$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$$

Вычисляем интеграл

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$$

Согласно общей теории этот интеграл равен $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов подынтегральной функции во всех особых точках верхней полуплоскости. Решая биквадратное уравнение $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$, находим особые точки $z = \pm i$, $z = \pm 2i$. Таким образом, вычеты надо вычислить в точках $z = i$ и $z = 2i$.

Для вычисления вычетов представим подынтегральную функцию

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4}$$

в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z) = z^3 e^{iz}$, $\psi(z) = z^4 + 5z^2 + 4$.

Вычет $f(z)$ в точке a при таком представлении равен

$$\text{res f(z)} = \varphi(a)/\psi'(a) = \frac{a^3 e^{ia}}{4a^3 + 10a}.$$

Вычет в точке $z = i$:

$$r_1 = \frac{-ie^{-1}}{-4i + 10i} = -\frac{1}{6e},$$

вычет в точке $z = 2i$:

$$r_2 = \frac{-8ie^{-2}}{-32i + 20i} = \frac{2}{3e^2}.$$

Интеграл

$$A = 2\pi i(r_1 + r_2) = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right) = \frac{\pi i(4 - e)}{3e^2}.$$

Таким образом, исходный интеграл

$$I = \frac{\pi(4 - e)}{3e^2}.$$