Мы имеем следующую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ T u_x(x_0 + 0, t) - T u_x(x_0 - 0, t) = A \sin \omega t, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Для ее решения сначала подбираем решение другой задачи

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ T v_x(x_0 + 0, t) - T v_x(x_0 - 0, t) = A \sin \omega t, \quad t > 0, \\ v(0, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Ищем его в виде $v(x,t) = y(x) \sin \omega t$. Для функции $y(x)$ получаем задачу

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{\omega^2}{a^2}\, y = 0, \\ y'(x_0 + 0) - y'(x_0 - 0) = \dfrac{A}{T}, \\ y(0) = 0, \\ y(l) = 0. \end{cases}$$

Несложно проверить, что решение уравнения, удовлетворяющее двум последним краевым условиям имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \sin \dfrac{\omega x}{a}, \quad 0 < x < x_0, \\ C_2 \sin \dfrac{\omega (l - x)}{a}, \quad x_0 < x < l. \end{cases}$$

Постоянные C_1 и C_2 подбираем из условия непрерывности функции при $x = x_0$ и второго условия системы

$$\begin{cases} C_1 \sin \dfrac{\omega x_0}{a} = C_2 \sin \dfrac{\omega (l - x_0)}{a}, \\ C_1 \dfrac{\omega}{a} \cos \dfrac{\omega x_0}{a} + C_2 \dfrac{\omega}{a} \cos \dfrac{\omega (l - x_0)}{a}. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$C_1 = \frac{A \omega \sin \frac{\omega (l - x_0)}{a}}{T a \sin \frac{\omega l}{a}}, \quad C_2 = \frac{A \omega \sin \frac{\omega x_0}{a}}{T a \sin \frac{\omega l}{a}}.$$

Таким образом,

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{A \omega \sin \frac{\omega (l - x_0)}{a}}{T a \sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t \sin \dfrac{\omega x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \dfrac{A \omega \sin \frac{\omega x_0}{a}}{T a \sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t \sin \dfrac{\omega (l - x)}{a}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Далее делаем замену $u = v + w$, для функции w получаем следующую задачу

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ w(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ w_t(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 < x < l, \\ w(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ w(l,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

где $\psi_1(x) = \psi(x) - \omega y(x)$. Решение этой задачи получается методом Фурье

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Здесь $\{\varphi_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, а $\{\psi_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $\psi_1(x)$.