$$y^{''}-9y^{'}+20y=x^{2}e^{4x}$$

Искомое решение имеет вид:

$$y\left(x\right)=\overbar{y}\left(x\right)+y^{\*}(x)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^{2}-9k+20=0$$

Его корни равны:

$$k\_{1}=4 и k\_{2}=5$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\overbar{y}\left(x\right)=C\_{1}e^{4x}+C\_{2}e^{5x}$$

$y^{\*}(x)$ выберем в виде:

$$y^{\*}=Axe^{4x}+Bx^{2}e^{4x}+Cx^{3}e^{4x}$$

Находим производные:

$$y^{'}\left(x\right)=Ae^{4x}+4Axe^{4x}+4Bx^{2}e^{4x}+2Bxe^{4x}+3Cx^{2}e^{4x}+4Cx^{3}e^{4x}$$

$$y^{''}\left(x\right)=8Ae^{4x}+16Axe^{4x}+2Be^{4x}+16Bx^{2}e^{4x}+16Bxe^{4x}+16Cx^{3}e^{4x}+24Cx^{2}e^{4x}+6Cxe^{4x} $$

И подставляем в левую часть уравнения:

$$8Ae^{4x}+16Axe^{4x}+2Be^{4x}+16Bx^{2}e^{4x}+16Bxe^{4x}+16Cx^{3}e^{4x}+24Cx^{2}e^{4x}+6Cxe^{4x}-9\left(Ae^{4x}+4Axe^{4x}+4Bx^{2}e^{4x}+2Bxe^{4x}+3Cx^{2}e^{4x}+4Cx^{3}e^{4x}\right)+20\left(Axe^{4x}+Bx^{2}e^{4x}+Cx^{3}e^{4x}\right)=x^{2}e^{4x}$$

$$e^{4x}\left(-A+2B\right)+\left(-2B+6C\right)e^{4x}x-3Cx^{2}e^{4x}=x^{2}e^{4x}$$

$$\left\{\begin{array}{c}-A+2B=0\\-2B+6C=0\\-3C=1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}A=-2\\B=-1\\C=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$$y^{\*}=-2xe^{4x}-x^{2}e^{4x}-\frac{1}{3}x^{3}e^{4x}$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения:

$$y\left(x\right)=C\_{1}e^{4x}+C\_{2}e^{5x}-2xe^{4x}-x^{2}e^{4x}-\frac{1}{3}x^{3}e^{4x}$$

$$y^{''}-2y^{'}=e^{x}\left(x^{2}+2x+1\right)$$

Искомое решение имеет вид:

$$y\left(x\right)=\overbar{y}\left(x\right)+y^{\*}(x)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^{2}-2k=0$$

Его корни равны:

$$k\_{1}=0 и k\_{2}=2$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\overbar{y}\left(x\right)=C\_{1}+C\_{2}e^{2x}$$

$y^{\*}(x)$ выберем в виде:

$$y^{\*}=Ae^{x}+Bxe^{x}+Cx^{2}e^{x}$$

Находим производные:

$$y^{'}\left(x\right)=AAe^{x}+Be^{x}+Bxe^{x}+Cx^{2}e^{x}+2Cxe^{x}$$

$$y^{''}\left(x\right)=Ae^{x}+B\left(2e^{x}+xe^{x}\right)+C\left(2e^{x}+x^{2}e^{x}+4xe^{x}\right) $$

И подставляем в левую часть уравнения:

$$Ae^{x}+B\left(2e^{x}+xe^{x}\right)+C\left(2e^{x}+x^{2}e^{x}+4xe^{x}\right)-2\left(AAe^{x}+Be^{x}+Bxe^{x}+Cx^{2}e^{x}+2Cxe^{x}\right)=e^{x}\left(x^{2}+2x+1\right)$$

$$e^{x}\left(-A+2C\right)-Bxe^{x}-Cx^{2}e^{x}=e^{x}+2xe^{x}+x^{2}e^{x}$$

$$\left\{\begin{array}{c}-A+2C=1\\-B=2\\-C=1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}A=-3\\B=-2\\C=-1\end{array}\right.$$

$$y^{\*}=-3e^{x}-2xe^{x}-x^{2}e^{x}$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения:

$$y\left(x\right)=C\_{1}+C\_{2}e^{2x}-3e^{x}-2xe^{x}-x^{2}e^{x}$$

$$y^{''}-4y^{'}+3y=\sin(\left(x\right))+e^{x}$$

Искомое решение имеет вид:

$$y\left(x\right)=\overbar{y}\left(x\right)+y^{\*}(x)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^{2}-4k+3=0$$

Его корни равны:

$$k\_{1}=1 и k\_{2}=3$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$\overbar{y}\left(x\right)=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{3x}$$

$y^{\*}(x)$ выберем в виде:

$$y^{\*}=Axe^{x}+B\cos(\left(x\right))+C\sin(\left(x\right))$$

Находим производные:

$$y^{'}\left(x\right)=Axe^{x}+Ae^{x}-B\sin(\left(x\right))+C\cos(\left(x\right))$$

$$y^{''}\left(x\right)=Axe^{x}+Ae^{x}+Ae^{x}-B\cos(\left(x\right))-C\sin(\left(x\right)) $$

И подставляем в левую часть уравнения:

$$Axe^{x}+Ae^{x}+Ae^{x}-B\cos(\left(x\right))-C\sin(\left(x\right)) -4\left(Axe^{x}+Ae^{x}-B\sin(\left(x\right))+C\cos(\left(x\right))\right)+3\left(Axe^{x}+Ae^{x}-B\sin(\left(x\right))+C\cos(\left(x\right))\right)=\sin(\left(x\right))+e^{x}$$

$$-2Ae^{x}+\cos(\left(x\right))\left(2B-4C\right)+\sin(\left(x\right))\left(4B+2C\right)=e^{x}+\sin(x)$$

$$\left\{\begin{array}{c}-2A=1\\2B-4C=0\\4B+2C=1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{5}\\C=\frac{1}{10}\end{array}\right.$$

$$y^{\*}=-\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{5}\cos(\left(x\right))+\frac{1}{10}\sin(\left(x\right))$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения:

$$y\left(x\right)=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{3x}-\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{5}\cos(\left(x\right))+\frac{1}{10}\sin(\left(x\right))$$