

Находим собственные значения

$$\begin{vmatrix} -66 - \lambda & -4 & -24 \\ -150 & -8 - \lambda & -54 \\ 201 & 12 & 73 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Вычитаем из третьего столбца второй, умноженный на 6.

$$\begin{vmatrix} -66 - \lambda & -4 & 04 \\ -150 & -8 - \lambda & 6\lambda - 6 \\ 201 & 12 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -66 - \lambda & -4 & 0 \\ -150 & -8 - \lambda & 6 \\ 201 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрываем определитель по первой строке.

$$-\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

Собственные значения

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -2.$$

Находим собственные векторы.

1) $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -66 & -4 & -24 & 0 \\ -150 & -8 & -54 & 0 \\ 201 & 12 & 73 & 0 \end{array} \right)$$

Первое и второе уравнение делим на -2, третье умножаем на -1 и складываем с утроенным вторым

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 33 & 2 & 12 & 0 \\ 75 & 4 & 27 & 0 \\ 24 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

Из второго вычитаем удвоенное первое и делим на 3, третье делим на 8

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 33 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 33 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Собственный вектор

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -67 & -4 & -24 & 0 \\ -150 & -9 & -54 & 0 \\ 201 & 12 & 72 & 0 \end{array} \right)$$

К третьему добавляем утроенное первое, второе делим на -3, первое умножаем на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 67 & 4 & 24 & 0 \\ 50 & 3 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 67 & 4 & 24 & 0 \\ 50 & 3 & 18 & 0 \end{array} \right)$$

Из первого вычитаем второе, затем второе уравнение умножаем на -1 и складываем с утроенным первым

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Собственный вектор

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3) $\lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -64 & -4 & -24 & 0 \\ -150 & -6 & -54 & 0 \\ 201 & 12 & 75 & 0 \end{array} \right)$$

Первое уравнение делим на -4 , второе на -6 , третье на 3 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 1 & 6 & 0 \\ 25 & 1 & 9 & 0 \\ 67 & 4 & 25 & 0 \end{array} \right)$$

Из второго вычитаем первое, из третьего – первое, умноженное на 4 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 1 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Второе уравнение выбрасываем, из первого вычитаем третье, умноженное на 5 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Собственный вектор

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$