Решение.

Будем искать (не равное нулю) решение уравнения в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от х, а другая – только от t, т.е.

.

Подставляя это выражение в уравнение

имеем

.

Здесь . После деления на получим:

.

Это равенство двух отношений, зависящих только от х и только от t, возможно только в случае, если оба отношения равны постоянному числу – λ. (λ>0):

т.е.

.

Первое уравнение системы с граничными условиями

представляет собой задачу Штурма-Лиувиля на отыскание собственных функций и собственных значений дифференциального оператора. Из общего решения уравнения

с использованием краевых условий

.

находим собственные значения

и собственные функции

.

Второе уравнение системы

.

имеем решение

.

Таким образом, общее решение исходного уравнения принимает вид

.

Поскольку при любых n полученная функция является решением нашего дифференциального уравнения, то и сумма этих решений так же будет являться решением исходного дифференциального уравнения:

.

Подставляя сюда начальное условие

Последняя формула показывает, что величины являются коэффициентами разложения функции в ряд Фурье по синусам в интервале (0,1):

*,*

Интегрируя два раза по частям

Получим окончательный ответ