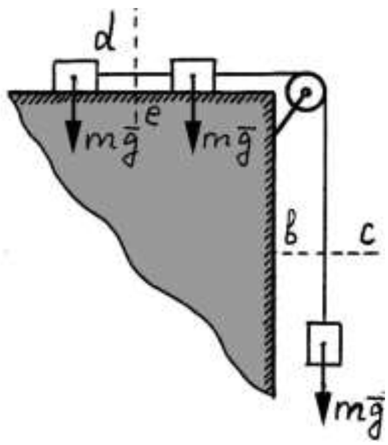


Рисунок 98

Решение. (рис. 99)

Применим для решения задачи общее уравнение динамики и принцип Даламбера.

Грузы совершают поступательное движение с ускорениями $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

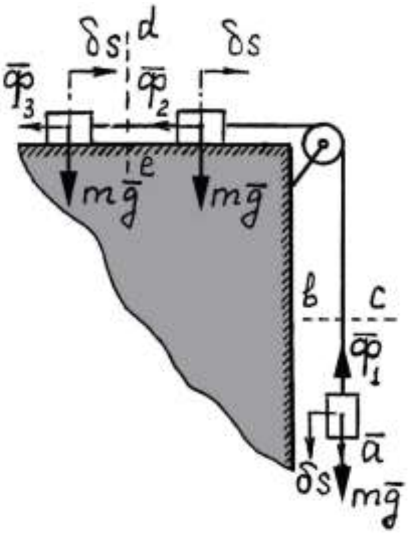


Рисунок 99

Приложим к грузам силы тяжести и силы инерции $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi = ma$. Сообщим грузам возможное перемещение δs.

Составим общее уравнение динамики:

$$mg\delta s - \Phi_1\delta s - \Phi_2\delta s - \Phi_3\delta s = 0$$

или

$$mg - 3\Phi = 0.$$

Ускорение грузов : $a = \dfrac{g}{3}$.

Применим принцип Даламбера к первому и третьему грузам

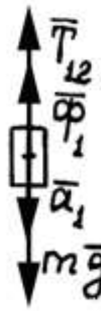


Рисунок 100

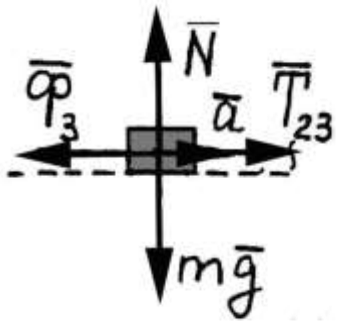


Рисунок 101

$$T_{12} - mg + \Phi_1 = 0;$$
$$T_{23} - \Phi_3 = 0.$$

Натяжения нитей в сечениях bc и de

$$T_{12} = mg - \Phi_1 = \frac{2}{3}mg\ ;$$

$$T_{23} = \Phi_3 = \frac{1}{3}mg\ .$$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Задача 66 (рис. 102), (рис. 103)

Для механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, определить деформацию пружины в положении равновесия . Даны длина стержня $OA = \mathbf{l}$, момент пары сил $\mathbf{M}$, приложенной к стержню OA, коэффициент жесткости пружины $\mathbf{c}$.

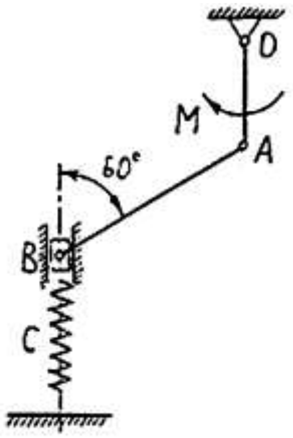


Рисунок 102

Решение. **(рис. 103)**

Для решения задачи будем использовать принцип возможных перемещений.

Приложим к системе силы, действующие в горизонтальной плоскости: кроме пары с моментом M это будет сила упругости пружины $F_{упр} = c \cdot x$ (x – искомая деформация пружины).

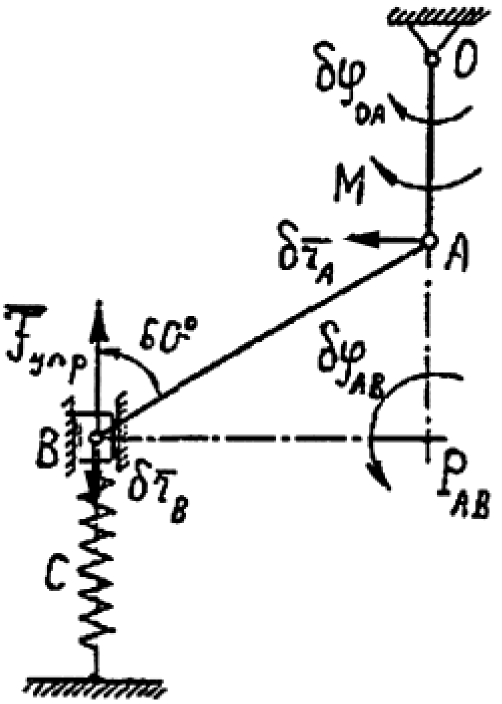


Рисунок 103

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержень ОА на угол $\delta\varphi_{OA}$. Стержень АВ совершит возможное плоскопараллельное перемещение, повернувшись на угол $\delta\varphi_{AB}$ вокруг точки P_{AB}. Точки А и В получат возможные перемещения

$$\delta s_A = |\delta \bar{r}_A| = OA \cdot \delta\varphi_{OA} = l \cdot \delta\varphi_{OA};$$

$$\delta s_B = |\delta \bar{r}_B| = BP_{AB} \cdot \delta\varphi_{AB} = BP_{AB} \frac{|\delta \bar{r}_A|}{AP_{AB}} = tg60° \cdot l \cdot \delta\varphi_{OA} = \sqrt{3} \cdot l \cdot \delta\varphi_{OA}.$$

Составим уравнение возможных работ всех активных сил (1.30)

$$M\delta\varphi_{OA} - F_{упр}\delta s_B = 0.$$

Подставив установленные ранее соотношения

$$M\delta\varphi_{OA} - c \cdot x\sqrt{3} \cdot l \cdot \delta\varphi_{OA} = 0.$$

После преобразований получим деформацию пружины $x = \dfrac{M}{\sqrt{3} \cdot l \cdot c}$.

Задача 67 (рис. 104), (рис. 105)

Для заданной составной конструкции определить реактивный момент в заделке *A*, считая заданными интенсивность равномерно распределенной нагрузки $\mathbf{q}$, угол $\boldsymbol{\alpha}$, длины стержней $AB=\boldsymbol{l_1}$ и $BC=\boldsymbol{l_2}$.

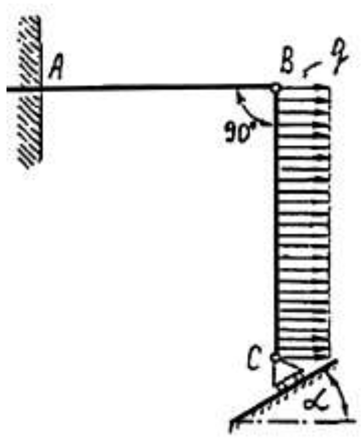


Рисунок 104

Решение. **(рис. 105)**

Для решения задачи используем принцип возможных перемещений.

Заменим заделку в точке *A* шарнирно неподвижной опорой, компенсировав отброшенную связь ее реакцией – реактивной парой сил с неизвестным моментом M_A .

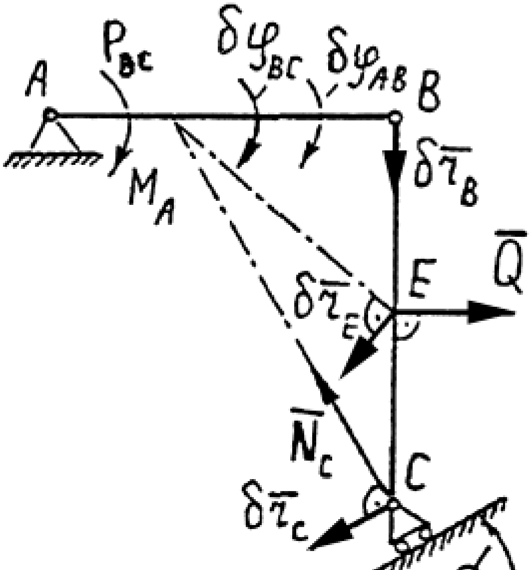


Рисунок 105

Распределенную нагрузку на участке ВС заменим приложенной к точке Е (ВЕ=ЕС=$\frac{l_2}{2}$) равнодействующей силой $Q = ql_2$.

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержень АВ на угол $\delta\varphi_{AB}$. Стержень ВС совершит возможное плоскопараллельное перемещение, повернувшись на угол $\delta\varphi_{BC}$ вокруг точки P_{BC}. Точки В, С и Е получат соответствующие возможные перемещения

$$|\delta\bar{r}_B| = AB \cdot \delta\varphi_{AB} = l_1 \cdot \delta\varphi_{AB};$$

$$|\delta\bar{r}_E| = EP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = EP_{BC} \cdot \frac{|\delta\bar{r}_B|}{BP_{BC}} = \frac{EP_{BC}}{BP_{BC}} \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_{AB};$$

$$|\delta\bar{r}_C| = CP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = CP_{BC} \cdot \frac{|\delta\bar{r}_B|}{BP_{BC}} = \frac{CP_{BC}}{BP_{BC}} \cdot l_1 \cdot \delta\varphi_{AB}.$$

Уравнение возможных работ имеет вид

$$\text{Ì}_{\text{À}}\delta\varphi_{\text{ÀÂ}} - (Q \cdot BE)\delta\varphi_{BC} = 0.$$

$$\text{Ì}_{\text{À}} = (Q \cdot BE)\frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta\varphi_{\text{ÀÂ}}} = (Q \cdot BE) \cdot i$$

Далее находим

$$i = \frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta\varphi_{\text{ÀÂ}}} = \frac{\delta\varphi_{BC}}{\delta S_{\text{Â}}} \cdot \frac{\delta S_B}{\delta\varphi_{\text{ÀÂ}}} = \frac{\delta\varphi_{BC}}{BP_{BC}\delta\varphi_{\text{ÂC}}} \cdot \frac{AB\delta\varphi_{AB}}{\delta\varphi_{\text{ÀÂ}}} = \frac{AB}{BP_{BC}} = \frac{l_1}{l_2 tg\alpha}$$

Окончательно получим

$$\text{Ì}_{\text{À}} = (Q \cdot BE) \cdot i = \frac{ql_2 l_1 ctg\alpha}{2}.$$

Задача 68 (рис. 106), (рис. 107)

Определить натяжение нити *AC*, связывающей вершины *A* и *C* шарнирного стержневого ромба *OABC*, находящегося под действием силы ***P***.

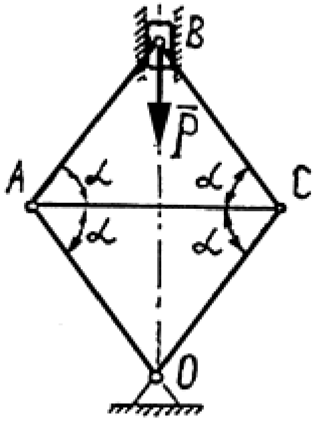


Рисунок106

Решение (рис.52)

Для решения задачи будем использовать принцип возможных перемещений.

Перережем нить, а ее действие заменим двумя приложенными в точках А и С равными силами $T_A = T_C = T$.

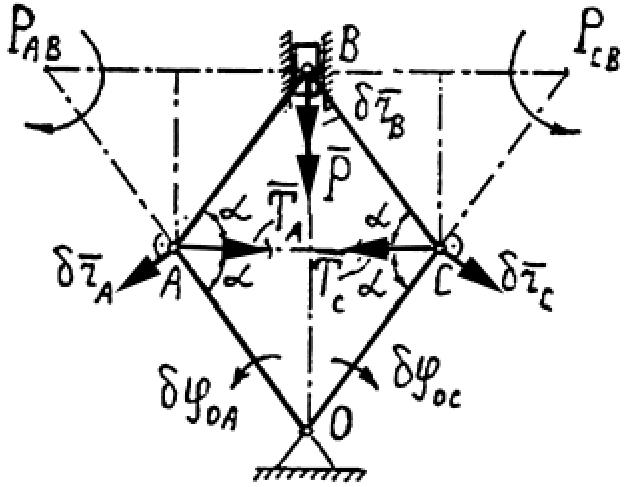


Рисунок 107

Сообщим возможное вертикальное перемещение $\delta\bar{r}_B$ точке В; $\delta\bar{r}_{À}$ и $\delta\bar{r}_{Ñ}$ - возможное перемещение точек А и С. P_{AB} и P_{CB} - возможные центры поворота стержней АВ и СВ.

Составим зависимости

$$\left|\delta\bar{r}_B\right| = BP_{CB} \cdot \delta\varphi_{CB} = 2l\cos\alpha \cdot \delta\varphi_{CB}$$

$$\left|\delta\bar{r}_C\right| = \left|\delta\bar{r}_A\right| = CP_{CB} \cdot \delta\varphi_{CB} = l \cdot \delta\varphi_{CB}$$

На основании принципа возможных перемещений имеем уравнение

$$\overline{P} \cdot \delta \overline{r}_B + \overline{T}_A \cdot \delta \overline{r}_A + \overline{T}_C \cdot \delta \overline{r}_C = 0 .$$

Выполним преобразования

$$P\left|\delta \overline{r}_B\right| cos\,0^\circ + T\left|\delta \overline{r}_A\right| cos(\,90^\circ + \alpha\,) + T\left|\delta \overline{r}_C\right| cos(\,90^\circ + \alpha\,) = 0 .$$

$$P \cdot 2l \cdot cos\,\alpha \cdot \delta\varphi_{CB} - 2T \cdot l \cdot sin\alpha \cdot \delta\varphi_{CB} = 0 ,$$

Натяжение нити

$$T = \frac{P \cdot 2l \cdot cos\,\alpha \cdot \delta\varphi_{CB}}{2l \cdot sin\alpha \cdot \delta\varphi_{CB}} = Pctg\,\alpha .$$

Задача 69 (рис. 108), (рис. 109)

На кривошип *OA* механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, воздействует пара сил с моментом ***M*** . Зная длину кривошипа *OA*=***r*** и шатуна *AB*=***l*** , определить силу ***P*** при условии равновесия механизма.

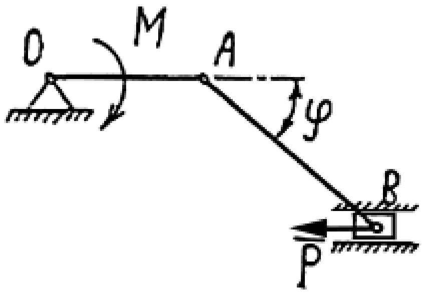


Рисунок 108

Решение. **(рис. 109)**

Для решения задачи будем использовать принцип возможных перемещений.

Сообщим системе возможное перемещение, повернув кривошип *OA* на возможный угол $\delta\varphi_{OA}$. Шатун *AB* совершит возможное плоскопараллельное перемещение, повернувшись на возможный угол $\delta\varphi_{AB}$ вокруг точки P_{AB} .

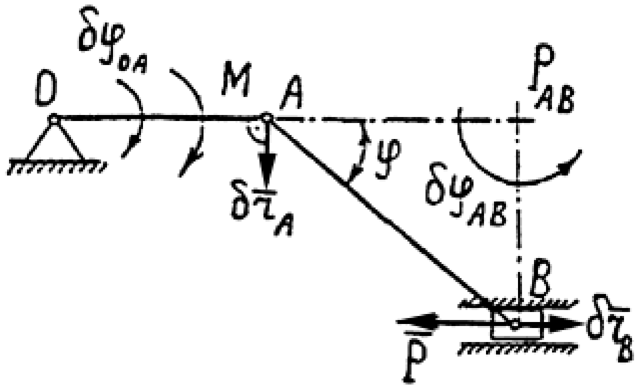


Рисунок 109

Уравнение возможных работ

$$M\delta\varphi_{OA} + P\left|\delta\bar{r}_B\right|\cos 180^{\circ} = 0$$

Выполним преобразования

$$P = M\ \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta S_B} = M \cdot i\ .$$

$$i = \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta S_B} = \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta S_A}\cdot\frac{\delta S_A}{\delta S_B} = \frac{\delta\varphi_{OA}}{r\cdot\delta\varphi_{OA}}\cdot\frac{AP_{AB}\delta\varphi_{AB}}{BP_{AB}\delta\varphi_{AB}} = \frac{1}{r}ctg\,\varphi$$

Значение силы Р определяется по формуле

$$P = M \cdot i = \frac{M}{r}ctg\varphi\ .$$

Задача 70 (рис. 110), (рис. 111)

Однородный стержень АВ длиной *l* и весом *P* находится в состоянии равновесия в вертикальной плоскости. Стержень опирается на гладкий пол и гладкую вертикальную стену. Определить зависимость между силами *P* и *F*.

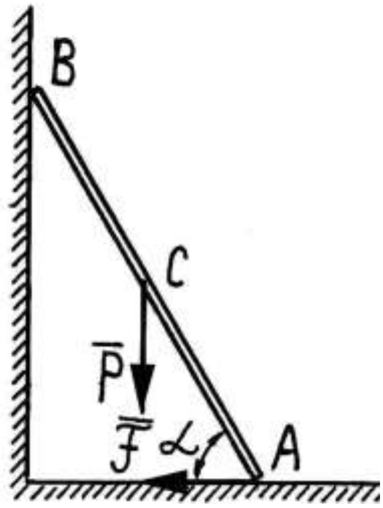


Рисунок 110

Решение. **(рис. 111)**

Для решения задачи применим принцип возможных перемещений.

Сообщим точке А стержня возможное перемещение $\delta\vec{r}_A$; точка В получит возможное перемещение $\delta\vec{r}_B$, стержень – возможное вращательное перемещение $\delta\varphi$ вокруг возможного центра поворота Е .

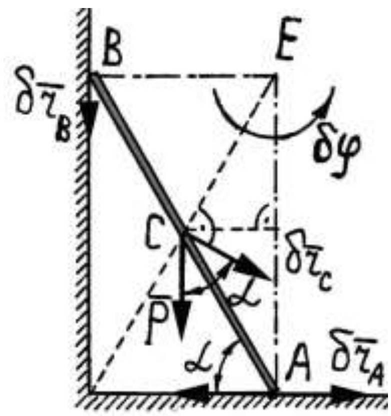


Рисунок 111

Составим общее уравнение статики:

$$\vec{P}\delta\vec{r}_C + \vec{F}\delta\vec{r}_A = 0$$

или

$$P\delta s_C \cos\alpha + F\delta s_A \cos 180^o = 0.$$

Учитывая зависимости

$$\delta s_C = |\delta \bar{r}_C| = CE\,\delta\varphi = \frac{1}{2} l\,\delta\varphi; \qquad CE = \frac{1}{2} l;$$

$$\delta s_A = |\delta \bar{r}_A| = AE\,\delta\varphi = l \sin\varphi\,\delta\varphi; \qquad AE = l \sin\varphi,$$

окончательно получим

$$F = \frac{1}{2} P ctg\,\alpha\,.$$

Задача 71 (рис. 112), (рис. 113)

Для заданного положения механизма, находящегося в состоянии равновесия, установить зависимость между моментом пары сил M и силой Q, если OA= b и O_1C=CB .

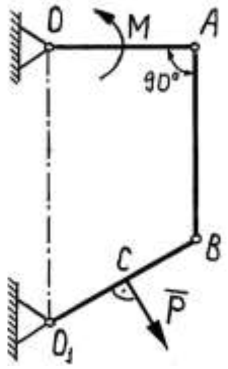


Рис. 112

Решение. рис.113

Воспользуемся принципом возможных перемещений.

Сообщим звену OA возможное вращательное перемещение $\delta\varphi_{OA}$.

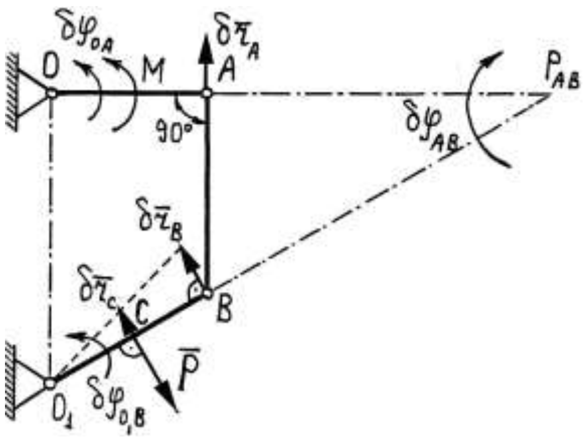


Рисунок 113

Точки A,B и C получат возможное перемещение $\delta\vec{r}_A$, $\delta\vec{r}_B$, $\delta\vec{r}_C$; звено AB и звено O_1B – возможные вращательные перемещения $\delta\varphi_{AB}$ и $\delta\varphi_{O_1B}$ вокруг точек P_{AB} и O_1.

На основании принципа возможных перемещений

$$-M\delta\varphi_{OA} + \vec{Q}\cdot\delta\vec{r}_C = 0$$

$$-M\delta\varphi_{OA} + Q\cdot\delta s_C \cos 0^0 = 0,$$

$$Q = M\,\frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta s_C} = Mi\,.$$

Передаточное отношение механизма

$$i = \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta s_C} = \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta s_A}\frac{\delta s_A}{\delta s_B}\frac{\delta s_B}{\delta s_C} = \frac{\delta\varphi_{OA}}{OA\delta\varphi_{OA}}\frac{AP_{AB}\delta\varphi_{AB}}{BP_{AB}\delta\varphi_{AB}}\frac{O_1B\delta\varphi_{O_1C}}{O_1C\delta\varphi_{O_1C}} = \frac{2}{b}\sin\alpha\,.$$

Значение силы Q определяется по формуле

$$Q = Mi = 2\frac{M}{b}\sin\alpha\,.$$

Задача 72 (рис. 114), (рис. 115)

Для подъема груза весом P применяется двухступенчатый блок . Определить соотношение между силами P и Q в случае равновесия системы.

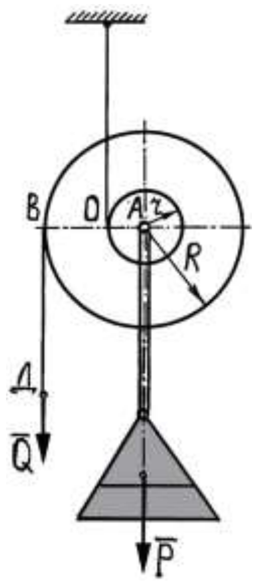


Рисунок 114

Решение. (рис. 115)

В основу решения положим принцип возможных перемещений.

Сообщим блоку возможное вращательное перемещение $\delta\varphi$ вокруг возможной оси О .

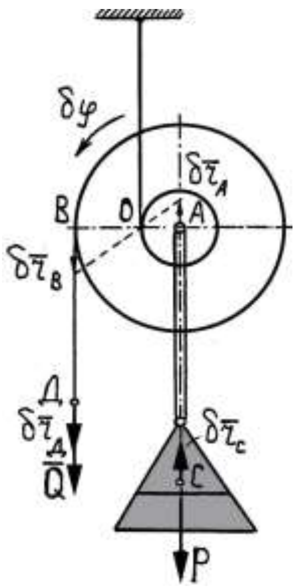


Рисунок 115

Точки В, С, Д и К получат возможные перемещения $\delta\vec{r}_B$, $\delta\vec{r}_C$; $\delta\vec{r}_Д$; $\delta\vec{r}_K$, груз – возможное поступательное перемещение $\delta\vec{r} = \delta\vec{r}_C$.

В соответствии с принципом возможных перемещений имеет место уравнение

$$\vec{Q}\cdot\delta\vec{r}_K + P\delta\vec{r}_C = 0 \qquad Q\cdot\delta s_K\cos 0^o + P\delta s_C\cos 180^o = 0.$$

С учетом зависимостей

$$\delta s_K = \left|\delta\vec{r}_K\right| = \left|\delta\vec{r}_Д\right| = \delta s_K = OД\delta\varphi = (R-r)\delta\varphi;$$

$$\delta s_C = \left|\delta\vec{r}_C\right| = \left|\delta\vec{r}_B\right| = \delta s_B = OB\,\delta\varphi = r\delta\varphi,$$

окончательно получаем

$$Q = P\frac{r}{R-r}.$$